ATTI

DELLA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCLV

1958

SERIE OTTAVA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

VOLUME XXV

(2° semestre 1958)

ROMA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1958

Digitized by the Internet Archive
in 2024

https://archive.org/details/rendiconti-lincei_1958_25

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Ferie 1958 Luglio–Agosto

NOTE DI SOCI

(Ogni Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo o di presentazione)

Chimica. — *Polimerizzazione stereospecifica dell'acetilene* (*). Nota di GIULIO NATTA, GIORGIO MAZZANTI e PAOLO CORRADINI, presentata (**) dal Socio G. NATTA.

Erdmann e Koethner indicarono per primi la possibilità di polimerizzare l'acetilene in presenza di rame o di suoi ossidi a temperatura di 230 °C [1], ottenendo un prodotto di reazione solido, chimicamente inerte, leggero, di colore bruno che fu poi chiamato cuprene [2]. Esso non assorbe ossigeno a freddo, si alogena con grande difficoltà [3] e secondo Kaufmann e Monhaupt è costituito da idrocarburi aromatici policiclici non aventi catene laterali [3]. Il cuprene, secondo Sabatier e Sandersen [2] contiene meno idrogeno di quanto corrisponde alla formula $(C_7H_6)_n$ e, secondo Calhoun [4], è costituito da un idrocarburo tridimensionale, altamente reticolato.

Sostanze solide, di aspetto simile al cuprene, sono state ottenute per azione di vari tipi di radiazioni ad alta frequenza sull'acetilene. I polimeri ottenuti a bassa temperatura sono costituiti da prodotti pulverulenti, di colore giallo, insolubili, più reattivi del cuprene, che reagiscono con ossigeno già a temperatura ambiente. Job e Champetier [5], impiegando un catalizzatore preparato da cloruro ferrico e bromuro di fenilmagnesio, ottennero un polimero nero insolubile ed infusibile. Questi autori non forniscono però altre descrizioni del prodotto ottenuto. Noi abbiamo ripetuto tale preparazione ed ottenuto un polimero che ai raggi X risulta amorfo.

Dopo la scoperta di particolari sistemi catalitici metallorganici capaci di promuovere la polimerizzazione di monomeri etilenicamente insaturi ed

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano.
(**) Nella seduta del 10 giugno 1958.

in particolare di sistemi catalitici stereospecifici nella polimerizzazione delle α–olefine e delle diolefine, abbiamo voluto estendere l'impiego di questi catalizzatori anche alla polimerizzazione degli idrocarbuti acetilenici.

In questa nostra comunicazione, riferiamo soltanto sui risultati ottenuti in alcune prove di polimerizzazione dell'acetilene, mentre ci riserviamo di riferire in altra sede sulla polimerizzazione degli idrocarburi acetileni superiori, in particolare dell'1–esino, che forniscono polimeri lineari più facilmente frazionabili e purificabili.

1. Polimerizzazione dell'acetilene con catalizzatori preparati da composti metallorganici e composti di metalli di transizione.

Facendo gorgogliare acetilene gassosa in una soluzione eptanica di alluminio trietile si forma, anche a temperatura ambiente, una piccola quantità di prodotto solido, nero, infusibile ed insolubile, amorfo all'esame con i raggi X. La bassa resa di conversione del monomero rispetto all'alluminio trialchile non aumenta sensibilmente operando sotto pressione od a temperature più elevate. La velocità di polimerizzazione viene molto aumentata se si aggiungono composti di metalli di transizione, ossia se si impiegano i catalizzatori proposti da Ziegler per la polimerizzazione a bassa pressione dell'etilene [6] e da noi per quella delle α–olefine [7].

Le rese e la cristallinità dei prodotti che si ottengono variano a seconda del tipo di composto di metallo di transizione che viene impiegato.

a) *Polimerizzazione dell'acetilene con i più tipici catalizzatori Ziegler.*

Impiegando catalizzatori preparati da alluminio trialchili e da alogenuri di metalli di transizione solubili in idrocarburi, si ottiene, accanto a dei prodotti oleosi, a basso peso molecolare, un polimero solido, nero, pulverulento, amorfo all'esame con i raggi X.

Così, ad esempio, a temperatura ambiente o poco superiore, in presenza di catalizzatori preparati da alluminio trietile e tetracloruro di titanio, la resa in polimero dell'acetilene rispetto al catalizzatore è di circa 3 g/g, e non aumenta sensibilmente prolungando il tempo di reazione. Il 20 % del polimero è costituito da prodotti oleosi, a basso peso molecolare. Il rimanente 80 % è costituito da un solido nero, infusibile, insolubile in tutti i solventi organici, amorfo all'esame con i raggi X.

b) *Polimerizzazione dell'acetilene con catalizzatori altamente stereospecifici nella polimerizzazione delle α–olefine.*

Nell'intento di ottenere polimeri dell'acetilene aventi una maggiore regolarità di struttura, abbiamo impiegato quei catalizzatori che risultano altamente stereospecifici nella polimerizzazione delle α–olefine, preparati da alluminio trietile e dalle modificazioni dei trialogenuri di metalli di transizione aventi reticolo a strati ($TiCl_3$ violetto, tricloruro di vanadio).

TABELLA I.

Prove tipiche di polimerizzazione dell'acetilene con catalizzatori preparati da alluminio trialchili e dalle modificazioni dei trialogenuri di metalli di transizione aventi reticolo a strati.

Alogenuro		$Al(C_2H_5)_3$	n-eptano	Durata	Temperatura	Polimeri ottenuti	Prodotti estraibili con acetone
tipo	moli	moli	cm^3	ore	°C	g	%
α $TiCl_3$ . .	0,05	0,05	400	10	35–40	21	18
α $TiCl_3$ . .	0,05	0,05	400	20	35–40	24	20
VCl_3	0,04	0,10	500	10	40–45	25	65

Con l'acetilene si è ottenuta, con basse conversioni del monomero, una miscela di polimeri, contenenti una elevata percentuale di prodotti oleosi, separabili dai polimeri solidi neri, mediante estrazione con acetone (vedi Tabella I).

Il polimero solido, nero, ottenuto in queste condizioni, depurato dal catalizzatore, presenta solo una debole cristallinità all'esame con i raggi X (fig. 1).

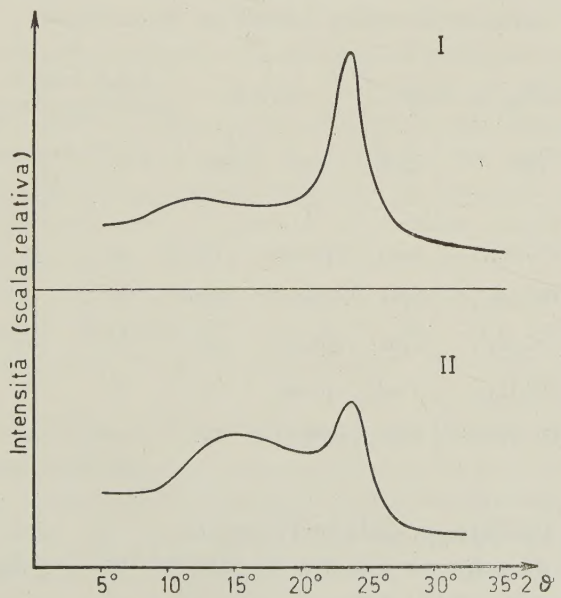


Fig. 1. – Registrazione con contatore Geiger di spettri ai raggi X (CuKα) di un campione di poliacetilene a struttura regolare prima (I) e dopo (II) trattamento con tetralina all'ebollizione in atmosfera di azoto per 1 giorno.

c) *Polimerizzazione con catalizzatori preparati da alcolati di titanio.*

Nel corso delle ricerche effettuate presso il nostro Istituto nel campo della polimerizzazione dei monomeri vinilici era stato osservato che i catalizzatori solubili in idrocarburi, preparati da alcolati di metalli di transizione e da composti metallorganici, operando con opportuni rapporti tra le moli dei due reattivi, polimerizzano l'etilene fornendo [8] polimeri altamente lineari [che differiscono da quelli indicati in *a*) perché contengono ancor meno ramificazioni] e polimerizzano il butadiene fornendo polimeri lineari a concatenamento prevalentemente 1–2 [9].

Polimerizzando l'acetilene con tali catalizzatori si è ottenuto un polimero nero, completamente insolubile nei solventi organici, in cui sono presenti scaglie aventi lucentezza metallica. Operando in recipienti di vetro si osserva talvolta la formazione di uno specchio nero lucente di polimero aderente alla parete. La conversione del monomero è quasi totale (98,5 %) e la percentuale di prodotti oleosi è molto bassa, quando si opera con alti rapporti tra catalizzatore e monomero.

Lo spettro ai raggi X registrato tra $2\vartheta = 5°$ e $2\vartheta = 30°$ (CuKα) del polimero presenta una caratteristica banda da cristallinità (fig. 1) e non mostra l'aspetto tipico dei prodotti amorfi fortemente reticolati.

TABELLA II.

Polimerizzazione dell'acetilene con catalizzatori preparati da composti metallorganici e alcolati di titanio solubili in idrocarburi.

Composto metallorganico		Alcolato di titanio		Solvente		Condizioni di polimerizzazione		Polimero ottenuto g	Prodotti oleosi essibili co acetone
tipo	moli	tipo	moli	tipo	cm³	t °C	Durata ore		
$Al(C_2H_5)_3$.	0,1	$Ti(OC_3H_7)_4$	0,04	eptano	500	45	15	35,5	4,5
$Al(C_2H_5)_3$.	0,1	$Ti(OC_3H_7)_4$	0,04	eptano	500	75	15	48,5	11,1
$Al(C_2H_5)_3$.	0,1	$Ti(OC_3H_7)_4$	0,04	eptano	500	— 20	10	4	3,5
$Al(C_6H_{13})_3$.	0,05	$Ti(OC_4H_9)_4$	0,025	eptano	300	50	15	35	10,0
LiC_5H_{11} . .	0,14	$Ti(OC_3H_7)_4$	0,02	eptano	250	60	20	6,4	18

Dalle prove riportate in Tabella II risulta:

1° le rese di polimero rispetto al catalizzatore impiegato sono basse, dell'ordine di 2 g/g catalizzatore;

2° impiegando alluminio trietile o alluminio triesile o litio amile non varia il tipo di polimero ottenuto, ma le rese, rispetto al catalizzatore, sono minori con il litio amile;

3° la velocità di reazione cresce con il crescere della temperatura fra — 20 e + 80° C. Non si è rilevata in tale intervallo una variazione sensibile della cristallinità del poliacetilene.

2. PROPRIETÀ CHIMICHE DEL POLIACETILENE CRISTALLINO.

In questa Nota descriveremo le proprietà chimiche del poliacetilene nero, cristallino, ottenuto in presenza di catalizzatori preparati da alcolati di titanio e alluminio trialchili.

La natura dei prodotti oleosi estraibili con acetone verrà descritta in una Nota successiva.

A causa della completa insolubilità del polimero solido non è stato possibile determinarne il peso molecolare e nemmeno effettuarne una separazione con solventi in frazioni di diversa cristallinità.

Trattamenti con solventi ad alta temperatura non solo non sciolgono il polimero, ma ne provocano una reticolazione (che dovrebbe ridurne ancora la solubilità). Ad esempio dopo trattamento con tetralina (esente da perossidi) all'ebollizione, in atmosfera di azoto, la cristallinità del polimero ai raggi X risulta ridotta a circa il 25 % di quella iniziale (fig. 2). Inoltre nello spettro di diffrazione compare un massimo in corrispondenza ad una larga banda, attribuibile alla formazione, per reticolazione, di prodotti amorfi, in tutto analoga a quella presente negli spettri dei prodotti ottenuti coi catalizzatori descritti nei paragrafi *a*) e *b*).

Rispetto ai polimeri delle α-olefine il poliacetilene presenta una maggiore reattività, in particolare con reattivi ossidanti. Assorbe ad esempio ossigeno, rapidamente ad alta temperatura, con formazione di prodotti più chiari.

Somma cloro, anche a temperatura ambiente, con formazione di un prodotto solido bianco, amorfo ai raggi X. Inviando una corrente di cloro per 20 ore, in una sospensione di poliacetilene in tetracloruro di carbonio, mantenuta a temperatura ambiente, il prodotto di reazione completamente bianco, rimasto in sospensione, ha un contenuto di cloro del 64 %.

In base alla determinazione dell'acido cloridrico sviluppato durante la reazione si può calcolare che solo 85 % del cloro totale fissato è di addizione, mentre il 15 % è di sostituzione di atomi di idrogeno del poliacetilene.

L'elevata reattività con cloro differenzia nettamente il poliacetilene da noi preparato dal cuprene.

Dato che la clorurazione con sostituzione è un processo di natura radicalica, è prevedibile che sia accompagnata da processi di polimerizzazione dei doppi legami presenti nel polimero. Ciò, oltre a fattori di natura sterica, può essere la causa della minore quantità di cloro addizionata rispetto a quella prevedibile per un polimero lineare dell'acetilene.

Il polimero clorurato inscurisce rapidamente per riscaldamento a 70-80° C, con perdita di acido cloridrico. Per trattamento prolungato a caldo

con potassa etilalcolica N/2 perde la quasi totalità del cloro, trasformandosi in un solido, nero, pulverulento, amorfo all'esame con i raggi X.

L'elevata insolubilità del polimero può essere la causa della scarsa reattività, che abbiamo riscontrata nell'idrogenazione con idrogeno elementare, anche operando ad alta pressione e in presenza di notevoli eccessi di catalizzatori eterogenei.

Anche limitata risulta la reattività nella reazione di ossosintesi, effettuata con catalizzatori solubili.

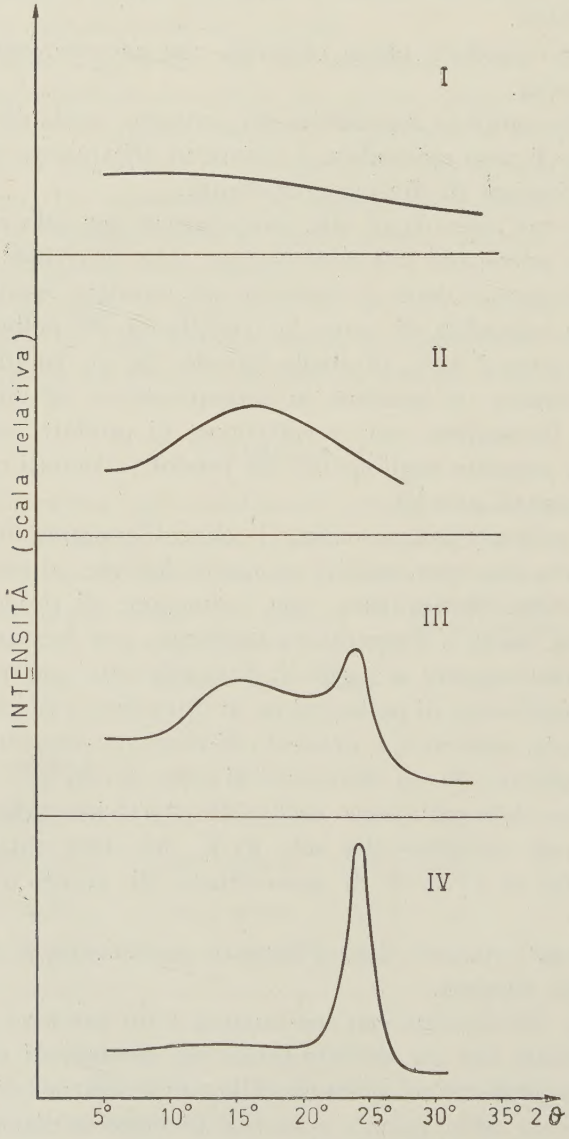


Fig. 2. – Spettri ai raggi X (CuKα) di campioni di poliacetilene:

I: Cuprene.
II: Poliacetilene preparato col sistema catalitico alluminiotrietile – tetracloruro di titanio.
III: Poliacetilene lineare trattato con tetralina alla ebollizione in atmosfera di azoto per 1 giorno.
IV: Poliacetilene lineare preparato col sistema catalitico alluminiotrietile – alcoolato di titanio.

3. STRUTTURA DEL POLIACETILENE CRISTALLINO.

Sono stati eseguiti per i diversi poliacetileni spettri di polveri registrati su pellicola fotografica, oppure con un contatore Geiger; mentre non è risultato possibile preparare e quindi esaminare fibre orientate a causa della infusibilità e insolubilità degli alti polimeri dell'acetilene.

Lo spettro di polveri del poliacetilene ottenuto con catalizzatori preparati da alcoolati di titanio, risulta già di per sè, a differenza delle spettro del cuprene, fortemente indicativo di una struttura che presenta una certa cristallinità. Essa può essere attribuita ad una struttura lineare del polimero, come cercheremo ora di dimostrare. Si osserva infatti nello spettro, oltre a bande allargate più o meno intense attribuibili a sostanza amorfa, un forte picco per una distanza reticolare $d_1 = 3{,}65$ Å. In regioni angolari più alte, si trova un picco, pure molto netto, per una distanza reticolare $d_2 = 2{,}11$ Å. Si osserva che $d_1 = \sqrt{3}\, d_2$. Questo fa pensare che tali riflessi provengano da piani reticolari paralleli agli assi di catene lineari, di ingombro presso a poco cilindrico, impacchettate densamente in un reticolo pseudoesagonale, a distanze relative di $4{,}22$ Å $= 2/\sqrt{3}\, d_1 = 2\, d_2$. A supporto di questa ipotesi si possono citare i seguenti argomenti generali, corroborati da fatti sperimentali.

Come è noto, nei polimeri lineari allo stato solido le catene tendono a realizzare la migliore occupazione dello spazio ed a disporsi parallelamente tra loro. Questo si verifica per i polimeri lineari, non solo allo stato cristallino, ma anche allo stato amorfo, quando le irregolarità presenti nella catena impediscono la cristallizzazione. Tale tendenza si mantiene, sia pure in grado minore, anche allo stato fuso, come è stato da noi dimostrato per il polietilene [11].

Se le irregolarità nella successione dei sostituenti lungo la catena lineare, o le irregolarità nella configurazione della catena stessa, non riescono ad impedire che gli atomi appartenenti alle stesse catene od a catene diverse occupino posizioni regolarmente distanziate tra loro, lo spettro ai raggi X si presenta sotto forma di righe nette per le riflessioni provenienti da piani paralleli agli assi delle catene e di bande allargate in tutte le altre regioni dello spettro. In altre parole, il polimero si comporta ai raggi X come dotato di ordine soltanto in due direzioni, quelle perpendicolari agli assi delle catene, e non in tre come nelle normali sostanze cristalline. Un'ingombro quasi cilindrico delle catene fa sì che i loro assi tendano ad occupare le posizioni corrispondenti ad un reticolo esagonale compatto, cioè in modo che ogni macromolecola sia circondata da altre sei ad eguale distanza. Se chiamiamo a tale distanza, saranno allora attese riflessioni nette (e sempre più deboli nell'ordine) nelle posizioni corrispondenti a distanze di Bragg $\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{4}$, ecc. Questo si trova attualmente nel poliacetilene posto $a = 4{,}22$ Å. Naturalmente, dato che mancano riflessioni nette da piani non equatoriali nello spettro del poliacetilene, è possibile affermare solo che il polimero è sostanzialmente

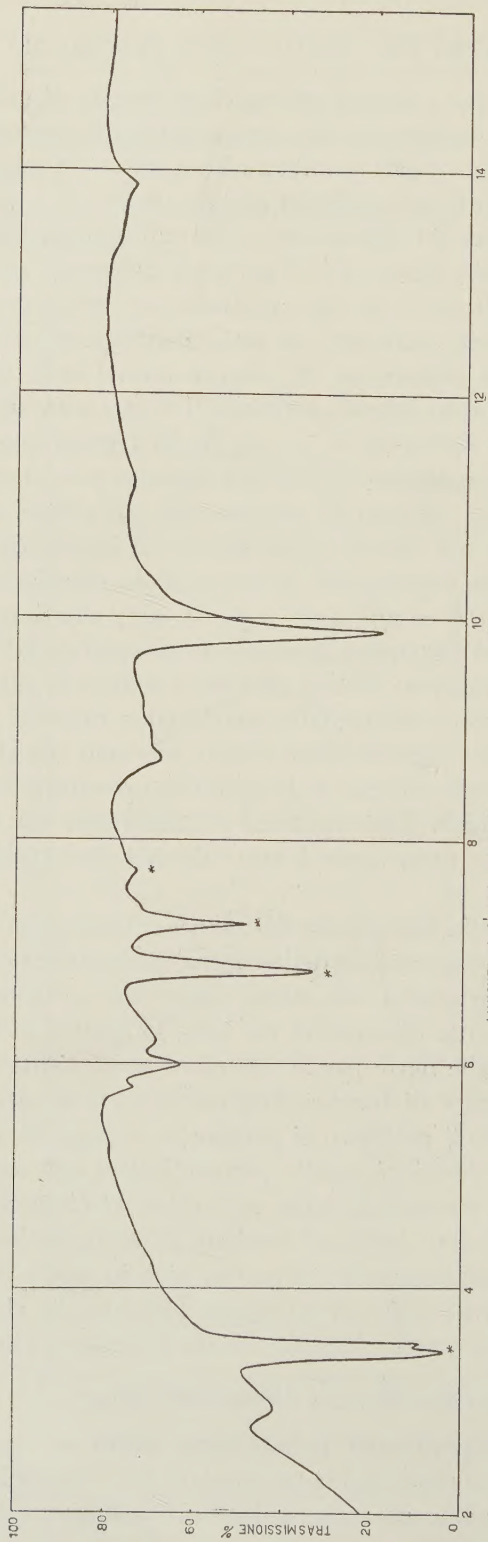


Fig. 3. – Spettro infrarosso di un campione di poliacetilene lineare in pasta con olio di vaselina. Le bande dell'olio di vaselina sono contrassegnate con un asterisco.

lineare, ma non ancora che la sua catena sia altamente regolare. Un analogo comportamento si verifica per altri polimeri, per i quali una struttura lineare della catena è fuori discussione, quali il poliacrilonitrile ed il polibutadiene 1–4 trans [11].

Tabella III.

Polimero	Distanza tra gli assi delle catene a (Å)	Distanze di Bragg calcolate ed intensità e distanze sperimentali di riflessi equatoriali					
		$\frac{\sqrt{3}a}{2}$	d_{oss}	$a/2$	d_{oss}	$\frac{\sqrt{3}a}{4}$	d_{oss}
Poliacrilonitrile (1) . .	5,99	5,19	*ff* 5,18	3,00	*mf* 3,00		*dd*
Polibutadiene 1–4 trans (2)	4,54	3,93	*ff* 3,95	2,27	*f* 2,29	1,96	*m* 1,96
Poliacetilene	4,22	3,65	*f* 3,63	2,11	*md* 2,11		*dd*

(1) Ottenuto per polimerizzazione sia radicalica che anionica.
(2) Ottenuto per polimerizzazione anionica coordinata.

Natura dei legami lungo le catene lineari del poliacetilene.

La parte del poliacetilene che dà ai raggi X riflessioni nette è quindi sostanzialmente lineare. Si tratta ora di vedere se le evidenze roentgenografiche sono sufficienti a stabilire la natura dei legami lungo le catene lineari del poliacetilene, se cioè i legami lungo la catena sono prevalentemente a configurazione trans o cis. Il fatto che le catene si impacchettino in un reticolo pseudoesagonale indica che esse hanno un ingombro cilindrico e rende già di per sè più probabile la configurazione trans. Poiché alle due configurazioni possibili devono corrispondere valori diversi della periodicità, si è cercato di calcolare la periodicità media (p) lungo l'asse della catena per unità monomerica dal valore della densità sperimentale. Il valore p così calcolato dovrebbe risultare in eccesso di qualche % sul valore vero poichè la densità sperimentale risulta in pratica sempre inferiore a quella teorica. Per quasi tutti gli alti polimeri lineari, tale divergenza risulta del 4–5 % circa a causa della presenza costante di parte amorfa a densità più bassa.

Si ha

$$p = \frac{M}{N\, a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot d}$$

dove:

M = 26 è il peso molecolare di una unità monomerica
N è il numero di Avogadro
d la densità sperimentale (circa 1,10 g/cm^3)
a la distanza tra gli assi delle catene.

Risulta:

$p = 2{,}5$ Å, valore corrispondente all'ipotesi che i legami lungo la catena siano prevalentemente a configurazione trans (valore teorico: $p = 2{,}43$ Å), poiché per la configurazione cis si deve prevedere un valore minore (2,1 Å).

L'ipotesi che il polimero nero, cristallino dell'acetilene contenga dei tratti lineari di catena, in cui sono presenti sequenze di doppi legami coniugati aventi configurazione trans, appare in accordo con alcune proprietà del polimero. In primo luogo il colore nero e la lucentezza metallica possono essere attribuiti a lunghe sequenze di doppi legami coniugati. Esse possono essere la causa dei valori da noi osservati relativamente bassi della resistività elettrica (circa 10^{10} ohm/cm) del polimero depurato, rispetto a quella degli altri poliidrocarburi (10^{15} — 10^{18} ohm/cm).

La semplicità dello spettro infrarosso che presenta un unico assorbimento intenso intorno a 9,86 μ, a differenza del cuprene, nello spettro del quale manca completamente questo assorbimento, può essere indizio di semplicità di struttura del poliacetilene cristallino [1].

Viene così confermata la stereospecificità di alcuni catalizzatori, nella polimerizzazione dell'acetilene con formazione di polimeri, contenenti tratti lineari di catene, in cui sono presenti sequenze di doppi legami coniugati, con configurazione trans.

La completa insolubilità dei polieacetileni può essere attribuita, più che all'alto peso molecolare, alla presenza di una certa reticolazione.

Bibliografia.

[1] H. Erdmann, P. Koethner, «Z. Anorg. Chemie», *18*, 48 (1898).
[2] M. Sabatier, M. Sandersen, «Bull. Soc. Chim.», (3), *21*, 530 (1898).
[3] P. Kaufmann, W. Mohnhaupt, «Ber», *56* B, 2533 (1923).
[4] Calhoun, «Can. J. Res.», *15*, 208 (1937).
[5] A. Job, G. Champetier, «Bull. Soc. Com.», M 176, 448 (1936).
[6] K. Ziegler, E. Holzkamp, H. Breil, H. Martin, «Z. Angew. Chem.», *67*, 426 (1955).
[7] G. Natta, «Chimica e Industria», *37*, 888 (1955).
[8] M. Farina, M. Ragazzini, Lavoro presentato al Congresso della Soc. di Chimica Italiana: Torino 1958, in corso di pubblicazione su «Gazzetta chimica».
[9] G. Natta, L. Porri, Brevetto italiano n. 538.453, 15 luglio 1955.
[10] P. Corradini, «Rend. Ist. Lombardo Scienze e Lettere», *91*, 889 (1957),
[11] G. Natta, P. Corradini, L. Porri, «Rend. Accad. Naz. Lincei», (8), *20*, 728 (1956).

(1) Uno studio più approfondito, in collaborazione con D. Morero, dello spettro infrarosso dei poliacetileni sarà oggetto di ulteriore comunicazione.

Mineralogia. — *La clorite a* 14 Å *a reticolo espandibile dei diabasi di Groppo Maggio nell'Appennino emiliano* (*). Nota (**) del Corrisp. PAOLO GALLITELLI.

Lo sviluppo delle ricerche sui minerali a strati misti delle rocce appenniniche ha permesso di identificare, entro le masse diabasiche di Groppo Maggio nel Parmense, un minerale con distanza fra i piani reticolari di 14 Å, che presenta insieme proprietà tipiche delle cloriti e delle smectiti (1). Si tratta di un altro termine della famiglia dei « swelling chlorites », diverso dal minerale a strati misti clorite–vermiculite di Rossena e Campotrera (Gallitelli, 1956), che per le sue condizioni di giacitura e di genesi può consentire qualche osservazione sulle vicende geopetrochimiche subìte dalle rocce che lo contengono.

Il Groppo Maggio si eleva alla testata della valle della Manebiola di Corchia, affluente di destra del fiume Taro, 3 km. circa in linea d'aria a NNW del passo della Cisa, a costituire lo sperone orientale del monte Binaghè (m. 1115 s.l.m.).

Esso è ben noto agli studiosi dell'Appennino per il lembo di roccia granitica profondamente milonitizzata che lo costituisce e che fu oggetto di numerosi studi petrografici (Sangiorgi, 1909; Ferrari, 1910; Bonatti, 1932) e geologici (Merla, 1932) intesi ad interpretarne la posizione nel più complesso quadro della tettonica appenninica.

Molto meno note sono invece le rocce ofiolitiche che includono la milonite granitica e che in masse notevoli, intercalate a strati argilloso–calcarei, si estendono, verso NW dal Groppo Maggio alla vetta del monte Binaghè ed al crinale Museriri. Nei lavori dedicati ai graniti di Groppo Maggio è ricordata infatti la presenza di serpentine e di brecce serpentinose, mentre non è fatto cenno dell'esistenza dei diabasi, che pure sono in masse cospicue nelle quali sono anche aperte gallerie per lo sfruttamento di pirite, calcopirite e limonite in vicinanza del paese di Corchia.

Il minerale che ci interessa è identificabile per via roentgenografica e si presenta in quantità assai modeste (1–2 %) sia nel diabase a struttura ofitica di Corchia – con le mineralizzazioni ora ricordate – sia nel diabase verde a grana media che affiora sulla cima del Groppo Maggio. In concentrazioni maggiori (circa 20–25 %) si incontra in alcuni straterelli di materiale verde scuro e di aspetto terroso che attraversano il diabase della cima del Groppo.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della Università di Modena con i mezzi messi a disposizione dal C.N.R. per ricerche sull'alloctono appenninico e sui minerali a strati misti.

(**) Pervenuta all'Accademia il 26 luglio 1958.

(1) Il termine smectite, secondo le proposte di Brown (1955), serve a identificare i membri della famiglia delle montmorilloniti.

Una accurata cernita al microscopio, sulle varie porzioni ottenute per sedimentazione ed arricchite con ripetute separazioni magnetiche, ha consentito di separarlo dalla clorite che l'accompagna e di ottenerne una quantità sufficiente per lo studio.

Macroscopicamente il minerale si presenta in granuli o in masserelle tondeggianti di colore verde marcio, che, ridotte in sezione o in sottili frammenti, risultano al microscopio costituite da un minuto aggregato di esili lamelle, quasi del tutto incolore o debolmente verdicce, prive di pleocroismo e con birifrazione bassa e colori di polarizzazione grigi. Solo un lungo ed accuratissimo lavoro di cernita a forte ingrandimento consente di separarlo dalla clorite, ben riconoscibile per i colori di interferenza più alti e le maggiori dimensioni delle singole lamelle.

Gli indici di rifrazione, col metodo della linea di Becke per la luce bianca, sono risultati:

clorite in lamine	$\alpha' = 1{,}555 \pm 0{,}002$	$\gamma' = 1{,}585 \pm 0{,}002$
minerale in esame	$\alpha' = 1{,}579 \pm 0{,}002$	$\gamma' = 1{,}581 \pm 0{,}002$.

Ricerche roentgenografiche. – L'esame roentgenografico, eseguito con una camera di mm. 114,6 di diametro e con un diffrattometro Hilger e Watt, sia su polvere ed aggregati isorientati naturali, sia dopo trattamento con vapore d'acqua, glicerina, NH_4NO_3, e riscaldamento a temperature diverse, ha dato i risultati seguenti.

Il minerale, di tipo triottaedrico, è caratterizzato da una sequenza di interferenze basali (00*l*) a 14,4 Å, 7,2 Å, 4,83 Å, 3,56 Å che corrispondono per posizione a quelle di una clorite, di una vermiculite o di una smectite. Ma, mentre nelle cloriti il secondo ed il quarto ordine (7,2 Å e 3,55 Å) sono più intensi del primo e del terzo (14,4 Å e 4,84 Å), nel nostro minerale il rapporto fra le intensità dei primi quattro ordini (00*l*) (6 : 1 : 0,5 : 0,5) corrisponde piuttosto a quello di una smectite o di una vermiculite.

Ciò fa supporre che fra i foglietti micacei del reticolo si trovino gruppi di ioni o molecole che portano un contributo alla intensità della interferenza a 7 Å (002) più debole di quello portato dal gruppo $Mg(OH)_6$ tipico delle cloriti, ma a sua volta più forte di quello attribuibile alle sole molecole d'acqua ed ai pochi ioni scambiabili presenti fra gli stessi foglietti nelle smectiti; cioè un complesso di ioni e di molecole d'acqua analogo a quello delle vermiculiti.

Dalle vermiculiti e dalle cloriti tipiche il nostro minerale differisce però quando venga trattato con glicerina. Espande infatti completamente da 14,4 Å a 16,9 Å senza lasciare traccia alcuna della 14,4 Å, mentre la 7,2 Å si sdoppia spostandosi in parte a 8,8 Å come nelle smectiti.

Dalle smectiti a sua volta differisce perché dopo ripetuti trattamenti con vapor d'acqua espande solo parzialmente da 14,4 Å a 15,4 Å, mentre nelle saponiti tipiche l'espansione con H_2O raggiunge 17 Å.

Per prolungata ebollizione con NH_4NO_3 una parte della 14,4 Å si sposta a 12,4 Å, mentre il riscaldamento anche prolungato a 330° non altera

in alcun modo il reticolo del minerale. Solo il riscaldamento a 440°, e ancor più quello a 650°, sposta la 14,4 Å a 13,8 Å (come nelle cloriti), mentre compare una debole 9,6 Å tipica del reticolo del talco.

Tale comportamento fa escludere che il nostro minerale sia una miscela meccanica di clorite e smectite, in quanto il trattamento con glicerina sposta tutta la 14,4 Å a 16,9 Å senza lasciare traccia della 14,4 Å, mentre quest'ultima dovrebbe essere pure presente quando si trattasse di una miscela meccanica contenente clorite. Fa escludere pure che possa trattarsi di una interlaminazione regolare fra un reticolo cloritico ed uno montmorillonitico o vermiculitico con la formazione di una cella doppia, non essendosi osservata alcuna interferenza a 29 Å, né la serie completa di riflessioni basali d'ordine superiore correlate con tale distanza basale.

Sembra piuttosto probabile che si tratti di un minerale simile per le sue proprietà a quello osservato da Grim e Johns (1954) in alcune argille provenienti dal Golfo del Messico. Questi Autori spiegano il comportamento del minerale, ammettendo che nel reticolo a 14 Å la regione fra i foglietti micacei sia occupata da sporadiche isole brucitiche di composizione $Mg(OH)_6$, intervallate, nel piano (001), da porzioni con acqua montmorillonitica. Le isole brucitiche, mentre da un lato dànno al reticolo alcuni caratteri delle cloriti, non sono però in numero sufficiente per impedire che il reticolo espanda in modo simile alle smectiti quando venga trattato con glicerina.

Nel minerale di Groppo Maggio il trattamento con NH_4NO_3 ed il riscaldamento a 440° sono particolarmente significativi e conducono ad ammettere che le porzioni espandibili del reticolo differiscono da quelle di una montmorillonite tipica (che già a 100° sposta la 14 Å a 10 Å circa) e sono molto più simili a quelle delle saponiti che cominciano a contrarre il loro reticolo da 14 Å a 9,6 Å solo alla temperatura di 450°.

In altre parole, il nostro minerale ha il suo reticolo caratterizzato da irregolarità strutturali nella zona compresa fra i foglietti micacei, zona che risulterebbe così occupata in parte da gruppi $Mg(OH)_6$ come nelle cloriti, in parte da gruppi di molecole d'acqua legate a Mg^{+2} scambiabile, come nelle vermiculiti o nelle saponiti. Tali irregolarità strutturali darebbero luogo ad un « ibrido » clorite–saponite, e rientrano nel gruppo delle irregolarità descritte da Bradley (1955) per i reticoli dei silicati idrati di magnesio ed indicati da questo autore come tipo III.

ANALISI TERMICA DIFFERENZIALE. – La curva di analisi termica differenziale (fig. 1) è stata ottenuta con l'apparecchio e le cautele indicate in altro lavoro (Gallitelli, 1954). È caratterizzata da tre picchi a 625° a 820° (endotermici) ed a 845° (esotermico), tipici del componente cloritico, associati a quelli della smectite a 150°, 220° e 860°. In particolare il picco a 860° porta a concludere che la smentite a reticolo espandibile del nostro minerale è di tipo saponitico ed è simile, sotto certi aspetti, alla saponite del monte Prinzera descritta da Alietti (1956).

Un tentativo per determinare la quantità relativa dei componenti è stato effettuato registrando: *a*) una curva della clorite pura separata da rocce diabasiche, *b*) una curva della saponite pura di Monte Prinzera, *c*) una miscela di clorite e saponite in parti uguali. Poiché quest'ultima curva (fig. 1) è praticamente identica a quella ottenuta dal minerale in esame, se ne può dedurre che, in questo, le porzioni cloritiche e saponitiche sono verosimilmente nel rapporto 1 : 1.

Composizione chimica. – L'analisi chimica è stata eseguita con i consueti metodi in uso nell'analisi dei silicati su materiale puro separato al microscopio e controllato a forte ingrandimento. Alcali e calcio sono stati dosati anche con uno spettrofotometro di fiamma. I risultati ottenuti sono i seguenti:

SiO_2	36,54
Al_2O_3	12,90
Fe_2O_3	9,94
FeO	1,21
CaO	2,00
MgO	24,90
Na_2O	0,14
K_2O	0,17
H_2O — 110°	3,37
H_2O + 110°	9,54
	100,71

Il potere di scambio, col metodo di Batch, è risultato 46 m. eq/100 gr. Gli ioni scambiabili riconosciuti sul liquido che ha servito per la determinazione sono Na , K , Mg.

Per il calcolo della formula chimica si può partire dalla considerazione che il minerale si comporta come una montmorillonite, in quanto espande completamente con glicerina. Applicando però il metodo di calcolo proposto da Hendricks e Ross per i minerali di questa famiglia, si ottiene una formula che non è accettabile, in quanto contiene 3,53 ioni in posizione ottaedrica, un numero cioè che supera troppo largamente il valore 3 generalmente accettato per questa famiglia di minerali.

Se si prendono invece per base i risultati dell'esame roentgenografico e termico-differenziale e si ammette che nel minerale il foglietto brucitico è sostituito per circa 50 % da aggruppamenti ionici corrispondenti a quelli di una smectite, si può tentare il calcolo della composizione della parte espandibile del nostro minerale.

Occorre in tal caso conoscere a priori la composizione chimica del componente cloritico. Poiché non è stato possibile determinarla direttamente, né è stato possibile separare dai diabasi di Groppo Maggio una clorite sufficientemente pura da sottoporre all'analisi, ho supposto che la parte cloritica avesse una composizione corrispondente alla media delle tre analisi eseguite sulle

cloriti dei diabasi di Toggiano, Rossena e Campotrera che porta alla seguente formula:

$$[Si_{2,83}\,Al_{1,17}]\,[Al_{0,66}\,Fe^{+3}\,Fe^{+2}_{1,45}\,Mg_{3,68}\,Ca_{0,06}]\,O_{10}\,(OH)_8.$$

Considerato poi il minerale formato da parti uguali del componente cloritico e smectitico, ho calcolato dai dati analitici i rapporti atomici riferiti a 57 atomi, cioè alla somma degli atomi presenti complessivamente nelle formule del componente cloritico sopra riportato e della smectite $[Si\,Al]_4\,[Al\,Fe\,Mg]_3\,O_{10}\,(OH)_2$.

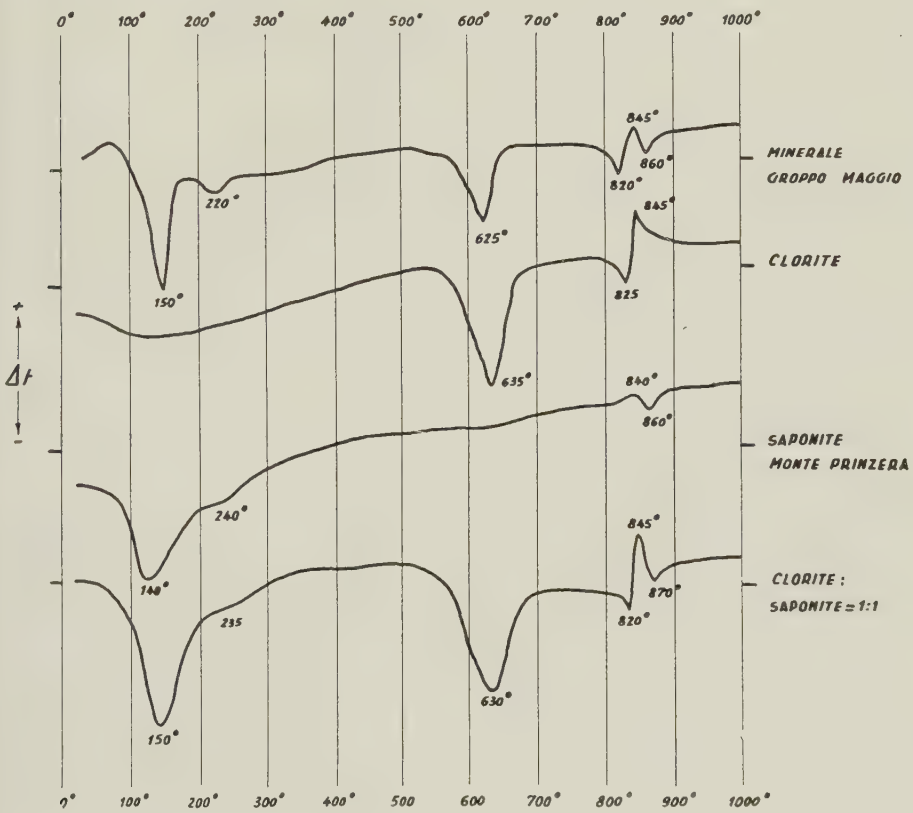


Fig. 1.

Sottraendo dai rapporti atomici, riferiti a 57 atomi, la parte che compete al componente cloritico, restano per l'altro componente quozienti corrispondenti alla formula seguente:

$$[Si_{3,32}\,Al_{0,78}]Mg_{2,46}\,Ca_{0,29}]\,O_{10}\,(OH)_{2,5}$$
$$\downarrow$$
$$Mg+Na+K=0,26$$

che esprime la composizione della parte espandibile del reticolo e corrisponde bene alla formula generalmente ammessa per le saponiti (Caillère, Hénin, 1956).

Giacitura e genesi. – Se ora si considerano le condizioni di genesi del nostro minerale, occorre anzitutto sottolineare il fatto che esso si trova, oltre che in vene, anche in noduli e piccole concentrazioni misto a clorite entro al diabase verde a struttura ofitica manifesta. Questo modo di presentarsi fa escludere che esso derivi dal diabase per alterazione superficiale, ma ne collega la genesi a tutto quel complesso di azioni idrotermali che hanno agito sulla roccia lasciando tracce profonde nelle mineralizzazioni a pirite e calcopirite già ricordate. Tale idrotermalismo si è sviluppato durante l'ultima fase di raffreddamento della roccia diabasica e prima della sua messa in posto entro la formazione delle argille scagliose appenniniche, in quanto non si trova traccia di mineralizzazioni nelle rocce argillose al contatto.

Qualche ulteriore dato sulle condizioni ambiente che avrebbero accompagnato la genesi del nostro minerale si può ricavare, considerando le esperienze di sintesi eseguite in questi ultimi anni da diversi Autori. Caillère (1949), dopo aver ottenuto la trasformazione sperimentale della montmorillonite in clorite in opportuno ambiente chimico, ha realizzato la sintesi di vari termini di queste due famiglie di minerali operando con soluzioni diluitissime ed in ambiente a pH variabile fra 6 e 9 (Caillère, Hénin, 1955, 1957).

Più di recente Mumpton e Roy (1956) hanno definito le condizioni che consentono l'esistenza delle varie fasi cristalline nel sistema $MgO - Al_2O_3 - SiO_2 - H_2O$ giungendo anche a preparare alcuni minerali a strati misti, non per diretta sintesi da geli, ma per parziale trasformazione in situ di strutture a reticolo espandibile in strutture non espandibili. In un ultimo lavoro Romo e Roy (1957) hanno potuto stabilire infine le condizioni nelle quali vermiculiti, cloriti e montmorilloniti si formano l'una dall'altra in ambiente saturo di vapor d'acqua ed a temperature fino a 800° e 2000 atmosfere di pressione. È stato così messo in evidenza che per riscaldamento a 300° ed a 700 atmosfere le intensità dei primi 4 ordini basali (0 0 *l*) della vermiculite vengono modificate ottenendosi, dopo un certo tempo, una serie di intensità corrispondente a quella delle intensità delle cloriti. Un aumento di temperatura oltre i 550° porta alla genesi di un minerale a strati misti clorite–smectite stabile fino a 650° secondo lo schema: vermiculite $\xrightarrow{300^\circ}$ « pseudoclorite » $\xrightarrow{550^\circ}$ strati misti clorite + smectite $\xrightarrow{650^\circ}$ talco + enstatite.

Il risultato di queste richerche che più ci interessa, è rappresentato dalla formazione della « pseudoclorite », che dà spettrogrammi con caratteristiche molto simili a quelle del minerale di Groppo Maggio. Questa pseudoclorite rappresenta un prodotto intermedio originatosi durante il processo idrotermale che porta alla formazione di minerali a strati misti clorite–montmorillonite. Strutturalmente è interpretata come un ibrido clorite–montmorillonite, con strati brucitici incompleti, ed è del tutto simile perciò al minerale di Groppo Maggio.

Da quanto si è andato sin qui esponendo il processo di genesi del minerale di Groppo Maggio può venire così ricostruito, almeno nelle sue linee fondamentali.

In un primo tempo il processo idrotermale, che ha interessato le masse diabasiche, ha provocato l'attacco dei plagioclasi con la formazione di un ambiente alcalino, nel quale è stato facilitato l'attacco ulteriore dei minerali ed in particolare del pirosseno. Questo attacco ha fornito gli elementi costitutivi ed i complessi di gruppi SiO_4 necessari alla formazione dei fillosilicati triottaedrici vermiculite, smectite, clorite. Le condizioni che avrebbero condotto alla formazione di questi minerali, in base alle ricordate esperienze di Caillère e Roy, si possono fissare in una temperatura massima di 300°–400° ed in 700–1300 atmosfere di pressione. Per la formazione del componente a reticolo espandibile (saponite) del minerale ibrido il pH doveva essere compreso fra 8 e 9, mentre che per la clorite sarebbe stato sufficiente un pH 7–7,5. In altre parole si può ammettere che il nostro minerale rappresenti il prodotto formatosi in un ambiente a pH variabile fra 9 e 7. Se si considera poi che le cloriti predominano nella roccia e spesso avvolgono la clorite–smectite, si può affermare che la variazione del pH si è avuta in senso discendente in quanto la clorite rappresenta il prodotto finale della reazione.

In base alle esperienze di Caillère e collaboratori non si può escludere che la genesi del minerale a reticolo espandibile e della clorite possa essere avvenuta da soluzioni diluitissime in presenza di notevoli quantità di sali di Na , K , Ca , che, nel nostro caso, avrebbero potuto derivare dalla demolizione dei plagioclasi.

Al fine di controllare, almeno in parte, l'attendibilità delle considerazioni ora enunciate ho eseguito una serie di esperienze ponendo alcune decine di mgr. del minerale di Groppo Maggio in palloni di vetro neutro in presenza di soluzioni a pH 7, 8, 9 e contenenti per litro mgr. 10 di SiO_2, mgr. 50 di Fe^{+2}, mgr. 8 di Mg (Caillère, Henin, 1955).

Dopo riscaldamento a 70°–80° per la durata di 40 giorni il minerale non ha mostrato variazioni nelle sue proprietà, se tenuto in ambiente a pH 8 e 9, mentre ha mostrato un rinforzo notevole della 7 Å ed una diminuita espandibilità del reticolo per trattamento con glicerina, dopo permanenza in ambiente a pH 7. Queste esperienze confermano in linea di massima le considerazioni sopra riportate, e provano che in ambiente a pH 7 la smectite di Groppo Maggio tende a trasformarsi in clorite.

Si può concludere dunque che:

1° la clorite espandibile a 14 Å di Groppo Maggio è di tipo triottaedrico.

Strutturalmente è caratterizzata dal fatto che i foglietti micacei comprendono fra loro uno strato occupato in parte da gruppi brucitici $Mg(OH)_6$ e in parte da aggruppamenti di molecole d'acqua coordinate intorno a ioni Mg^{+2}. La struttura che ne deriva non è quella di un minerale a strati misti formato dalla regolare alternanza, lungo l'asse *c* della cella, di foglietti cloritici e saponitici, ma è simile alla struttura del minerale osservato da Grim e Johns nei sedimenti del Golfo del Messico, ed a quella della « pseudoclorite » ottenuta per sintesi da Romo e Roy. La clorite espandibile di Groppo Maggio può essere definita come un'« ibrido » clorite–saponite in parti equimolecolari;

2° la clorite espandibile presente in piccoli noduli entro il diabase di Groppo Maggio si è formata in seguito alle azioni idrotermali che hanno interessato questa roccia nell'ultima fase di raffreddamento, e in un ambiente con pH variabile da 9 a 7;

3° il ritrovamento di questo caratteristico minerale conferma la diffusione nelle stesse rocce dei minerali a strati misti già segnalati in miei precedenti lavori, e la possibilità che tali minerali presentino strati brucitici incompleti e rappresentino pertanto termini di transizione in particolari condizioni di ambiente; mette in evidenza la necessità di diagnosi molto accurate quando si vogliono identificare esattamente i minerali delle rocce ofiolitiche appenniniche fino ad ora definiti in modo generico come « cloritici »; e può essere di guida nella risoluzione di alcuni problemi relativi alla mineralogia delle argille appenniniche ed alla determinazione della probabile origine dei minerali in esse contenuti.

Lavori citati nel testo.

Alietti A. (1956), *Su di un minerale di tipo montmorillonitico fra i prodotti di disfacimento di una serpentina*, « Rend. Soc. Min. It. », vol. 12, pp. 31–41.

Bradley W. F. (1955), *Structural irregularities in hydrous magnesium silicates*, « Proc. III Nat. Conf. on Clay », Pubbl. 395, Nat. Ac. Sc. Washington, pp. 94–102.

Brown G. (1955), *Report of the clay minerals group sub-committee on nomenclature of clay minerals*, « Clay Bull. Min. », vol. 2, pp. 294–302.

Caillère S., Hénin S. (1949), *Experimental formation of chlorites from montmorillonitet*, « Min. Mag. », vol. 28, pp. 612–620.

Caillère S., Hénin S. (1955), *Étude chimique des phyylites des minerais de fer sédimentaires*, « Bull. Groupe Franç. des argiles », vol. 6, pp. 23–29.

Caillère S., Hénin S. (1956), *Un problème de nomenclature; les montmorillonites magnesiennes* « Bull. Groupe franç. des argiles », vol. 8, pp. 37–40.

Caillère S., Hénin S., Esquevin J. (1957), *Synthèse des minéraux argileux*, « Bull. Groupe franç. des argiles », vol. 9, pp. 67–76.

Gallitelli P., Cola M., Alietti A. (1954), *Su alcuni problemi legati alla tecnica dell'analisi termica differenziale*. « Mem. Acc. Naz. Lincei », serie VIII, vol. IV, pp. 49–60.

Gallitelli P. (1956), *Sulla presenza di un minerale a strati misti clorite-vermiculite* (« swelling chlorite ») *nei diabasi di Rossena e Campotrera nell'Appennino emiliano*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », vol. 8, pp. 146–154.

Grim R. E., Johns W. D. (1954), *Clay mineral investigation of sediments in the northern Gulf of Mexicò*, « Proc. II Nat. Conf. on Clay », Pubbl. 327, Nat. Ac. Sc. Washington, pp. 81–103.

Merla G. (1932), *Geologia dell'Appennino settentrionale*, « Boll. Soc. Geol. It. », vol. 70, pp. 95–382 (con bibliografia completa dei lavori petrografici sui graniti appenninici).

Mumpton F. A., Roy R. (1956), *The influence of ionic substitution on the hydrothermal stability of montmorillonoids*, « Proc. IV Nat. Conf. on Clay », Pubbl. 456, Nat. Ac. Sc. Washington, pp. 337–339.

Romo L. A., Roy R. (1957), *Weathering studies*. – I. *New data on vermiculite*, « Journal of Geology », vol. 65, pp. 603–610.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Sulla rappresentazione delle funzioni analitiche di più variabili reali.* Nota I di JEAN ELIANU, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

In alcuni lavori [2 , 3 , 4] N. Cioranesco ha studiato il problema della rappresentazione d'una funzione analitica di più variabili reali, regolare nel dominio D, che contiene nell'interno il punto fisso P, con una serie di potenze del quadrato della distanza PM, ove M è un punto variabile in D, i coefficienti di questa serie essendo funzioni armoniche nell'intorno di P. Questo problema, che ne contiene uno di Almansi [1] sulle funzioni poliarmoniche, completato da M. Nicolesco [10] e da M. Picone [13], e che estende anche un risultato di Goursat [8], è stato considerato dall'autore nel caso delle funzioni analitiche di due variabili reali, per quanto riguarda la determinazione dei coefficienti armonici della serie menzionata e le sue applicazioni alla teoria delle equazioni a derivate parziali.

Recentemente, M. Nicolesco ha considerato da un altro punto di vista questo problema [11, 12], utilizzando anche l'analisi funzionale.

Noi riprendiamo qui il teorema di N. Cioranesco, nel caso di un numero qualunque di variabili reali, e diamo un'altra dimostrazione della detta rappresentazione, costruendo effettivamente la serie rappresentativa. La mia dimostrazione utilizza alcuni risultati di Hadamard [9] e miei [5, 6, 7], concernenti la teoria dell'integrazione delle equazioni a derivate parziali iperboliche o poli-iperboliche.

1. – LA FAMIGLIA DI OPERATORI DIFFERENZIALI (Ω).

Consideriamo l'equazione di Laplace

$$\Delta\varphi = 0 \quad , \quad \left(\Delta = \delta^{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta};\ \alpha,\beta = 1,2,\cdots,n\right) \tag{1}$$

ove $\varphi(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ è la funzione incognita, $\delta^{\alpha\beta}$ è l'indice di Kronecker e dove abbiamo utilizzato la convenzione usuale per le sommatorie.

Secondo una idea di Hadamard, che è d'una grande utilità nella teoria dell'integrazione delle equazioni a derivate parziali iperboliche o poli-iperboliche normali [5, 6, 9], noi associeremo all'equazione (1) lo spazio euclideo con la forma metrica

$$ds^2 = \delta_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta.$$

(*) Nella seduta del 10 giugno 1958.

Ricordiamo che le geodetiche di lunghezza nulla di questo spazio, che sono evidentemente rette, sono le bicaratteristiche dell'equazione (1), e che l'equazione del cono caratteristico avente il vertice in $P(a^1, a^2, \cdots, a^n)$, si scrive

$$\Gamma = \delta_{\alpha\beta}(x^\alpha - a^\alpha)(x^\beta - a^\beta) = 0. \tag{2}$$

Introduciamo ora una famiglia (Ω) di operatori differenziali lineari, un operatore qualunque di questa famiglia avendo l'espressione

$$\Omega_i = 2[\Delta(\cdot, \Gamma) + (n + 2i)\cdot], \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots)$$

ove $\Delta(\cdot, \Gamma)$ è l'operatore differenziale di Lamé–Beltrami

$$\Delta(\cdot, \Gamma) = \delta^{\alpha\beta} \frac{\partial \Gamma}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial x^\beta} = 2(x^\alpha - a^\alpha) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \cdot$$

Un calcolo semplice mostra che due operatori qualunque Ω_i, Ω_j della famiglia (Ω) sono permutabili, ma un operatore qualunque Ω_i non è permutabile con l'operatore Δ, perché si ha [7]

$$\Delta\,\Omega_i - \Omega_i\,\Delta = 8\,\Delta\ ^{(1)},$$

ciò che conduce alla conclusione che se φ è una funzione armonica, allora $\Omega_i\varphi$ o più generalmente $\Omega_i\,\Omega_j \cdots \Omega_s\,\varphi$ sono anche funzioni armoniche.

Menzioniamo ancora la formola

$$\Delta(\Gamma^i \cdot) = i\,\Gamma^{i-1}\,\Omega_{i-1} + \Gamma^i\,\Delta, \tag{3}$$

il punto significando una funzione regolare. Per semplicità di scrittura, introduciamo le notazioni

$$E_{k,i} = \Omega_{i-k} \cdots \Omega_{i-2}\,\Omega_{i-1}$$

$$\Phi^j_{k,i} = \Sigma\,\Delta^j\,\Omega_{i\ \ k+j} \cdots \Omega_{i-2}\,\Omega_{i-1},$$

ove la somma che rappresenta $\Phi^j_{k,i}$ $(j = 0, 1, \cdots, k)$ contiene tutti i prodotti simbolici che si possono costruire con gli operatori $\Omega_{i-1}, \Omega_{i-2}, \cdots \cdots, \Omega_{i-k+j}$ applicati nell'ordine descrescente degl'indici e l'operatore Δ, quest'ultimo figurando j volte in ogni prodotto simbolico, talché un operatore Ω di un prodotto simbolico può avere alla sua destra od alla sua sinistra, l'operatore Δ iterato j volte al più. Avremo evidentemente $\Phi^0_{k,i} = E_{k,i}$ e $\Phi^k_{k,i} = \Delta^k$.

Con le notazioni precedenti, abbiamo la formola generale

$$\Delta^k(\Gamma^i \cdot) = \sum_{j=0}^{k} \binom{i}{k-j} \Gamma^{i-k+j}\,\Phi^j_{k,i}, \tag{4}$$

dove $\binom{i}{p} = i(i-1)\cdots(i-p+1)$ e $\binom{i}{0} = 1$. Questa formola si dimo-

(1) La relazione analoga da [7, p. 292] deve essere modificata, ciò che non altera il risultato finale.

stra, per induzione, tenendo conto che per $k = 1$, essa si riduce alla (3) e che si ha [6]

$$\Delta \Phi^{j}_{k,i} + \Omega_{i-k+j} \Phi^{j+1}_{k,i} = \Phi^{j+1}_{k+1,j} \quad (j = 0, 1, \cdots, k-1).$$

Gli operatori della famiglia (Ω) e le formole precedenti ci saranno utili in seguito.

2. – UNA SERIE NOTEVOLE PER LE FUNZIONI ANALITICHE.

Dimostriamo il seguente teorema di N. Cioranesco, da lui considerato nel caso di due variabili indipendenti.

TEOREMA. – *Una funzione analitica* $u(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ *regolare nel dominio* D *che contiene nell'interno il punto fisso* P, *può essere rappresentata in un modo unico con una serie che converge assolutamente e uniformemente nell'intorno di* P

$$u = \varphi_0 + \varphi_1 \Gamma + \cdots + \varphi_k \Gamma^k + \cdots \tag{5}$$

ove Γ *è il primo membro dell'equazione del cono caratteristico con il vertice in* P *e le funzioni* φ_k *sono armoniche e regolari nell'intorno di* P.

Per dimostrare questo teorema, noi procederemo formalmente ed in seguito giustificheremo rigorosamente il procedimento.

Se la serie (5), con le serie dedotte da essa per derivazioni parziali termine a termine, è uniformemente convergente nell'intorno di P, in virtù della relazione (4), avremo necessariamente, su $\Gamma = 0$,

$$\Delta^k u = \Delta^k \varphi_0 + \Phi^{k-1}_{k,1} \varphi_1 + 2! \Phi^{k-2}_{k,2} \varphi_2 + \cdots + k! \Phi^{0}_{k,k} \varphi_k \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{6}$$

Ma poiché le φ_k sono armoniche nell'intorno di P, un'osservazione precedente conduce alla conclusione che tutti i termini della relazione (6) che contengono dei prodotti simbolici applicati alle funzioni φ_k e sono costruiti con gli operatori Ω_i e Δ, o soltanto con Δ, spariscono; si ha cioè $\Delta^k \varphi_0 = 0$ e $\Phi^{k-j}_{k,j} \varphi_j = 0$ $(j = 1, 2, \cdots, k-1)$. Resterà solamente il termine $\Phi^{0}_{k,k} \varphi_k = E_{k,k} \varphi_k$, in modo che sul cono caratteristico $\Gamma = 0$ le funzioni armoniche φ_k devono soddisfare le relazioni

$$\varphi_0 = u, \; E_{1,1} \varphi_1 = \Delta u, \; E_{2,2} \varphi_2 = \frac{1}{2!} \Delta^2 u, \cdots, E_{k,k} \varphi_k = \frac{1}{k!} \Delta^k u, \cdots \tag{7}$$

la prima di queste relazioni essendo conseguenza della (5) e le altre della (6).

La relazione a cui deve soddisfare φ_k si scrive più esplicitamente

$$\Omega_0 \Omega_1 \cdots \Omega_{k-1} \varphi_k = \frac{1}{k!} \Delta^k u,$$

ed essa è una equazione alle derivate parziali lineare d'ordine k. Tenendo conto che [9, 6]

$$\Delta(\cdot, \Gamma) = 2s \frac{d}{ds} \quad , \quad \Omega_i = 2 \left[2s \frac{d}{ds} + (n + 2i) \cdot \right],$$

dove $s = 0$ nel punto P, questa equazione si scrive sulle bicaratteristiche che passano per P, sotto la forma

$$\left(2s\frac{d}{ds} + n\cdot\right)\left(2s\frac{d}{ds} + (n+2)\cdot\right)\cdots\left(2s\frac{d}{ds} + (n+2k-2)\cdot\right)\varphi_k = \frac{1}{2^k k!}\Delta^k u .$$

Abbiamo ottenuto così una equazione differenziale lineare del tipo di Eulero, che si può anche scrivere

$$\frac{d^k}{ds^k}\left(s^{\frac{n}{2}+k-1}\varphi_k\right) = -\frac{1}{4^k k!}s^{\frac{n}{2}-1}\Delta^k u$$

e che s'integra per k quadrature. Poiché abbiamo bisogno d'un integrale dell'equazione precedente, finito e regolare per $s = 0$, si vede che il solo integrale che convenga all'ipotesi iniziale è

$$(8)\qquad \varphi_k^0 = \frac{1}{4^k k!\, s^{\frac{n}{2}+k-1}}\int_0^s\cdots\int_0^s s^{\frac{n}{2}-1}\Delta^k u\, ds\cdots ds, \qquad (k = 1, 2, \cdots),$$

i punti significando che dobbiamo integrare k volte rispetto a s.

La funzione u essendo analitica e regolare in D, se noi supponiamo che $\varphi_k^0\ (k = 1, 2, \cdots)$ ha l'espressione (8), non solo su $\Gamma = 0$, ma in tutto il dominio D, allora φ_k^0 sarà una funzione analitica e regolare rispetto a s, nell'intorno di $s = 0$, e quindi essa sarà una funzione analitica e regolare rispetto alle variabili x^α, nell'intorno di P.

Tenendo conto d'un risultato di Hadamard [5], possiamo ora determinare le funzioni armoniche $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_k, \cdots$, perché conosciamo le funzioni analitiche e regolari $\varphi_0^0 = u, \varphi_1^0, \cdots, \varphi_k^0, \cdots$, che prendono rispettivamente gli stessi valori sul $\Gamma = 0$, come $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_k, \cdots$

Infatti, se noi scriviamo, in generale,

$$(9)\qquad \varphi_k = \varphi_k^0 + \varphi_k^1\Gamma + \cdots + \varphi_k^h\Gamma^h + \cdots \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

le equazioni a derivate parziali che procurano i valori delle funzioni φ_k^h sono state date da Hadamard [9] nel caso in cui $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_k, \cdots$ sono integrali d'una equazione a derivate parziali lineare del secondo ordine e di tipo non parabolico. Esse si scrivono, nel nostro caso, utilizzando gli operatori Ω_i, nella forma

$$\Omega_{h-1}\varphi_k^h + \frac{1}{h}\Delta\varphi_k^{h-1} = 0,$$

e sulle bicaratteristiche che passano per P diventano le equazioni differenziali lineari del primo ordine

$$4s\frac{d\varphi_k^h}{ds} + 2(n+2h-2)\varphi_k^h + \frac{1}{h}\Delta\varphi_k^{h-1} = 0,$$

con soli integrali finiti e regolari per $s = 0$, dati da

$$(10) \qquad \varphi_k^h = \frac{-1}{4h s^{\frac{n}{2}+h-1}} \int_0^s s^{\frac{n}{2}+h-2} \Delta \varphi_k^{h-1} \, ds \,, \qquad \begin{pmatrix} k = 0, 1, 2, \cdots \\ k = 1, 2, 3, \cdots \end{pmatrix}$$

che saranno presi come esprimenti le funzioni φ_k^h in tutto il dominio D.

Le funzioni φ_k^0 essendo analitiche e regolari rispetto alle variabili x^α, nell'intorno di P, risulta, tenendo conto della formola (10), che tutte le funzioni φ_k^h saranno anch'esse analitiche e regolari nell'intorno di P.

I calcoli precedenti pongono in evidenza il fatto che, data la funzione analitica u, si possono costruire univocamente le funzioni φ_k aventi le espressioni (9), ove i coefficienti φ_k^h sono dati dalle formole (8) e (10). Ma, come nel caso della serie di Taylor o della serie di Fourier, dobbiamo dimostrare che la serie (5), costruita partendo dalla funzione u, è assolutamente e uniformemente convergente nell'intorno di P e che, di più, essa rappresenta la funzione u.

Calcolo numerico. — *Un criterio di Routh e sua applicazione al calcolo degli zeri di un polinomio* (*). Nota (**) di ENZO APARO, presentata dal Socio M. PICONE.

1. Diamo notizia di un procedimento recentemente elaborato per la calcolatrice elettronica FINAC, avente come scopo la determinazione delle radici reali o complesse di un polinomio a coefficienti reali. Esso è valido anche nel caso di radici multiple, che fornisce ripetute tante volte quanto è il loro grado di molteplicità.

LEMMA 1. – *Sia dato un polinomio*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_r z^r \ , \quad \text{di grado } r.$$

Posto, per ogni $h \leq r$,

$$2\mu_h = \begin{cases} r - h \text{ per } r \text{ ed } h \text{ entrambi pari o dispari,} \\ r - h - 1 \text{ nell'altro caso,} \end{cases}$$

e introdotti i polinomi

$$g_0(z) = \frac{1}{2} f(z) + \frac{1}{2} f(-z) = \alpha_{00} + \alpha_{10} z^2 + \cdots + \alpha_{\mu_0, 0} z^{2\mu_0}$$

$$g_1(z) = \frac{1}{2z} f(z) - \frac{1}{2z} f(-z) = \alpha_{01} + \alpha_{11} z^2 + \cdots + \alpha_{\mu_1, 1} z^{2\mu_1},$$

definiamo, in modo ricorrente,

$$\alpha_{ij} = 0, \qquad \text{per } i > \mu_i,$$

$$\alpha_{ij} = -\begin{vmatrix} \alpha_{0,j-2} & \alpha_{i+1,j-2} \\ \alpha_{0,j-1} & \alpha_{i+1,j-1} \end{vmatrix} \quad \text{per } j \geq 2.$$

Se risulta, per un $\nu \leq r$,

$$\alpha_{0j} \neq 0 \qquad (j = 0, 1, \cdots, \nu)$$

$$\alpha_{i,\nu+1} = 0 \qquad (i = 0, 1, \cdots, \mu_{\nu+1}),$$

il polinomio $g_\nu(z) = \sum_{i=0}^{\mu_\nu} \alpha_{i\nu} z^{2i}$

è un massimo comune divisore di $g_0(z)$ *e* $g_1(z)$, *e quindi un divisore di* $f(z)$.

Dim.: Vale l'identità, come subito si verifica,

$$\alpha_{0j} g_{j-1}(z) - \alpha_{0,j-1} g_j(z) = z^2 g_{j+1}(z) \quad (j = 1, 2, \cdots, \nu) \tag{1}$$

con

$$g_j(z) = \sum_{i=0}^{\mu_j} \alpha_{ij} z^{2i} \qquad (j = 0, 1, \cdots, \nu + 1).$$

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, Roma.

(**) Pervenuta all'Accademia il 5 luglio 1958.

Per ipotesi è $\alpha_{oj} \neq 0\ (j = 0, 1, \cdots, \nu)$, quindi $g_j(0) \neq 0\ (j = 0, 1, \cdots, \nu)$. Di qui, e per la (1), ogni divisore comune a $g_0(z)$ e $g_1(z)$, essendo primo con z^2, è divisore di $g_2(z)$, e successivamente di $g_3(z), \cdots$, di $g_\nu(z)$. Viceversa, essendo $g_{\nu+1}(z) \equiv 0, g_\nu(z)$ divide $g_{\nu-1}(z)$, quindi $g_{\nu-2}(z), \cdots, g_1(z), g_0(z)$.

Def.: Il polinomio $f(z)$ è detto *di Hurwitz*, se, posto $z = x + iy$, le sue radici sono tutte nel semipiano $x < 0$.

Il polinomio $f(z)$ si dirà *quasi di Hurwitz*, se tutte le sue radici sono nel semipiano $x \leq 0$.

LEMMA 2 (di Routh). – *Il polinomio $f(z)$, di grado r, a coefficienti reali, è di Hurwitz se e solo se risulta, con le notazioni del lemma 1, $\alpha_{oj} > 0$ $(j = 0, 1, \cdots, r)$* [1].

Dimostriamo ora il seguente

TEOREMA. – *Sia $F(z)$ un polinomo di grado n, a coefficienti reali, quasi di Hurwitz, e risulti $F(z) = f(z)\,p(z)$, con $f(z)$ di Hurwitz e $p(z)$ polinomio avente tutte le sue radici immaginarie pure, di grado $2s$.*

Posto, per ogni $h \leq n$,

$$2m_h = \begin{cases} n - h & \text{per } n \text{ ed } h \text{ entrambi pari o dispari,} \\ n - h - 1, & \text{nell'altro caso,} \end{cases}$$

e inoltre

$$G_0(z) = \frac{1}{2} F(z) + \frac{1}{2} F(-z) = \sum_{i=0}^{m_0} \beta_{i0} z^{2i},$$

$$G_1(z) = \frac{1}{2z} F(z) - \frac{1}{2z} F(-z) = \sum_{i=0}^{m_1} \beta_{i1} z^{2i},$$

$$(2) \qquad \begin{cases} \beta_{ij} = 0, & \text{per } i > m_i, \\ \beta_{ij} = -\begin{vmatrix} \beta_{0,j-2} & \beta_{i+1,j-2} \\ \beta_{0,j-1} & \beta_{i+1,j-1} \end{vmatrix} & \text{per } j \geq 2, \end{cases}$$

si ha

$$\beta_{0j} > 0\ (j = 0, 1, \cdots, r), \quad \text{con } r = n - 2s,$$

$$\beta_{i,r+1} = 0\ (i = 0, 1, \cdots, m_{r+1})$$

e $\sum_{i=0}^{m_r} \beta_{ir} z^{2i} = cp(z)$, *con c costante.*

Dim.: è per ipotesi $p(z) = p(-z)$, onde, con le notazioni del lemma 1,

$$G_0(z) = p(z)\, g_0(z),$$

$$G_1(z) = p(z)\, g_1(z),$$

(1) Per la dimostrazione cfr. ROUTH, *A treatise on rigid dynamics*, London, 1894; FICHERA, *Alcune osservazioni sulle condizioni di stabilità per le equazioni algebriche a coefficienti reali*, « Boll. Un. Mat. It. », III, 2, pp. 103–109 (1947); PICONE–FICHERA, *Trattato di Analisi Matematica*, II, p. 140 (Tumminelli, Roma, 1955).

e di qui, avendosi $p_0 = p(0) > 0$, segue

$$\beta_{00} = p_0 \alpha_{00} > 0$$
$$\beta_{01} = p_0 \alpha_{01} > 0,$$

per il lemma di Routh, applicato a $f(z)$.

Posto $G_2(z) = \sum_{i=0}^{m_2} \beta_{i2} z^{2i}$, risulta

$$z^2 G_2(z) = \beta_{01} G_0(z) - \beta_{00} G_1(z),$$

da cui si ricava

$$(3) \qquad \begin{cases} G_2(z) = p_0 \cdot p(z) g_2(z) \\ \beta_{02} = p_0^2 \alpha_{02} > 0. \end{cases}$$

Supponiamo di aver dimostrato la validità delle relazioni

$$(4) \qquad \begin{cases} G_j(z) = p_0^{l_j - 1} p(z) g_j(z) \\ \beta_{0j} = p_0^{l_j} \alpha_{0j} > 0 \end{cases} \qquad (j = 0, 1, \cdots, k), k < r,$$

con i numeri l_j (numeri di Fibonacci) definiti da

$$l_0 = 1,$$
$$l_1 = 1,$$
$$l_{j+1} = l_j + l_{j-1} \qquad (j = 1, 2, \cdots)$$

e

$$G_j(z) = \sum_{i=0}^{m_j} \beta_{ij} z^{2i};$$

segue allora per le (2), (3) e (4), e posto

$$G_{k+1}(z) = \sum_{i=0}^{m_{k+1}} \beta_{i,k+1} z^{2i},$$

che

$$z^2 G_{k+1}(z) = \beta_{0k} G_{k-1}(z) - \beta_{0,k-1} G_k(z) =$$
$$= p_0^{l_k + l_{k-1} - 1} p(z) [\alpha_{0k} g_{k-1}(z) - \alpha_{0,k-1} g_k(z)],$$

onde

$$G_{k+1}(z) = p_0^{l_{k+1} - 1} p(z) g_{k+1}(z),$$
$$\beta_{0,k+1} = p_0^{l_{k+1}} \alpha_{0,k+1} > 0,$$

applicando ancora, per quest'ultima disuguaglianza, il lemma di Routh.

Si è così dimostrato, riducendosi le (4) alle (3) per $j = 2$, che le (4) valgono per ogni indice $j \leq r$.

Per $j = r + 1$ vale ancora la relazione

$$G_{r+1}(z) = p_0^{l_{r+1} - 1} p(z) g_{r+1}(z),$$

con $g_{r+1}(z)$ identicamente nullo.

Avendosi

$$\beta_{0j} \neq 0 \qquad (j = 0, 1, \cdots, r)$$

$$\beta_{i,r+1} = 0 \qquad (i = 0, 1, \cdots, m_{r+1})$$

il polinomio $G_r(z) = \sum_{i=0}^{m_r} \beta_{ir} z^{2i}$ risulta un m.c.d. $(G_0(z), G_1(z))$ e quindi un divisore di $F(z)$.

Tale polinomio non si annulla per $z = 0$ e possiede soltanto radici immaginarie pure, poiché in caso contrario, essendo $G_r(z) = G_r(-z)$, il polinomio $F(z)$ non sarebbe quasi di Hurwitz. Ne segue $G_r(z) = c\varphi(z)$, con c costante $\neq 0$.

2. Introduciamo, per un polinomio $F(z)$ a coefficienti reali, la funzione così definita:

$$\chi(F, h) = \begin{cases} 1, & \text{se } F(z+h) \text{ è di Hurwitz,} \\ -1, & \text{nell'altro caso.} \end{cases}$$

Evidentemente, se $\chi(F, h) = 1$, risulta $\chi(F, h) = 1$ per $h > \bar{h}$,
se $\chi(F, h) = -1$, risulta $\chi(F, h) = -1$ per $h < \bar{h}$.

Il calcolo di $\chi(F, h)$ si effettua, nel modo più semplice:

1° determinando i coefficienti di $F(z+h)$ mediante lo schema di Horner;

2° costruendo, a partire dai coefficienti di $F(z+h)$, i numeri β_{ij} considerati nel teorema precedente, sino ad incontrare un primo numero β_{0k} nullo o negativo. È $\chi(F, h) = 1$ o -1 a seconda che k sia maggiore o no del grado di $F(z+h)$.

Fissati due numeri interi ν, τ, con $\nu > \tau$ [2], calcoliamo $\chi(F, h)$ a partire da $h = 0$, col passo di -2^ν o 2^ν a seconda che $F(z)$ sia o no di Hurwitz arrestandosi appena $\chi(F, h)$ cambia segno.

Siano h_1 e h_2 due multipli consecutivi di 2^ν con $h_1 < h_2$, per cui si abbia $\chi(F, h_1) \cdot \chi(F, h_2) < 0$. Nella striscia del piano complesso $h_1 \leq x \leq h_2$ cadono radici di $F(z)$. Si ripete il calcolo di $\chi(F, h)$ con passo $2^{\nu-1}$ nell'intervallo (h_1, h_2) e così via, sino a trovare un intervallo $(\bar{h}_1, \bar{h}_2)$, con $\bar{h}_2 - \bar{h}_1 < 2^\tau$, e $\chi(F, \bar{h}_1) \cdot \chi(F, \bar{h}_2) < 0$.

Posto $2\bar{h} = h_1 + h_2$, il valore $\bar{h}$ approssima, a meno di 2^τ, la massima fra le radici reali, o la massima fra le parti reali di una o più coppie di radici complesse coniugate di $F(z)$. Nel seguito tratteremo $\bar{h}$ come esatto.

Se il termine noto di $F(z+\bar{h})$ risulta $= 0$, si divide $F(z)$ per $z - \bar{h}$ e si ripete il procedimento descritto, sul nuovo polinomio. Ciò consente il calcolo di tutte le radici di $F(z)$, se $F(z)$ ha soltanto radici reali.

Se invece $\bar{h}$ è la parte reale di due o più radici complesse, si percorra la successione $\beta_{00}, \beta_{01}, \cdots$ relativa a $F(z+h)$, sino ad incontrare un primo

(2) Nel programma compilato per la FINAC si è assunto $\tau = -36$.

numero $\beta_{0,r+1}$ nullo. Essendo $F(z+\bar{h})$ quasi di Hurwitz, il polinomio $\sum_{i=0}^{m_r} \beta_{ir} z^{2i}$ ha come radici tutte e sole le radici immaginarie pure di $F(z+\bar{h})$ e quindi il polinomio $\sum_{i=0}^{m_r} (-1)^i \beta_{ir} y^{2i}$ ha come sue radici, tutte reali, i coefficienti dell'immaginario delle radici di $F(z)$ situate sulla retta $x = \bar{h}$. Al loro calcolo provvede il procedimento già esposto.

Dette $\pm \gamma_1, \pm \gamma_2, \cdots$ tali radici, si divide $F(z)$ per $(z^2 - 2\bar{h}z + \bar{h}^2 + \gamma_1^2) \cdot (z^2 - 2\bar{h}z + \bar{h}^2 + \gamma_2^2) \cdots$ e si prende in considerazione il nuovo polinomio così ottenuto.

Si è mostrata l'applicazione del procedimento qui descritto nell'occasione di un colloquio su questioni di Analisi numerica recentemente organizzato dal Centro Internazionale di Calcolo. Le radici (una reale e 12 complesse) dell'equazione $x^{13} - x^2 - x - 1 = 0$, considerata da Gumbel e Ostrowski [3] e citata da Peltier [4], sono state calcolate in circa 10 minuti, con 9 decimali esatti.

(3) Ostrowski, *Recherches sur la méthode de Graeffe* ..., «Acta Math.», 72, p 251, (1940).

(4) Peltier, *Résolution numérique des équations algebriques*, Gauthier-Villars. Paris (1955).

Analisi matematica. — *Un problema isoperimetrico per la determinazione della forma di una nave* (*). Nota (**) di CARLO PUCCI, presentata dal Socio M. PICONE.

In una Memoria con questo titolo, pubblicata negli « Atti della Accademia dei Lincei » (1), è stata considerata la ricerca del dominio con frontiera di area minima fra i domini dello spazio ordinario aventi un piano verticale di simmetria, sezioni orizzontali simili ad un dominio piano prescritto, volume assegnato e frontiere dotate di una rappresentazione parametrica sufficientemente regolare (2).

Mi è stato osservato che al termine della dimostrazione dell'esistenza del dominio minimante vi sono due imprecisioni; è quasi immediato come esse possono in vari modi essere corrette sulla base dei precedenti risultati, purtuttavia per completezza riporto in questa Nota le correzioni opportune. Seguo le notazioni e le numerazioni delle formule della Memoria considerata.

La (139) sia così modificata

$$(139) \qquad \alpha_q(z) = \int_0^z \vartheta\,[\delta_q'(t)]\,dt, \qquad 0 \leq z \leq h,$$

e si sopprima la (141). Risultano valide le successive considerazioni fino a p. 205 rigo sesto dal basso. Da tale punto fino al termine del paragrafo III, *b*) il testo della Memoria deve essere modificato nel seguente modo.

La successione $\{h_q\}$ converge ad h ed il volume V_q di $\mathfrak{D}_q$ converge per $q \to \infty$ al volume V di D. Indichiamo con I_N l'insieme dei punti di $(0, h)$ per i quali $\delta'(z) \leq N$. Si ha

$$|\,\delta'(z) - \delta_q'(z)\,| \leq \frac{1}{q} \qquad \text{per} \quad q > N,\ z \in I_N,$$

e quindi la successione $\{\delta_q'(z)\}$ converge uniformemente a $\delta'(z)$ e $\{\alpha_q'(z)\}$ a $\vartheta\,[\delta'(z)]$ in I_N. Per la definizione di ϑ

$$\int_0^L \sqrt{1 + [\delta'(z)\,\varphi(s) - \alpha'(z)\,\mu'(s)]^2}\,ds \geq \int_0^L \sqrt{1 + [\delta'(z)\,\varphi(s) - \vartheta\,[\delta'(z)]\,\mu'(s)]^2}\,ds,$$

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Pervenuta all'Accademia il 18 luglio 1958.

(1) « Memorie Sc. fisiche », serie 8ª, vol. 4, 177–218 (1955).

(2) A tali frontiere si può dare una rappresentazione parametrica dipendente, oltre che dai dati del problema, da due funzioni $\alpha(z)$, $\delta(z)$ della variabile reale z che sono supposte assolutamente continue.

e pertanto essendo $\{\delta_q\}$ uniformemente convergente a δ in $(-h, h)$, indicato con S_q e S l'area di $\mathfrak{F}\mathfrak{D}_q$ e $\mathfrak{F}D$, risulta

$$\lim_{q\to\infty}{}' (S_q - S) \leq \lim_{q\to\infty}{}' \, 2 \int_{(o,h_q)-I_N} \delta_q(z)\, dz \int_o^L \sqrt{1 + [\delta_q'(z)\,\varphi(s) - \alpha_q'(z)\,\mu'(s)]^2}\, ds .$$

Tale limite è una funzione di N che per la (25) e l'assoluta continuità di δ risulta arbitrariamente piccola per N sufficientemente grande e quindi

$$\lim_{q\to\infty}{}' S_q \leq S .$$

Pertanto si ha, riportando dalla Memoria considerata, che dalla convergenza di $\{V_q\}$ a V segue

$$\lim_{q\to\infty}{}' F[\mathfrak{D}_q] \leq F[D],$$

e per la (142) è provato che $F[D_o] \leq F[D]$. Essendo D un qualsiasi dominio della classe Γ', il dominio D_o minimizza il funzionale F in Γ.

Geometria. — *Campi basici e trasformazioni affini.* Nota (*) di IDA CATTANEO GASPARINI, presentata dal Socio E. BOMPIANI.

La nozione di campo basico recentemente introdotta nello studio delle connessioni lineari [9] [10], viene qui estesa sulla base di precedenti lavori [2] [3] al caso di una varietà munita di connessione affine π nel senso più generale. A questo scopo è dedicato il n. 1. Nel n. 2 si dimostra che valgono anche per i campi basici secondo una connessione affine π alcune proprietà dei campi basici secondo una connessione lineare ω: in particolare si dimostra che ogni arco di geodetica di una varietà V_n a connessione affine è la proiezione su V_n di una traiettoria di campi di vettori basici e viceversa; inoltre una varietà V_n è completa per una connessione affine allora e solo allora che ogni campo basico di $\mathfrak{E}(V_n)$, spazio fibrato dei riferimenti affini, definisce un gruppo a 1 parametro di trasformazioni globali di $\mathfrak{E}(V_n)$. Nel n. 4 si considerano le trasformazioni di V_n che lasciano invariata la connessione affine π: esse, si dimostra, lasciano invariati i campi basici di $\mathfrak{E}(V_n)$.

È noto da un teorema di Kobayaschi [7] che se una connessione lineare è completa ogni trasformazione infinitesima ω–invariante definisce un gruppo a un parametro di trasformazioni globali di V_n; questo teorema viene esteso al caso di una connessione affine completa.

Nel n. 5 infine si studia la relazione che passa tra i campi basici secondo π e secondo la connessione lineare associata ω. Gli uni sono trasformati degli altri mediante l'omomorfismo f di $\mathfrak{E}(V_n)$ in $E(V_n)$, spazio fibrato dei riferimenti lineari e mediante un operatore $\overline{\Phi}$ che agisce sui sottospazi orizzontali secondo ω.

1. DEFINIZIONE DI CAMPO BASICO SECONDO UNA CONNESSIONE AFFINE π. – Sia V_n una varietà differenziabile di classe C^∞, T_x lo spazio vettoriale tangente nel punto $x \in V_n$, $\mathfrak{T}_x$ lo spazio affine tangente nello stesso punto, $\vec{\xi}$ un vettore di T_x, R un riferimento di T_x e $S_x = (\vec{\xi}, R)$ un riferimento affine.

Sia $\mathfrak{E}(V_n)$ lo spazio fibrato dei riferimenti affini e p la proiezione che ad ogni riferimento affine nel punto $x \in V_n$ fa corrispondere x. Indichiamo poi con $E(V_n)$ lo spazio fibrato dei riferimenti lineari e con p' la proiezione che ad ogni riferimento lineare nel punto $x \in V_n$ fa corrispondere x.

Ogni fibra di $E(V_n)$ può considerarsi, in modo naturale come sotto varietà della fibra corrispondente di $\mathfrak{E}(V_n)$ considerando l'iniezione j che identifica ogni riferimento lineare R nel punto x con il riferimento affine individuato dal vettore $\vec{\xi} = 0$ e R.

(*) Pervenuta all'Accademia il 25 giugno 1958.

Se S e S′ sono due riferimenti affini $S = (\vec{\xi}, R)$ e $S' = (\vec{\xi}', R')$ la matrice $(n+1) \times (n+1)$ del tipo

$$B = \begin{pmatrix} 1 & v^\alpha \\ 0 & A^\alpha_{\beta'} \end{pmatrix} \quad \text{(indici greci variabili da 1 a } n)$$

ove v^α sono le componenti del vettore $\vec{\xi}' - \vec{\xi}$ nel riferimento R, è tale che

$$S' = SB$$

Le matrici del tipo B definiscono un gruppo isomorfo al gruppo affine $\bar{G}$ dello spazio di dimensione n che noi identificheremo a $\bar{G}$.

Sarà utile per il seguito considerare l'omorfismo differenziabile f di classe C^∞ che all'elemento $B \in \bar{G}$ fa corrispondere l'elemento $B' \in \bar{G}$ definito da

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A^\alpha_{\beta'} \end{pmatrix}.$$

Le matrici del tipo B′ formano un gruppo isomorfo al gruppo lineare G dello spazio di dimensione n e potremo così scrivere

$$(1\text{–}1) \qquad f: \qquad \bar{G} \longrightarrow G$$

L'omomorfismo f induce in modo naturale un omomorfismo di $\mathcal{E}(V_n)$ in $E(V_n)$

$$(1\text{–}2) \qquad f: \qquad \mathcal{E}(V_n) \longrightarrow E(V_n)$$

che al punto $z \in \mathcal{E}(V_n)$ fa corrispondere il punto $z' \in E(V_n)$ rappresentante il riferimento lineare associato.

Più brevemente si può dire che $\mathcal{E}(V_n)$ può considerarsi come il prodotto $E(V_n) \times R^n$, R^n essendo lo spazio numerico a n variabili reali; f rappresenta allora la proiezione canonica di $\mathcal{E}(V_n) \to E(V_n)$.

Consideriamo il punto $z' = jz$; il riferimento lineare rappresentato da z' definisce un isomorfismo, che noi indicheremo ancora con z', dello spazio R^n nello spazio vettoriale tangente $T_{p'z'}$.

$$z': \qquad R^n \longrightarrow T_{p'z'}$$

mentre il riferimento affine individuato dal punto z definisce un isomorfismo dello spazio R^n, considerato come spazio affine, nello spazio affine tangente $\mathcal{T}_{pz}$

$$z: \qquad R^n \longrightarrow \mathcal{T}_{pz};$$

il punto dello spazio affine tangente $\mathcal{T}_{pz}$ corrispondente del punto $w \in R^n$ mediante questo isomorfismo è l'estremo libero del vettore $\vec{\xi} + z'w$ con $z' = fz$.

Data una V_n dotata di connessione lineare, se w è un elemento di R^n, ω la forma di connessione su $E(V_n)$, si chiama campo di vettori basico associato a w secondo la connessione lineare ω [9] [10], il campo di vettori Y′ definito dalle condizioni

$$(1\text{–}3) \qquad \omega(Y'_{z'}) = 0 \qquad \theta(Y'_{z'}) = w$$

con $z' \in E(V_n)$. θ essendo la 1–forma su $E(V_n)$ a valori in R^n definita da

$$\theta(Y_{z'}) = z^{-1} p' Y_{z'} . \tag{1-4}$$

Sia π una forma di connessione su $\mathcal{E}(V_n)$ che definisce una connessione affine su V_n. La connessione affine è individuata [2] da una forma di connessione su $E(V_n)$ a valori nell'algebra di Lie del gruppo lineare e da una 1–forma su $E(V_n)$ a valori in R^n. A questa forma è canonicamente associato un operatore lineare Φ. Se la connessione affine è *regolare* (vedi [3]) si indicherà con Ψ l'operatore inverso di Φ e con Φ^{α}_{β} e Ψ^{α}_{β} i tensori rispettivamente associati a Φ e a Ψ.

Introduciamo su $\mathcal{E}(V_n)$ la 1–forma φ a valori nello spazio R^n e tale che per ogni punto $z \in \mathcal{E}(V_n)$ e per ogni vettore Y_z tangente a $\mathcal{E}(V_n)$ si abbia

$$\varphi_z(Y_z) = z^{-1} \Phi p Y_z \tag{1-5}$$

z^{-1} essendo l'isomorfismo inverso dell'isomorfismo definito dal punto $z' = fz$.

Fissato un elemento w di R^n, definisco come campo basico associato a w secondo la connessione affine π il campo di vettori Y tangente a $\mathcal{E}(V_n)$ e definito univocamente dalle condizioni seguenti in z

$$\pi(Y_z) = 0 \qquad \varphi(Y_z) = w . \tag{1-6}$$

Questo campo gode della proprietà importante di non annullarsi mai se $w \neq 0$. Se si annullasse in un punto z si avrebbe infatti

$$\varphi(Y_z) = z^{-1} \Phi p Y_z = 0 ,$$

ma dato che $\varphi(Y) = w$, $w = 0$.

Mediante considerazioni identiche a quelle per i campi basici associati a una connessione lineare, si può dire che ogni combinazione lineare a coefficienti costanti $c_1, c_2, \cdots$ di campi basici è naturalmente un campo basico; infatti se Y e X sono due campi basici associati a w_1, e w_2, $c_1 Y + c_2 X$ è un vettore ancora orizzontale, cioè $\pi(c_1 Y + c_2 X) = 0$ e inoltre $\varphi(c_1 Y + c_2 X) = c_1 w_1 + c_2 w_2$. Il campo di vettori $c_1 Y + c_2 X$ è allora il campo basico associato all'elemento $c_1 w_1 + c_2 w_2$ di R^n.

Da quanto precede è immediato che se $w_1 w_2 w_3, \cdots, w_n$, sono una base di R^n gli n campi basici Y_α corrispondenti sono dappertutto linearmente indipendenti. Infatti la relazione $\sum_1^n{}_\alpha c_\alpha Y_\alpha = 0$ con le c_α non tutte nulle porterebbe $\sum_1^n{}_\alpha c_\alpha w_\alpha = 0$ con gli stessi valori di c_α e le w_α non sarebbero indipendenti.

Se si considerano $n(n+1)$ elementi dell'algebra di Lie del gruppo affine, che costituiscano una base di questa algebra, e i campi di vettori verticali generati da questi elementi, gli n campi orizzontali basici associati a $w_1 w_2, \cdots, w_n$ e gli $n(n+1)$ campi verticali (i vettori del primo gruppo

essendo indipendenti dai vettori del secondo gruppo, gli uni essendo orizzontali e gli altri verticali) costituiscono un campo di riferimento di $\mathcal{E}(V_n)$. La conoscenza della connessione π e la definizione di campo basico permette così di definire un parallelismo su $\mathcal{E}(V_n)$.

2. Traiettoria di campo basico e geodetiche di V_n. – In una Nota precedente [3] ho dimostrato che se si definiscono come geodetiche di V_n secondo una connessione affine le curve $x(t)$ di V_n che nello spazio affine tangente si sviluppano in rette, si trova che esse soddisfano all'equazione

$$\frac{\overset{\omega}{\nabla}}{dt}\left(\frac{\overset{\pi}{\nabla} x}{dt}\right) = \lambda(t)\frac{\overset{\pi}{\nabla} x}{dt} \tag{2-1}$$

x essendo un campo di punti dello spazio affine tangente definito da $\vec{\xi} = -\vec{w}$, $\vec{w} = z' w$ e

$$\frac{\overset{\pi}{\nabla} x^\alpha}{dt} = \Phi^\alpha_\beta v^\beta \tag{2-2}$$

essendo le componenti del vettore differenziale assoluto secondo la connessione affine π di questo campo di punti, $\vec{v}$ infine essendo il vettore « velocità » associato al cammino $x(t)$.

Riferita a un parametro affine s la (2-1) può scriversi

$$\frac{\overset{\omega}{\nabla}}{ds}\left(\frac{\overset{\pi}{\nabla} x}{ds}\right) = 0. \tag{2-3}$$

Sia $x(t)$ un cammino di V_n di origine $x_0 = x(0)$ e $z(t)$ il cammino di $\mathcal{E}(V_n)$ orizzontale per π su $x(t)$ e di origine $z_0 = z(0)$. Questo cammino $z(t)$ fa corrispondere al riferimento affine S_0 rappresentato dal punto $z_0 = z(0)$ il riferimento affine S_t rappresentato dal punto $z = z(t)$. Definisce quindi un isomorfismo dello spazio affine $\mathcal{C}_{x_0}$ tangente in x_0 sullo spazio affine $\mathcal{C}_{x(t)}$ tangente in $x(t)$ che noi indicheremo con $\tau(x(t))$. Esso induce un trasporto che indicheremo ancora con $\tau(x(t))$ dello spazio vettoriale T_{x_0} tangente in x_0 sullo spazio vettoriale $T_{x(t)}$ tangente in $x(t)$. È comodo esprimere questo isomorfismo $\tau(x(t))$ tra gli spazi tangenti [9] come il prodotto dell'isomorfismo $z'(t)$ e dell'inverso dell'isomorfismo $z'(0)$, precisamente

$$\tau(x(t)) = z'(t)\, z'^{-1}(0). \tag{2-4}$$

Se in particolare $x(t)$ è un arco di geodetica $x(s)$ riferito al parametro affine s, la (2-2) e la (2-3) dànno

$$[\Phi \vec{v}]_{x(s)} = \tau(x(s))\,[\Phi \vec{v}]_{x(0)}$$

cioè

$$[\Phi \vec{v}]_{x(s)} = z'(s)\, z'^{-1}(0)\,[\Phi \vec{v}]_{x(0)}.$$

Poniamo

$$z'^{-1}(0)\,[\Phi\vec{v}]_0 = w\,;$$

se $Y_{z(s)}$ è il vettore orizzontale di $\mathfrak{E}(V_n)$ tangente al cammino orizzontale $z(s)$ su $x(s)$ nel punto di parametro s, si ha

$$\begin{aligned}\varphi(Y_{z(s)}) &= z'^{-1}(s)\,\Phi p\,Y_{z(s)}\\ &= z'^{-1}(s)\,\Phi\vec{v} = z'^{-1}(0)\,[\Phi\vec{v}]_{x(0)} = w;\end{aligned}$$

poiché $Y_{z(s)}$ è in ogni punto di $z(s)$ orizzontale e $\varphi(Y_{z(s)}) = w$, esso appartiene al campo basico associato a w e $z(s)$ ne è la traiettoria. Reciprocamente sia $z(s)$ una traiettoria di campo basico d'origine $z_0 = z(0)$, $x(s)$ la sua proiezione su V_n e $\vec{v}(s)$ il vettore tangente a $x(s)$ nel punto di parametro s; si ha allora

$$z'^{-1}(s)\,\Phi p\,Y_{z(s)} = w = z'^{-1}(0)\,\Phi p\,Y_{z(0)}$$

$$[\Phi\vec{v}]_{x(s)} = z'(s)\,z'^{-1}(0)\,[\Phi\vec{v}]_{x(0)}$$

poiché $[\Phi\vec{v}]_{x(s)}$ si deduce per trasporto di $[\Phi\vec{v}]_{x(0)}$ lungo $x(s)$ si può concludere che $x(s)$ è un arco di geodetica di V_n per la connessione affine π riferita al paramentro affine s. Si ha così il

TEOREMA. – *Ogni arco geodetico di una varietà* V_n *a connessione affine è la proiezione su* V_n *di una traiettoria di campo di vettori basici. Reciprocamente la proiezione di ogni traiettoria di campo basico è un arco di geodetica di* V_n.

Questo teorema ci permette di estendere alle varietà a connessione affine i teoremi sulle connessioni complete che sono stati dati per le V_n a connessione lineare [7] [9] [10].

Si dice *completa* una connessione affine se ogni geodetica $x(s)$ può essere estesa per valori infinitamente grandi del suo parametro s [6] [7].

3. GRUPPI LOCALI E GLOBALI DI TRASFORMAZIONI DI V_n. – Su di una varietà differenziabile V_n ogni campo di vettori $\vec{u}$, genera un gruppo locale a un parametro di trasformazioni locali di V_n T_t per integrazione del sistema differenziale

$$\frac{dx(t)}{dt} = \vec{u}_{x(t)}$$

a partire dalle condizioni iniziali $x(0) = x$.

Diciamo che T_t $(t \in R)$ definisce un gruppo locale di trasformazioni locali di V_n se per ogni $y \in V_n$ esiste un intorno $U(y)$ del punto y e un numero positivo $\varepsilon(y)$ tale che:

1° per ogni valore del parametro t tale che $|t| < \varepsilon$ e per ogni $x \in U(y)$ sia definito il punto $T_t x \in V_n$;

2° il punto $T_t x \in V_n$ dipende differenziabilmente da t e da x;

3° se per i valori t e t' del parametro tali che $|t| < \varepsilon$, $|t'| < \varepsilon$ $|t + t'| < \varepsilon$ e per i punti $x \in U$ si ha $T_t x \in U$ allora $T_{t'} T_t x = T_{t+t'} x$.

Generalmente ε dipende da y; se si può scegliere ε indipendente da y allora $T_t x$ è definito per ogni x in V_n e $|t| < \infty$ cioè T_t definisce un gruppo a un parametro globale di trasformazioni di V_n. Se il campo vettoriale $\vec{u}$ genera un gruppo globale di trasformazioni di V_n, il campo $\vec{u}$ si dice completo. Se la varietà è compatta ogni campo di vettori è completo.

Si indicherà sovente le trasformazioni generate dal campo di vettori $\vec{u}$, t essendo il parametro, con $\exp(t\vec{u})$.

In [9] [10] si dimostra che affinché una connessione lineare sia completa occorre e basta che ogni campo basico Y di $E(V_n)$ sia completo.

Questo teorema è valido anche per le connessioni affini; la dimostrazione è pressocché la stessa, ma la daremo ugualmente per maggiore chiarezza sull'argomento. Supponiamo che π sia completa e sia Y il campo basico di $\mathfrak{E}(V_n)$ associato all'elemento $w \in R^n$. Sia z_0 un punto arbitrario di $\mathfrak{E}(V_n)$, l'arco geodetico di V_n condotto dal punto $x_0 = pz_0$ e tangente a $\Phi \vec{u} = z_0' w$ $(z_0' = fz_0)$ può essere prolungato a dei valori arbitrari del parametro affine s, e allora il cammino orizzontale condotto da z_0 sopra quest'arco esiste per valori arbitrari di s. Il campo basico Y definisce così un gruppo a un parametro $\exp(s\mathrm{Y})$ di trasformazioni globali di V_n.

Reciprocamente, se ogni campo di vettori basici definisce un gruppo a un parametro di trasformazioni globali di $\mathfrak{E}(V_n)$, poiché la traiettoria $z(s)$ di Y è definita per ogni valore del parametro s e la proiezione di $z(s)$ è un arco di geodetica $x(s)$ di V_n riferita al parametro affine s, $x(s)$ può prolungarsi per valori arbitrari del parametro affine si ha così il

Teorema. – *Perché una varietà differenziabile* V_n *sia completa per una connessione affine, occorre e basta che ogni campo di vettori basico di* $\mathfrak{E}(V_n)$ *definisca un gruppo a un parametro di trasformazioni globali di* $\mathfrak{E}(V_n)$.

4. Gruppi di trasformazioni ω–invarianti e π–invarianti [1]. – Sia $\vec{u}$ un campo di vettori di V_n e $\exp(t\vec{u})$ il gruppo locale a un parametro di trasformazioni locali generato da esso. Questo gruppo applica il punto $x \in V_n$ nel punto $x(t) \in V_n$, e, mediante la trasformazione lineare tangente che indicheremo ancora con $\exp(t\vec{u})$ applica lo spazio tangente T_x in $T_{x(t)}$ per $|t| < \varepsilon$ e lo spazio affine $\mathcal{T}_x$ su $\mathcal{T}_{x(t)}$. Su $\mathfrak{E}(V_n)$ si ha quindi un'applicazione che al punto z su x, fa corrispondere il punto $z(t)$ su $x(t)$; l'applicazione $z \to z(t)$ definisce su $\mathfrak{E}(V_n)$ un gruppo locale $\exp(t\mathrm{Z})$ a un parametro di

(1) Le trasformazioni ω–invarianti si dicono usualmente trasformazioni affini. Preferisco chiamarle ω–invarianti dato che devo considerare nello stesso tempo le trasformazioni π–invarianti.

trasformazioni locali. Il campo Z di $\mathfrak{G}(V_n)$ generato da $\exp(tZ)$ si chiama *associato* al campo $\vec{u}$ di V_n.

Diciamo che una trasformazione infinitesima è ω–invariante (o π–invariante) se essa lascia invariata la connessione lineare ω (o la connessione affine π).

Dimostriamo che se $\vec{u}$ lascia invariata la connessione π il campo associato Z lascia invariato ogni campo basico Y di $\mathfrak{G}(V_n)$ secondo π. A tale scopo è utile introdurre l'operatore i o prodotto interno di un vettore X per una r–forma α definito da $i(X)\alpha = X^k \alpha_{ki_1 \cdots i_{r-1}}$ e la derivata di Lie o trasformazione infinitesima di una forma Φ rispetto a un campo di vettori X indicata con $L(X)\Phi$ e definita da

$$[L(X)\Phi]_x = \lim_{t \to 0} \frac{\exp(tX)^* \Phi_{x(t)} - \Phi_x}{t}$$

$\exp(tX)^* \Phi$ essendo l'immagine reciproca di Φ mediante $\exp(tX)$.

La connessione affine π sia individuata su V_n da una connessione lineare di coefficienti γ e da un tensore Φ^α_β. Se $\vec{u}$ è un campo di vettori che genera un gruppo di trasformazioni $\exp(t\vec{u})$ π–invarianti, questo gruppo di trasformazioni lascia invariata la connessione lineare e l'operatore Φ.

Si ha allora

$$L(\vec{u})\gamma = 0 \qquad L(\vec{u})\Phi = 0 . \tag{4-1}$$

La seconda delle (4–1) porta che se Z è il campo associato a $\vec{u}$ e φ la 1–forma su $\mathfrak{G}(V_n)$ definita dalle (1–5) $L(Z)\varphi = 0$.

Le (4–1) dànno quindi

$$L(Z)\pi = 0 \qquad L(Z)\varphi = 0 . \tag{4-2}$$

Se Y è un campo di vettori basico valgono le (1–6) che, mediante l'operatore, i, possono scriversi in modo equivalente

$$i(Y)\pi = 0 \qquad i(Y)\varphi = w$$

risulta allora

$$L(Z)\,i(Y)\pi = 0 \qquad L(Z)\,i(Y)\varphi = 0 \tag{4-3}$$

ma cfr. [9]

$$\begin{aligned} L(Z)\,i(Y)\pi &= i(Y)\,L(Z)\,\omega + i[ZY]\pi \\ L(Z)\,i(Y)\varphi &= i(Y)\,L(Z)\,\varphi + i[ZY]\varphi \end{aligned} \tag{4-4}$$

dalle (4–2) (4–3) si ha allora

$$i[ZY]\pi = 0 \qquad i[ZY]\varphi = 0$$

ossia il campo [ZY] di $\mathfrak{G}(V_n)$ è il campo basico associato all'elemento nullo di R^n ed è quindi identicamente nullo (vedi n. 1). Il campo Y è perciò invariante per Z.

Su una varietà a connessione lineare, una trasformazione infinitesimale ω–invariante non definisce in generale un gruppo a un parametro di trasformazioni globali. Un teorema di Kobayashi [7] mostra tuttavia che è sempre così se la varietà V_n è completa per la connessione lineare. Dimostrerò che se la connessione affine è completa vale un teorema analogo.

TEOREMA. – *Se la connessione* π *è completa, ogni campo di vettori* $\vec{u}$ *di* V_n *che genera un gruppo di trasformazioni* π*–invarianti, genera un gruppo globale a un parametro di trasformazioni di* V_n.

La connessione affine π sia individuata su V_n da una connessione lineare di coefficienti $\gamma^{\alpha}_{\beta\varrho}$ e dal tensore Φ^{α}_{β}. Consideriamo la connessione $\bar{\omega}$ di coefficienti $\bar{\gamma}^{\alpha}_{\beta\varrho}$ con

$$\bar{\gamma}^{\alpha}_{\beta\varrho} = \gamma^{\alpha}_{\beta\varrho} + \Phi^{\alpha}_{\sigma} \overset{\omega}{\nabla}_{\varrho} \Psi^{\sigma}_{\beta} .$$

Se $\vec{u}$ è un campo di vettori che genera un gruppo di trasformazioni $\exp(t\vec{u})$ π–invarianti, questo gruppo, come si è già osservato, lascia invariata la connessione lineare e il tensore Φ^{α}_{β}. Esso è quindi anche $\bar{\omega}$–invariante. In una Nota precedente [3] ho dimostrato che le geodetiche di V_n secondo π sono le stesse delle geodetiche secondo $\bar{\omega}$ con identità di parametri affini, e il fatto che π sia completa porta che $\bar{\omega}$ è anche completa. Possiamo allora applicare il teorema di Kobayashi alla $\bar{\omega}$ e dedurre che il campo di vettori $\vec{u}$ genera un gruppo globale di trasformazioni di V_n.

5. RELAZIONE TRA I CAMPI BASICI SECONDO LA π E QUELLI SECONDO LA CONNESSIONE LINEARE ASSOCIATA ω. – Sia, come s'è specificato al n. 1, l'omomorfismo

$$f: \qquad \mathfrak{E}(V_n) \longrightarrow E(V_n)$$

e l'iniezione

$$j: \qquad E(V_n) \longrightarrow \mathfrak{E}(V_n).$$

Se π è una forma di connessione definita su $\mathfrak{E}(V_n)$ l'immagine reciproca di π mediante j dioè $j^*\pi$ è una forma definita su $E(V_n)$ dalla matrice $(n+1)\times$ $\times(n+1)$

$$\begin{pmatrix} 0 & \overset{\omega}{\nabla}\xi + \Phi \\ 0 & \omega \end{pmatrix} \tag{5-1}$$

ω essendo una 1–forma definita su $E(V_n)$ a valori nell'algebra di Lie del gruppo lineare e Φ essendo una 1–forma su $E(V_n)$ a valori in R^n. Si è osservato al n. 1 che $\mathfrak{E}(V_n) = E(V_n) \times R^n$; un vettore X_z tangente a $\mathfrak{E}(V_n)$ nel punto $z = jz'$ si decompone perciò nella somma di un vettore X'_z tangente a $E(V_n)$ e di un vettore tangente a R^n. Il differenziale dell'omomorfismo f (che indicherò ancora con f) trasforma X in X′

$$f: \qquad X \longrightarrow X'$$

essendo X′ la parte di X tangente a E (V_n). Se X_z appartiene inoltre al sottospazio orizzontale per π dato che $\pi(X) = 0$, per la (5–1) si deduce che $\omega(X') = 0$.

Consideriamo ora un vettore X in un punto di $\mathcal{E}(V_n)$ che non appartenga alla sottovarietà E (V_n). Poiché ogni fibra di E (V_n) è una sottovarietà della fibra corrispondente di $\mathcal{E}(V_n)$, esisterà un $\bar{a} \in \bar{G}$ tale che $z\bar{a} = jz'$. Se si indica allora con $D_{\bar{a}}$ la traslazione a destra definita dall'elemento $\bar{a}$ e ancora con D_a l'applicazione tra vettori tangenti da essa individuata, si ha

$$f X_z = f(D_{\bar{a}}^{-1} \cdot D_{\bar{a}} X_z)$$
$$= D_{f\bar{a}}^{-1} \cdot f D_{\bar{a}} X_z$$

$D_{\bar{a}} X_z$ è ancora un vettore orizzontale per π nel punto $z\bar{a} = jz'$, e, per quanto si è or ora osservato $f \cdot D_{\bar{a}} \cdot X_z$ è orizzontale per ω. La traslazione a destra $D_{f\bar{a}}^{-1}$ $(f\bar{a} \in G)$ lo trasforma in un vettore ancora orizzontale per ω.

Si può così concludere che un vettore in z (z punto arbitrario di $\mathcal{E}(V_n)$ orizzontale per π è trasformato da f in un vettore orizzontale per ω nel punto $z' = fz$.

Sia dunque Y il campo basico per π associato a w. Si ha, dato che f è un omorfismo della fibra

$$p' f Y_z = p Y_z \tag{5–2}$$

se Y è un campo basico per π, $\varphi(Y_z) = 0$ cioè

$$z'^{-1} \Phi \cdot p \cdot Y_z = w \qquad (z' = fz)$$

e per la (5–2)

$$z'^{-1} \cdot \Phi \cdot p' f Y_z = w$$

ove $f Y_z$ è un vettore orizzontale per ω nel punto $z' = fz$.

Sia Y'_z il vettore del campo basico associato a w secondo ω nel punto z'. Si ha

$$z'^{-1} p' Y'_{z'} = w$$

dunque

$$Y'_{z'} = p'^{-1} \cdot \Phi \cdot p' f Y_z .$$

La relazione tra i campi basici secondo π e secondo ω associati allo stesso elemento w di R^n è dunque

$$Y' = \bar{\Phi} \cdot f \cdot Y$$

ove

$$\bar{\Phi} = p'^{-1} \Phi p' . \tag{5–3}$$

Il campo basico secondo ω è dunque il trasformato del campo basico secondo π mediante f e mediante un operatore $\bar{\Phi}$ che agisce sui sottospazi orizzontali relativamente a ω.

Bibliografia.

[1] W. Ambrose and I. Singer, *A theorem on holonomy*, «Trans. Amer. Math. Soc.», 75, pp. 428–443 (1953).

[2] I. Cattaneo Gasparini, *Sulle connessioni affini associate a una data connessione lineare* «Scuola Norm. Sup. Pisa», Serie III, fasc. 1–2, pp. 119–126 (1956).

[3] — *Sulle geodetiche di una* V_n *relative a una connessione affine*, «Rend Acc. Naz. Lincei», vol. XXII, ser. 8ª, pp. 146–154 (1957).

[4] — *Sur une classe de connexion linéaires à groupes d'holonomie isomorphes*, «C. R. Acad. Sci.», Fevr. 1958, T. 246, pp. 1145–1147.

[5] C. Ehresmann, *Les Connexions infinitésimales dans un espace fibré differentiable*. Colloque de Topologie, Bruxelles, pp. 29–55 (1950).

[6] — *Sur la notion d'espace complet en géométrie différentielle*, «C. R. Acad. Sci.», *202*, 2033 (1936).

[7] S. Kobayashi, *Theory of connections*, «Annali di Matematica», Serie IV, XLIII, pp. 119–193 (1957).

[8] A. Lichnerowicz, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Ed. Cremonese, Roma 1955.

[9] Corso Scuola Normale Superiore. Pisa 1958. Appunti policopiati.

[10] K. Nomizu, *Lie groups and differential geometry*, The mathematical Society of Japan, 1956.

Geometria. — *Sulla completezza degli archi nei piani proiettivi finiti.* Nota I (*) di MICHELE SCE, presentata dal Socio B. SEGRE.

Dato in un piano proiettivo finito, con $q+1$ punti su ogni retta, un insieme di k punti a tre a tre non allineati (k_q–*arco*) si ottiene una ripartizione dei punti del piano dicendo che sono della stessa categoria quei punti dai quali esce lo stesso numero di secanti al k_q–arco; il più piccolo di tali numeri, che sia positivo, lo diciamo l'*indice* del k_q–arco e lo indichiamo con h (1).

Dapprima, qui si trova che un k_q–arco può essere completo (cioè non contenuto in un altro) soltanto se

$$d = \frac{(k-1)(k-2)}{2} - hq \geq 0 .$$

Si migliora poi questo risultato, sfruttando alcune disuguaglianze che si ottengono dalle relazioni che legano i numeri dei punti delle varie categorie; precisamente, si ottiene che un k_q–arco non può essere completo nei seguenti casi:

k pari $> 2(h^2-h+1)$	$d=0$	$h>1$
k pari >6	$d=1$	$h=1$
k pari $> 2h(h+1)$	$d=1$	$h>1$
k dispari	$d \leq \frac{\sqrt{3}-1}{2}k - \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}k + \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$	
k dispari $> \lambda(\lambda+3)(\lambda^2+\lambda+1)$	$d=(\lambda+1)(\lambda+2)/2$	$\lambda = q-k$
k dispari $< 2(h+1)+\sqrt{2h+1}$	$d=(k-2h-1)/2$.	

Infine, si cerca di estendere alcuni dei risultati raggiunti agli $\{m\,;\,n\}_q$ –archi, cioè a quegli insiemi di m punti dei quali mai più di n siano allineati.

1. Sia C un k_q–arco di indice $h \geq 2$; allora da tutti i $q-1$ punti delle sue secanti che non appartengono a C escono almeno altre $h-1$ secanti. Poiché le secanti di un k_q–arco sono quante le coppie dei suoi punti, ne risulta che deve essere

$$(1) \qquad (h-1)(q-1) \leq \frac{(k-2)(k-3)}{2} .$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 16 luglio 1958.

(1) Cfr. M. SCE, *Sui k_q–archi di indice h*, « Atti del Convegno sui Reticoli e le Geometrie proiettive », Palermo 25–29 ottobre, (Roma, Cremonese 1958), pp. 133–135. I risultati sui k_q–archi ottenuti sino a quell'epoca (nella massima parte dovuti a B. Segre) sono raccolti nella relazione di B. SEGRE, *Sulle geometrie proiettive finite*, ibid., pp. 46–61.

Se si pone $k = q - \lambda$ [con $\lambda \geq -2$ oppure -1 secondo che q è pari o dispari [2]], la (1) si può trasformare nella

$$h \leq \frac{q - 2\lambda - 2}{2} + \frac{(\lambda + 1)(\lambda + 2)}{2(q - 1)};$$

perciò, *se q è pari e*

$$q > \frac{(\lambda + 1)(\lambda + 2)}{2} + 1, \tag{2'}$$

per l'indice h si ha:

$$h \leq \frac{q - 2\lambda - 2}{2}; \tag{3'}$$

se q è dispari e

$$q > (\lambda + 1)(\lambda + 2) + 1, \tag{2''}$$

per l'indice h si ha:

$$h \leq \frac{q - 2\lambda - 3}{2} \quad [3]. \tag{3''}$$

I k_q–archi i cui indici abbiano i valori dati dai secondi membri delle (3) li diremo *k_q–archi di indice massimo*. Esempi di tali k_q–archi sono forniti, nei piani in cui esistono, dai $(q + 2)_q$–archi, dai $(q + 1)_q$–archi [4] e da tutti i k_q–archi in essi contenuti.

Se un $(q - \lambda)_q$–arco C di indice massimo ed un $(q - \lambda')_q$–arco C′ hanno in comune un ρ_q–arco C″ ($\rho < q - \lambda, q - \lambda'$), dai punti di C′ non appartenenti a C″ possiamo condurre al più $\lambda + 2$ o $\lambda + 3$ tangenti a C secondo che q è pari o dispari; perciò

$$2\rho - (\lambda + 2) \leq q - \lambda \quad \text{oppure} \quad 2\rho - (\lambda + 3) \leq q - \lambda$$

e si ha che *un $(q - \lambda)_q$–arco di indice massimo ha in comune con un $(q - \lambda')_q$–arco al più $(q + 2)/2$ o $(q + 3)/2$ punti secondo che q è pari o dispari.*

Se poi, nel caso di q dispari, ρ assumesse proprio il valore massimo, da ogni punto di C′ si potrebbero condurre esattamente $\lambda + 3$ tangenti a C nei punti di C″; e, poiché da ogni punto di C escono $\lambda + 2$ tangenti, si avrebbe:

$$\left[q - \lambda - \frac{q + 3}{2}\right](\lambda + 3) \leq (\lambda + 2)\frac{q + 3}{2}.$$

(2) R. C. Bose, *Mathematical theory of factorial design*, «Sankhya», vol. 8, pp. 107–166 (1947): λ può certamente prendere il valore minimo nei piani desarguesiani e, se q è dispari, nei piani transitivi; per il primo risultato si veda B. Qvist, *Some remarks concerning curves of the second degree in a finite plane*, «Ann. Ac. Sc. Fennicae», Helsinki 1952, nn. 8, 11; per il secondo risultato, T. G. Ostrom, *Ovals, dualities, and Desargues's theorem*, «Can. J.», vol. VII, pp. 417–431, n. 4 (1955).

(3) Si noti che, se valgono le (2), da qualche punto di ogni secante escono almeno $\lambda + 2$ o $\lambda + 3$ tangenti (secondo che q è pari o dispari).

(4) Si veda la Nota di Qvist cit. nella [2], theorem 3.

Perciò, *se q è dispari e*

$$q > 2\lambda\lambda' + 6(\lambda + \lambda') + 15$$

C e C' hanno in comune al più $(q+1)/2$ punti.

2. Un k_q–arco C lo diciamo *completo di indice h* se da ogni punto del piano escono almeno h sue secanti [5].

Dalla definizione segue che devono uscire almeno h secanti da ognuno dei q punti di una tangente, che esiste certamente se $k < q + 2$ [6], non appartenenti a C. Se il k_q–arco è completo di indice h, si deve dunque avere, per $k < q + 2$,

$$q \leq \frac{(k-1)(k-2)}{2h}. \tag{4}$$

Posto ancora $k = q - \lambda$ $(\lambda > -2)$, la (4) si può scrivere

$$h \leq \frac{q - 2\lambda - 3}{2} + \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{2q}; \tag{5}$$

quindi, *se q è dispari e*

$$q > \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{2}$$

sussiste di nuovo la (3'); se q è pari e

$$q > (\lambda+1)(\lambda+2) \tag{6}$$

risulta invece che

$$h \leq \frac{q - 2\lambda - 4}{2}.$$

Possiamo dunque concludere che *se q è pari e soddisfa alla* (6), *non esistono $(q-\lambda)_q$–archi completi di indice massimo.*

Per il seguito ha importanza la differenza

$$d = \frac{(k-1)(k-2)}{2} - hq; \tag{7}$$

qui ci limitiamo ad osservare che, a causa della (5),

$$d = \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{2} \tag{7'}$$

allora ed allora soltanto che q è dispari ed il k_q–arco è di indice massimo.

3. Siano ora s_j e $t_{j''}$, una delle $k(k-1)/2$ secanti ed una delle $k(q-k+2)$ tangenti del k_q–arco C; indicheremo con a_i^{j}, $b_i^{j''}$ e c_i, rispettivamente, il numero

(5) I k_q–archi completi di indice 1 sono gli usuali k_q–archi completi; infatti, se da qualche punto del piano uscissero soltanto tangenti a C, questo sarebbe contenuto nel k'_q–arco costituito da C e da quei punti.

(6) Si veda la Nota di BOSE cit. in [2].

dei punti di s_j, di $t_{j'}$, e del piano dai quali si possono condurre i tangenti [e $(k-i)/2$ secanti] a C. È facile verificare che tali numeri soddisfanno alle relazioni:

$$(8)\qquad \sum_i a_i^j = q - 1 \qquad (8')\qquad \sum_i b_i^{j'} = q$$

$$(9)\qquad \sum_i i a_i^j = (k-2)(q-k+2) \qquad (9')\qquad \sum_i (i-1) b_i^{j'} = (k-1)(q-k+2)$$

$$(10)\qquad \sum_j a_i^j = \frac{k-i}{2} c_i \qquad (10')\qquad \sum_{j'} b_i^{j'} = i c_i$$

$$(11)\qquad \sum_i c_i = q^2 + q + 1 - k$$

dove le somme rispetto ad i si intendono fatte per i valori pari o dispari di i $(i = 0, 1, \cdots, k - 2h)$ secondo che k è pari o dispari e $1 \leq j \leq \frac{k(k-1)}{2}$, $1 \leq j' \leq k(q-k+2)$ [7].

Per cercare di valutare l'espressione che si ottiene combinando la (11) con la (10) o la (10'), è utile osservare che se le x_i sono numeri interi non negativi soddisfacenti alle due equazioni indeterminate

$$(12)\qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = Q \\ (n-1)x_1 + (n-2)x_2 + \cdots + x_{n-1} = D, \end{cases}$$

l'espressione

$$(13)\qquad \frac{x_1}{\sigma} + \frac{x_2}{\sigma+\tau} + \cdots + \frac{x_n}{\sigma+(n-1)\tau}$$

dove σ e τ sono numeri reali positivi, ha, rispettivamente, come minimo e come massimo

$$(14)\qquad \begin{cases} \dfrac{Q}{\sigma+(n-1)\tau} + \dfrac{\tau D}{[\sigma+(n-1)\tau][\sigma+(n-2)\tau]} \\ \dfrac{\sigma Q + \tau D}{\sigma[\sigma+(n-1)\tau]} - \dfrac{\tau^2 t(n-t-1)}{\sigma[\sigma+(n-1)\tau][\sigma+(n-t-1)\tau]} \end{cases}$$

dove $t \equiv D \bmod (n-1)$, $t = 0, 1, \cdots, n-2$. Il fatto essendo ovvio per $n = 2$, possiamo supporlo accertato per $n-1$ e dimostrarlo per n.

A questo scopo, cominciamo a scrivere le (12) nella forma

$$x_1 + \cdots + x_{n-1} = Q - x_n$$
$$(n-2)x_1 + \cdots + x_{n-2} = D - Q + x_n .$$

(7) Le relazioni (8)–(11) che legano i *caratteri* a_i^j, $b_i^{j'}$ e c_i del k_q–arco si possono scrivere in vari modi; un insieme di relazioni assai elegante è, ad esempio, quello adoperato in B. SEGRE, *Fondamenti di geometria non lineare sopra un corpo (specie nei campi finiti e nei campi di caratteristica due)*; questo lavoro uscirà prossimamente nei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo ».

Le relazioni analoghe che si potrebbero scrivere per le rette che non incontrano il k_q–arco sono – come del resto tutte le relazioni di uguaglianza o disuguaglianza sinora trovate – dipendenti da quelle scritte sopra.

Allora dando ad x_n un valore fissato $\bar{x}_n$, possiamo calcolare, ad esempio, il massimo della (13) che, per ipotesi, sarà:

$$\frac{\sigma(Q-\bar{x}_n)+\tau(D-Q+\bar{x}_n)}{\sigma[\sigma+(n-2)\tau]}-\frac{\tau^2 t'(n-t'-2)}{\sigma[\sigma+(n-2)\tau][\sigma+(n-t'-2)\tau]}+\frac{\bar{x}_n}{\sigma+(n-1)\tau}$$

od anche

$$(15)\qquad \frac{\sigma Q+\tau(D-Q)}{\sigma[\sigma+(n-2)\tau]}+\frac{\tau^2(n-1)\bar{x}_n}{\sigma[\sigma+(n-2)\tau][\sigma+(n-1)\tau]}-\frac{\tau^2 t'(n-t'-2)}{\sigma[\sigma+(n-2)\tau][\sigma+(n-t'-2)\tau]}$$

dove $t' \equiv D-Q+\bar{x}_n \bmod (n-2)$, $t' = 0, 1, \cdots, n-3$. Facendo ora variare x_n, si vede che, quando x_n diminuisce, diminuisce anche il valore della (15). Infatti, quando in luogo di $\bar{x}_n$ poniamo $\bar{x}_n - 1$, se prima t' era nullo, dopo la sostituzione vale $n-3$ ed è evidente che il valore della (15) è diminuito; se t' era diverso da zero, anch'esso va diminuito di un'unità e – con un calcolo privo di difficoltà – si constata che anche questa volta la (15) decresce. Perciò la (15) assumerà il valore massimo quando si dà ad x_n il valore massimo

$$Q-\frac{D-t}{n-1}-1 \qquad t = D \bmod (n-1),\ t = 0, 1, \cdots, n-2;$$

sostituendo nella (15) questo valore di x_n e tenendo conto che risulta $t = t'+1$ per $t' \neq 0$ e $t = n-2$ per $t' = 0$, si ottiene per il massimo della (13) il valore dato sopra.

Un discorso analogo, ma più semplice, vale per il minimo.

4. Cominciamo a considerare il caso in cui k sia pari e si adoperino le (8), (9) relative alle secanti; se supponiamo – come faremo sempre nel seguito – che il k_q–arco sia completo, si possono applicare le (14) e si ha:

$$(16)\qquad \frac{2(2q-k+1)}{k} \leq \frac{2a_0^j}{k}+\cdots+\frac{a_{k-2h}^j}{h} \leq$$
$$\leq \frac{2(q-1)}{k}+\frac{(k-2)(q-k+2)}{hk}-\frac{2t(k-2h-2t)}{hk(k-2t)}$$

dove $t \equiv \frac{(k-2)(q-k+2)}{2} \bmod \frac{k-2h}{2}$, $t = 0, 1, \cdots, (k-2h-2)/2$. Sommando le (16) rispetto ad j e tenendo conto delle (10), (11), si ottiene:

$$(17)\qquad (k-1)(2q-k+1) \leq q^2+q+1-k \leq (q-1)(k-1)+$$
$$+\frac{(k-1)(k-2)(q-k+2)}{2h}-\frac{t(k-1)(k-2h-2t)}{h(k-2t)}.$$

La prima disuguaglianza è sempre verificata appena sia $q \geq k-1$. La seconda, tenendo conto della (7), si può scrivere

$$q^2 \leq q(k-2)+\frac{(d+hq)(q-k+2)}{h}-\frac{t(k-1)(k-2h-2t)}{h(k-2t)}$$

e quindi

$$\frac{t(k-1)(k-2h-2t)}{k-2t} \leq d(q-k+2).$$

Quest'ultima è sempre soddisfatta per $t = 0$; di più, se $d = 0$ risulta nullo anche t: cioè, se $d = 0$, $(k-2)\,(q-k+2)/2$ è divisibile per $(k-2h)/2$. Allora, tenendo sempre conto della (7), si ha

$$(k-2)\,\frac{(k-1)\,(k-2)}{2h} - (k-2)^2 \equiv 0 \bmod (k-2h)$$

od anche

$$\frac{(k-2)^2\,(k-2h-1)}{2h} \equiv 0 \bmod (k-2h)\,.$$

Di qui segue che deve essere anche

$$\frac{(k-2)^2\,(k-2h-1)}{2} \equiv 0 \bmod (k-2h)$$

ed infine che $2\,(h-1)^2$ deve essere divisibile per $k-2h$. Percio, *se*

$$d = 0 \quad , \quad h > 1 \quad , \quad k \textit{ pari e} > 2\,(h^2 - h + 1)$$

non esistono k_q*–archi completi di indice* h [8].

5. Sia ora k dispari. Sottraendo la (8) dalla (9), si hanno le

$$a_1^j + a_3^j + \cdots + a_{k-2h}^j = q - 1$$

$$a_3^j + \cdots + \frac{k-2h-1}{2}\,a_{k-2h}^j = \frac{k-3}{2}\,(q-k+1)\,.$$

Applicando a queste le (14) e sommando rispetto a tutte le secanti, si ottiene – in modo del tutto analogo a quello del n. 4 – che

$$(18) \qquad k\,(2q-k) \leq q^2 + q + 1 - k \leq k\left[q - 1 + \right.$$

$$\left. + \frac{(k-3)\,(q-k+1)}{2h} - \frac{t\,(k-2h-2t-1)}{h\,(k-2t-1)}\right]$$

dove $t \equiv \dfrac{(k-3)\,(q-k+1)}{2} \bmod \dfrac{k-2h-1}{2}$, $t = 0\,,\ 1\,,\ \cdots,\ (k-2h-3)/2$.

La prima diseguaglianza risulta sempre soddisfatta; la seconda, tenendo conto della (7), diventa

$$q^2 + q + 1 \leq kq + \left[q + \frac{d-1}{h}\right](q-k+1) - \frac{tk\,(k-2h-2t-1)}{h\,(k-2t-1)}$$

dalla quale si ricava che

$$(19) \qquad 1 \leq \frac{(d-1)\,(q-k+1)}{h} - \frac{tk\,(k-2h-2t-1)}{h\,(k-2t-1)}\,.$$

Affinché la (19) sia soddisfatta deve intanto essere $d > 1$; inoltre, se $d = 2$, deve essere $h \leq q-k+1$.

(8) Per $h = 1$ si avrebbe una configurazione assai elegante che certamente non esiste nei piani in cui q è una potenza di un numero primo.

Nel caso in cui il k_q–arco sia di indice massimo $(q - 2\lambda - 3)/2$ con $q = k + \lambda$ dispari, tenendo conto della (7') e del fatto che ora risulta $t = 0$, la (19) dà luogo alla

$$q \leq \lambda(\lambda + 1)(\lambda + 3) + 2\lambda + 3. \tag{20}$$

Possiamo dunque concludere che *se q è dispari, λ pari e*

$$k = q - \lambda > (\lambda + 3)(\lambda^2 + \lambda + 1)$$

non esistono k_q–archi completi di indice massimo.

6. Sia di nuovo k pari e consideriamo le (8'), (9') relative alle tangenti. Sottraendo la (9') dalla (8') moltiplicata per $k - 2h - 1$, si hanno le

$$\begin{cases} b_2^{j''} + \cdots + b_{k-2h-2}^{j''} + b_{k-2h}^{j''} = q \\ \frac{k-2h-2}{2} b_2^{j'} + \cdots + b_{k-2h-2}^{j''} = d\,. \end{cases} \tag{21}$$

Applicando a queste le (14), sommando rispetto a tutte le tangenti e ponendo in evidenza il numero c_0 dei punti del piano dai quali non escono tangenti al k_q–arco, si ottiene

$$q^2 + q + 1 - k - \frac{k(q-k+2)}{k-2h}\left[q + d - \frac{t(k-2h-2t-2)}{k-2h-2t}\right] \leq c_0 \leq$$
$$\leq q^2 + q + 1 - k - \frac{k(q-k+2)}{k-2h}\left[q + \frac{2d}{k-2h-2}\right] \tag{22}$$

dove $t \equiv d \mod (k - 2h - 2)/2$, $t = 0, 1, \cdots, (k - 2h - 4)/2$. Non sembra che i limiti inferiore e superiore di c_0 così trovati permettano di escludere la completezza di k_q–archi appartenenti a classi facilmente definibili mediante i valori di d ed h.

Qualche semplice risultato si può invece ottenere considerando le (21). Da esse, se $d = 0$, segue che

$$b_2^{j'} = \cdots = b_{k-2h-2}^{j''} = 0\,,\ b_{k-2h}^{j''} = q\,;$$

considerando l'espressione di c_{k-2h} si perverrebbe ad un risultato contenuto in quello finale del n. 4.

Se $d = 1$, dalle (21) risulta che

$$b_2^{j'} = \cdots = b_{k-2h-4}^{j''} = 0\,,\ b_{k-2h-2}^{j''} = 1\,,\ b_{k-2h}^{j''} = q - 1$$

e quindi, in forza delle (10'), devono essere interi

$$\frac{k(q-k+2)}{k-2h-2} = c_{k-2h-2} \quad , \quad \frac{k(q-k+2)(q-1)}{k-2h} = c_{k-2h}\,.$$

Poiché ora $2hq = k(k-3)$, si vede che affinché c_{k-2h-2} sia intero deve essere

$$\frac{k}{2h}[(k-2)(k-2h-1) - 2] \equiv 0 \mod (k - 2h - 2)\,,$$

perciò anche

$$\frac{k}{2}[(k-2)(k-2h-1)-2] \equiv 0 \mod (k-2h-2)$$

e questa equivale all'essere $2(h^2-1)$ divisibile per $k-2h$; dunque *se* $h \neq 1$ *e* $k > 2h(h+1)$ *il* k_q*–arco non può essere completo.*
D'altra parte, se $h = 1$, l'essere intero c_{k-2h} porta che

$$k\left[\frac{(k-1)(k-3)-2}{2}\right]\left[\frac{(k-1)(k-2)-4}{2}\right] \equiv 0 \mod (k-2);$$

e questo accade soltanto se $k-2$ divide 4 perciò; *se* $d = 1$ *e* k *è pari* > 6 *non esistono* k_q*–archi completi di indice* 1.

7. Sia infine k dispari e consideriamo le relazioni

$$b_1^{j'} + \cdots + b_{k-2h-2}^{j'} + b_{k-2h}^{j'} = q$$

$$\frac{k-2h-1}{2} b_1^{j'} + \cdots + b_{k-2h-2}^{j'} = d$$

facilmente deducibile dalle (8'), (9'). Da queste, con il solito procedimento, otteniamo una sola disuguaglianza che interessi:

$$(23) \qquad q^2 + q + 1 - k \leq \frac{k(q+2d)(q-k+2)}{k-2h} - \frac{2t(k-2h-2t-1)}{(k-2h)(k-2h-2t)} k(q-k+2)$$

dove $t = d - \rho(k-2h-1)/2$, $t = 0, 1, \cdots, (k-2h-3)/2$. Per dare a questa una forma più maneggevole, si osservi che essendo

$$\frac{q^2+q+1-k}{k(q-k+2)} = \frac{q+k-1}{k} + \frac{(k-1)(k-3)}{k(q-k+2)},$$

in luogo della (23), si può intanto scrivere

$$\frac{k-1}{k} + \frac{(k-1)(k-3)}{k(q-k+2)} \leq \frac{2hq}{k(k-2h)} + \frac{2d}{k-2h} - \frac{2t(k-2h-2t-1)}{(k-2h)(k-2h-2t)};$$

sostituendo in luogo di q l'espressione che si ricava dalla (7) ed esprimendo d mediante t, ρ, k ed h si avrà

$$(24) \qquad 2(h+t-1) + \rho(k-2h-1) \geq \frac{2h(k-3)(k-2h)}{(k-2-\rho)(k-2h-1)-2t} + \frac{2tk(k-2h-2t-1)}{(k-1)(k-2h-2t)}.$$

Tenendo poi conto che

$$\frac{h(k-3)(k-2h)}{(k-2-\rho)(k-2h-1)-2t} = h + \frac{h[\rho(k-2h-1)+2(h+t-1)]}{(k-2-\rho)(k-2h-1)-2t},$$

in luogo della (24) possiamo anche considerare la

$$(24') \qquad 1 + h\frac{\rho(k-2h-1)+2(h+t-1)}{(k-2-\rho)(k-2h-1)-2t} \leq \rho\frac{k-2h-1}{2} + \frac{2t(t+h)}{(k-1)(k-2h-2t)}.$$

Per semplicità, considereremo soltanto tre disuguaglianze che si ottengono dalle (24), (24′) particolarizzando i valori di ρ e di t.

Ponendo nella (24), $t = 0$, $\rho = 1$, si ottiene

$$(k - 3)(k - 2h - 1) \geq 2h(k - 2h)$$

che è soddisfatta soltanto se

$$k \geq 2(h + 1) + \sqrt{2h + 1}.$$

Se si ponesse nella (24) $t = 0$, $\rho = q - k + 1$ (nel qual caso il k_q-arco sarebbe di indice massimo), si riotterrebbe la (20).

Se supponiamo che sia $\rho = 0$, cioè $d = t$, e che valga la

$$(k - 1)(k - 2h - 2d) \geq 2d(d + h),$$

la (24′) non è certo soddisfatta; quindi, essa non è certo soddisfatta per $\rho = 0$ e

$$2d \leq -(k + h - 1) + \sqrt{3k^2 - 2(h + 2)k + (k + 1)^2}. \tag{25}$$

Perciò, minorando in modo ovvio il radicale al secondo membro della (25), possiamo affermare che *se*

$$d \leq \frac{\sqrt{3} - 1}{2} k - \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3}} h + \frac{2 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

il k_q-arco non può essere completo di indice h.

Idrodinamica. — *Funzioni di trasferimento e caratteristiche di stabilità delle adduzioni idroelettriche.* Nota II di GIUSEPPE EVANGELISTI, presentata (*) dal Corrisp. G. SUPINO.

1. In altra Nota, avente lo stesso titolo della presente, e della quale si conservano i simboli ed i riferimenti grafici (1), è stato considerato il legame indotto da un'adduzione idraulica galleria in pressione–pozzo piezometrico–condotta forzata fra le due grandezze fondamentali della regolazione di un generatore idroelettrico: l'apertura del distributore della turbina e la potenza che la turbina riceve dal sistema idraulico adduttore. Il problema è risolto dalla funzione di trasferimento

$$(1)\qquad G_3(s) = -2\,\frac{\left\{2\rho_c \sinh\frac{1}{2}T_e s - (1-2h_c)\cosh\frac{1}{2}T_e s\right\}\left\{\left(T_v s + \frac{1}{2\rho_c}\tgh\frac{1}{2}T_e s\right)(T_g s + 2h_g) + \right.}{\left\{2\rho_c \sinh\frac{1}{2}T_e s + 2(1+h_c)\cosh\frac{1}{2}T_e s\right\}\left\{\left(T_v s + \frac{1}{2\rho_c}\tgh\frac{1}{2}T_e s\right)(T_g s + 2h_g)\right.} \\ + \frac{1}{\cosh\frac{1}{2}T_e s}(T_g s + 2h_g)$$

che si tratta ora di indagare nelle specificazioni corrispondenti ai diversi casi tipici.

2. Un impianto semplificato, in cui l'alimentazione della condotta avviene direttamente dal serbatoio a quota costante, senza l'intermediario del sistema galleria–pozzo, si studia ponendo, nella (1), $T_g = h_g = 0$. Una ulteriore semplificazione consiste nel trascurare la perdita di carico in condotta (la quale secondo la stessa (1), conta poco se h_c è contenuto entro l'ambito di poche unità per cento, come succede di regola).

Con tali assunti la (1) si semplifica nella

$$(2)\qquad G_3(s) = \frac{-2\rho_c \tgh\frac{1}{2}T_e s + 1}{\rho_c \tgh\frac{1}{2}T_e s + 1}\,.$$

La (2) mette in luce, e precisa quantitativamente, quell'importante elemento che è il carattere selettivo di una condotta forzata: basta, allo scopo porre nella (2) s uguale all'immaginario puro $j\omega$ e far variare ω da 0 a ∞ (2).

(*) Nella seduta del 17 maggio 1958.

(1) « Rendiconti Acc. Lincei », vol. XXIV, fasc. 6, pp. 679–685 (1958).

(2) Nella sostanza delle cose la (2) non è nuova. Per quanto risulta, un risultato che sostanzialmente si riporta alla (2) fu ottenuto per la prima volta da G. Krall. Vedi a proposito G. KRALL, *Propagazione ondosa in una condotta e regolazione delle turbine*, « Re

L'andamento di tale risposta, riprodotto nella fig. 1, mostra che una condotta forzata eccitata da variazioni armoniche dell'apertura del distributore ha una curva di selettività molto piatta; il modulo della funzione $G_3(j\omega)$, infatti, resta sempre compreso fra i valori di 1 e 2.

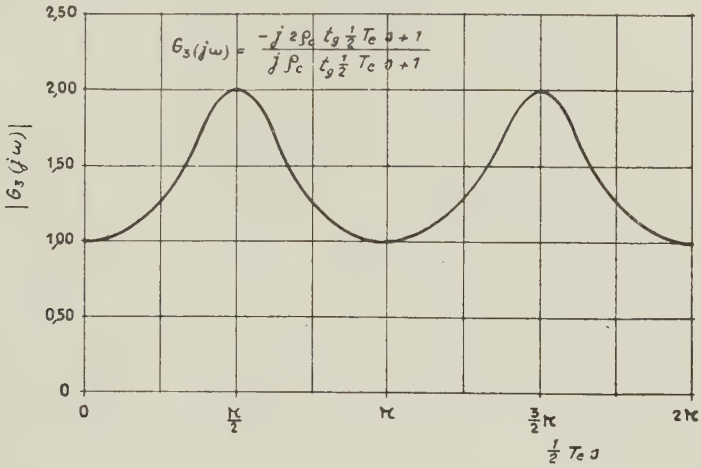


Fig. 1.

Ulteriori informazioni sul comportamento delle adduzioni forzate si ottengono nel caso particolare che $1/2\,T_e\,s$ sia molto piccolo: ciò che succede se le costanti di tempo impegnate nei fenomeni di regolazione sono molto più lunghe del periodo proprio della condotta (che vale $2\,T_e$). Si ottiene allora dalla (1), tenendo ferma l'ipotesi di $T_g = h_g = 0$, ed eseguendo un ovvio passaggio al limite,

$$G_3(s) = \frac{-T_e\,s + (1 - 2h_c)}{\frac{1}{2}T_e\,s + (1 + h_c)}\,. \tag{3}$$

La (3), che nel semipiano $R(s) > 0$ è priva di poli, ma presenta uno zero, denuncia un comportamento intrinsecamente instabile; la corrispondente curva di risposta armonica $G_3(j\omega)$ ha l'andamento riprodotto nella fig. 2. Alle frequenze molto basse la potenza uscente dalla condotta resta in fase con l'apertura del distributore, e sente soltanto l'effetto delle resistenze passive che ne riducono l'ampiezza relativa nel rapporto $(1 - 2h_c)/(1 + h_c)$. Al crescere della frequenza verso valori molto grandi – ma sempre interni al campo di validità della (3) – l'argomento della $G_3(j\omega)$ si sposta, per valori costantemente negativi, verso l'opposizione di fase, mentre il modulo va costantemente crescendo verso il limite 2.

diconti della Accademia dei Lincei », 1938, e *Problemi sulla regolazione delle macchine idrauliche concatenate ad una rete di alimentazione*, « La Ricerca Scientifica », 1939.

Ulteriori ragguagli sono forniti nel testo dello scrivente: *La Regolazione delle Turbine Idrauliche* (Cap. IV). Bologna, Zanichelli, 1947.

Interessa osservare che, se fosse $h_c > 0{,}5$, la potenza si presenterebbe subito, anche per frequenze comunque piccole, in opposizione di fase con l'apertura del distributore. Il caso resta fuori delle normali possibilità tecniche, ma merita lo stesso di venir segnalato: quando la perdita di carico in condotta supera la metà della caduta utile, si entra in un campo di instabilità non sanabile, perché legato alla incapacità della condotta di superare un certo limite di potenza erogata.

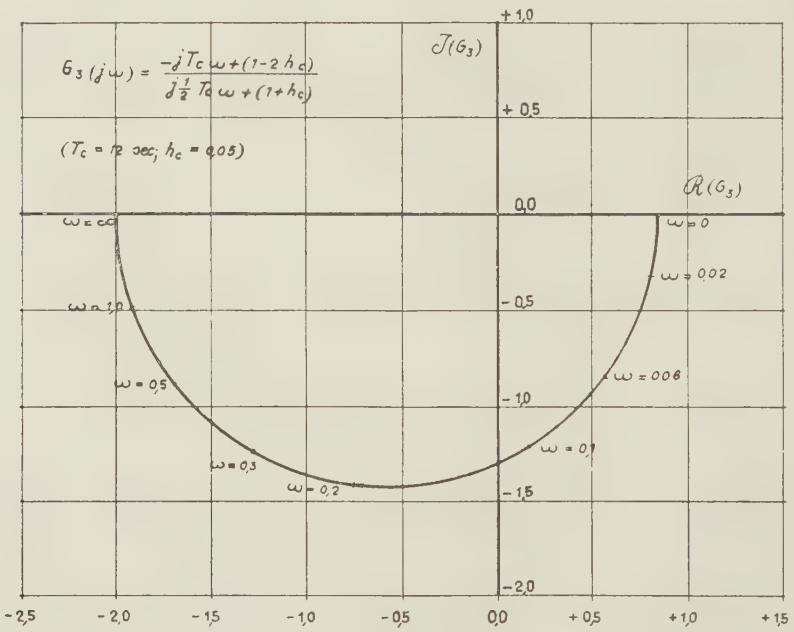


Fig. 2.

Comunque, anche restando nel campo normale dei piccoli valori di h_c, la (3) dimostra che l'effetto combinato di esaltazione del modulo e di sfasamento in ritardo introdotti dalla condotta forzata costituisce una spinta verso l'instabilità di regolazione. La spinta diventa particolarmente grave quando il parametro T_c è elevato; ed in tal caso la presenza di una condotta forzata richiede, per la stabilità di tutto l'insieme, che nell'interno dell'anello di regolazione siano presenti stabilizzatori particolarmente energici.

3. Se manca la condotta forzata $\rho_c = T_c = h_c = 0$, così che la turbina è alimentata direttamente dal pozzo piezometrico, la (1) diventa

$$G_3(s) = \frac{T_v T_g s^2 + (2 h_g T_v - T_g) s + (1 - 2 h_g)}{T_v T_g s^2 + \left(2 h_g T_v + \frac{1}{2} T_g\right) s + (1 + h_g)} . \tag{4}$$

Anche la (4), come già la (3), non ammette poli a parte reale positiva. Mentre la (3) è intrinsecamente instabile, la (4) è priva di zeri a parte reale

positiva, o ne ammette due, secondo che è soddisfatta, o meno, la disuguaglianza

$$2\,h_g\,T_v - T_g > 0. \tag{5}$$

Importa osservare che la funzione $G_3(s)$ ripresenta, per via diversa e con significato diverso, i risultati di una trattazione tecnica ormai classica, relativa appunto alla stabilità dei pozzi piezometrici. Tale trattazione consi-

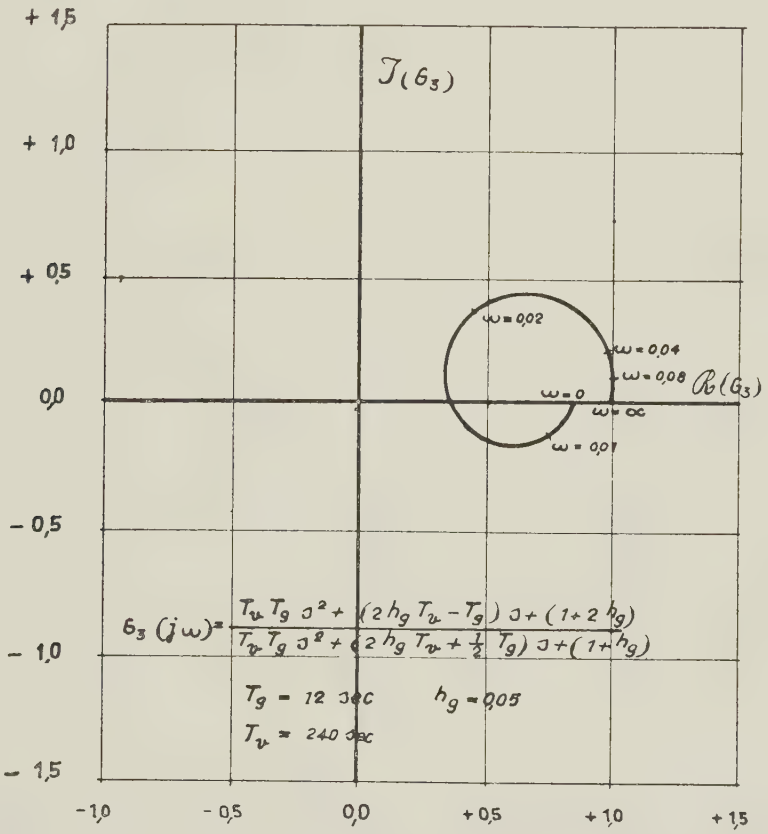


Fig. 3.

dera un sistema galleria–vasca soggetto al vincolo funzionale di erogare potenza costante ed ottiene il numeratore della (4) come equazione caratteristica. La disuguaglianza (5) che ne consegue, detta condizione di Thoma, esprime la condizione affinché un siffatto funzionamento sia stabile, e viene assunta dai tecnici come norma di proporzionamento dei pozzi piezometrici.

La funzione di trasferimento (4), considerata nella sua integrità, precisa il vero significato dei risultati classici, e rivela nuovi aspetti del problema.

Nell'indagine in corso la condizione (5) si è presentata – indipendentemente da condizioni limiti particolari come appunto quella, al tutto ideale, di erogare potenza costante – come relazione dinamica imposta dall'addu-

zione fra l'organo distributore della turbina e la potenza erogata. Questa caratteristica riguarda, però uno solo dei blocchi inseriti nell'anello di regolazione e non è in grado, da sola, di rispondere al problema della stabilità.

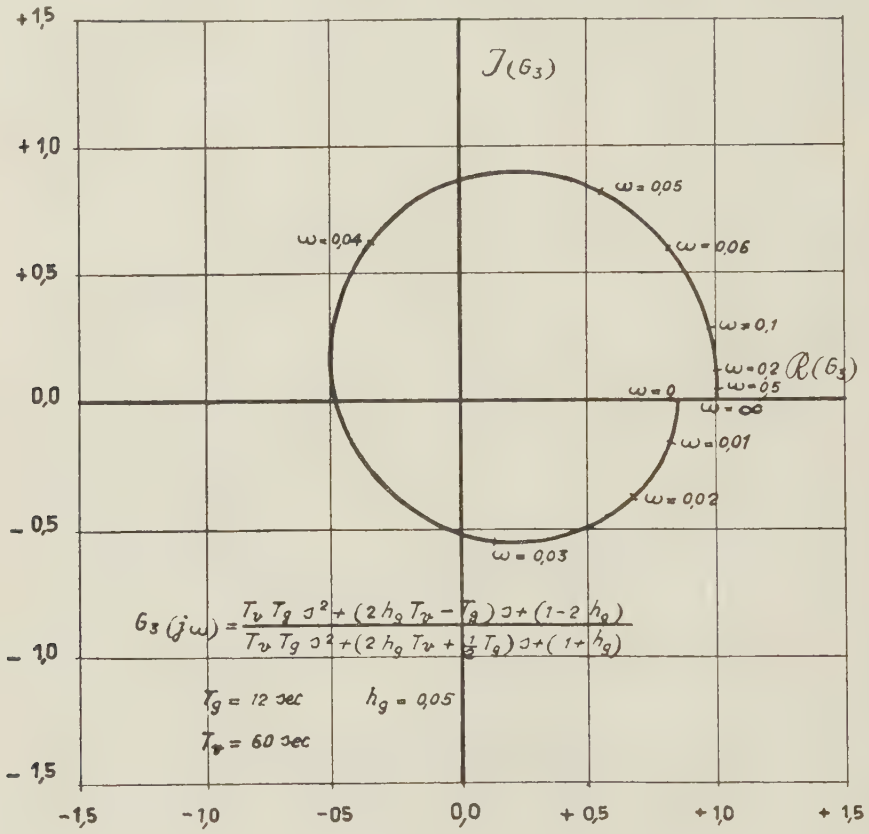


Fig. 4.

In particolare, la condizione (5) di Thoma non può essere qualificata come necessaria; e che esistano nel complesso elettromeccanico (ivi compresa la rete elettrica servita) riserve di stabilità, non è dubbio; tanto è vero che viene pur dominata l'instabilità delle semplici condotte forzate, che ha carattere analogo, anche se non identico. Si apre con ciò il nuovo problema di utilizzare e proporzionare queste riserve per ottenere pozzi piezometrici stabili anche in difetto della condizione di Thoma: e si tratta di un problema importante, perché la (5) conduce spesso a proporzionamenti gravemente e inutilmente onerosi.

La funzione di trasferimento (4) è in grado di indicare, attraverso l'analisi frequenziale, le direttrici d'attacco di questo nuovo problema.

4. Alle frequenze molto basse l'andamento delle $G_3(j\omega)$, dedotte rispettivamente dalla (3) e dalla (4), è analogo: in entrambi i casi il modulo è poco diverso da $(1-2h_g)/(1+h_g)$ e l'argomento prossimo a zero. Non appena, però,

si fa sentire la capacità del pozzo piezometrico, le due funzioni accusano divergenze sempre più pronunciate: tanto che alle massime frequenze il modulo della (4) tende a 1 (anziché a 2) e l'argomento tende di nuovo alla concordanza di fase (invece che all'opposizione).

Contrariamente alle semplici condotte forzate, dove il modulo della $G_3(j\omega)$ è costantemente crescente con ω, i sistemi galleria–pozzo ammettono una frequenza di risonanza al finito. L'acutezza della risonanza, e il gioco degli angoli di fase quando si attraversa la zona di risonanza, sono gli elementi che caratterizzano l'effetto di un sistema galleria–pozzo nella regolazione. Se è soddisfatta la (5), la $G_3(j\omega)$ ha parte reale sempre positiva, e presenta l'andamento della fig. 3: vi è un effettivo ritorno all'argomento nullo, così che l'origine vede la curva sotto un angolo inferiore a 180° (e tanto più ristretto quanto più il margine di stabilità è elevato). Se la (5) è in difetto, il ritorno alla concordanza di fase avviene, come in fig. 4, per rotazione di un intero angolo giro (a differenza delle semplici condotte forzate, per cui lo sfasamento in ritardo resta comunque inferiore ai 180°). Un'ultima differenza, chiaramente rivelata dalle graduazioni di frequenze, sopra la curva di risposta, riportate nelle figg. 2, 3 e 4, sta nel fatto che il pozzo piezometrico sposta verso valori molto più elevati le costanti di tempo proprie del sistema.

L'instabilità residua di un sistema con pozzo piezometrico d'estremità presenta quindi problemi diversi, e per alcuni versi più ardui, di una semplice condotta forzata. Occorre elaborare frequenze molto più basse, e far fronte a selettività più acute; bastano correzioni più modeste nel modulo, ma bisogna intervenire in modo più profondo ed energico sull'argomento.

Astronomia. — *Fotometria fotoelettrica dell'eclisse totale di luna del 13–14 maggio 1957*. Nota di MASSIMO CIMINO e ALFONSO FRESA, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. INTRODUZIONE. – Presentandosi l'eclisse totale di luna del 13–14 maggio 1957 in ottime condizioni per l'osservazione fotometrica, essa è stata da noi osservata col fotometro fotoelettrico applicato al refrattore di Fraunhofer dell'Osservatorio Astronomico di Capodimonte a Napoli.

Lo scopo principale della ricerca era quello di studiare fotometricamente la penombra, rivestendo tale studio una particolare importanza per la fisica lunare e solare. Immaginiamo infatti un osservatore ideale situato in un determinato luogo lunare; via via che l'eclisse di sole avanza (ad opera della terra), tendono a prevalere in quel posto sempre più le radiazioni provenienti dal bordo solare; anzi ad un certo punto prevarranno addirittura le radiazioni cromosferiche e coronali, particolarmente intense nell'ultravioletto. Come è noto, la radiazione ultravioletta è fortemente assorbita dall'atmosfera terrestre, specialmente per opera dello strato di ozono; al contrario essa raggiunge integralmente il suolo lunare, eccitando in esso una specie di luminescenza che, secondo il Link (1), può superare anche il 10 % della brillanza normale totale.

Una volta ammessa tale spiegazione, si comprende come sia da prevedersi, man mano che l'eclisse progredisce, un *eccesso di brillanza* del suolo lunare su quella calcolata per la radiazione normale. Tale eccesso di brillanza, messo in evidenza dal Link, è stato successivamente confermato da M. Cimino (2) e T. Fortini con le osservazioni fotografiche delle eclissi di luna del 29 gennaio 1953 e del 18–19 gennaio 1954 e, spettroscopicamente, da J. Dubois (3), con osservazioni effettuate tra il 1949 ed il 1952.

Nella presente Nota si rende conto delle osservazioni fotoelettriche da noi effettuate durante l'eclisse del 14 maggio 1957. I risultati, sebbene limi-

(*) Nella seduta dell'8 marzo 1958.

(1) F. LINK, *Theorie photométrique de la pénombre pendant les eclipses de lune*, « Journ. Soc. Math. Phys. Tchèque », *72*, 65 (1947); F. LINK, *Die Mondfinsternisse*, Leipzig, 1956, p. 113.

(2) M. CIMINO e T. FORTINI, *Fotometria fotografica dell'eclisse totale di luna del 29 gennaio 1953* . . ., « Rendiconti Acc. Naz. dei Lincei », ser. VIII, vol. XIV, 619–626 (1953); T. FORTINI, *Fotometria fotografica dell'eclisse totale di luna del 18–19 gennaio 1954* . . ., Ibidem, ser. VIII, vol. XVII, pp. 209–215 (1954); T. FORTINI, *Fotometria fotografica della penombra durante l'eclisse di luna del 15–16 luglio 1954* . . ., Ibidem, ser. VIII, vol. XVIII, 65–69 (1955); M. CIMINO, T. FORTINI, M. A. GIANNUZZI, *Contributi al problema della luminescenza del suolo lunare per la radiazione ultravioletta solare nell'eclisse totale di luna del 18–19 gennaio 1954*; M. CIMINO, *On the Luminescence of the Lunar Ground for the Ultraviolet Solar Radiation During Lunar Eclipses*, « The Journal of the International Lunar Society », vol. I, n. 1, 9 (1957).

(3) Da una cortese comunicazione privata.

tati a pochi punti lunari, sono assai concordanti e confermano ancora una volta l'esistenza dell'eccesso di illuminazione per talune zone. Il metodo fotoelettrico usato garantisce una maggiore precisione nelle misure, dando valori che presentano, rispetto ai dati fotografici, una dispersione notevolmente inferiore. Esso presenta d'altra parte lo svantaggio di limitare il numero delle zone lunari, il cui comportamento possa essere esaminato in una stessa eclisse. Un confronto dei nostri dati con dati fotografici dedotti per le stesse zone lunari e nella stessa eclisse sarebbe oltremodo interessante.

2. STRUMENTO E METODO DI OSSERVAZIONE. – Il refrattore adoperato ha una lente di Fraunhofer di 17,5 cm di apertura e di cm 302 di distanza focale; durante l'osservazione l'obiettivo è stato diaframmato, onde permettere di adoperare il fotometro fotoelettrico con una resistenza di entrata di 10 MΩ capace di assicurare una sufficiente sensibilità allo strumento. Il diaframma sul piano focale aveva un diametro di 0,1 mm corrispondente a $\sim$ 0,1 primi d'arco sul disco apparente lunare.

Il fotomoltiplicatore *1P21*, alimentato da batterie a secco con 90 volt per stadio, è seguito da un amplificatore a corrente continua bilanciato del tipo di *Kron*; la corrente di uscita è inviata ad un registratore della CGE, tipo Monza. Essendo la sensibilità cromatica del fotomoltiplicatore attorno a λ 4.000, possiamo ritenere quest'ultima come lunghezza d'onda della radiazione misurata.

Il metodo di osservazione è stato il seguente. Furono scelte quattro zone lunari in prossimità del bordo, indicate coi numeri 1, 2, 3, 4 nella fig. 1, situate a coppie agli estremi di un diametro all'incirca parallelo alla direzione del moto lunare nel cono d'ombra e di penombra. Durante l'eclisse furono effettuate serie continue di puntate su tali punti, notando il tempo di ciascuna; queste operazioni sono state iniziate e proseguite qualche tempo prima e dopo l'entrata e l'uscita dalla penombra, onde stabilire fuori eclisse il rapporto delle intensità luminose dei punti scelti. Le misure effettuate in fase di eclisse hanno allora permesso di determinare le variazioni subite dai rapporti stessi nelle diverse zone dell'ombra e della penombra attraversate. La distanza dei punti dall'orlo del cono d'ombra e di penombra è stata determinata graficamente.

Per quanto riguarda le condizioni meteorologiche, la serata ebbe inizio con veli e nubi, che hanno praticamente reso inutilizzabili le osservazioni fotometriche effettuate durante la fase d'entrata in penombra e nell'ombra. Poco dopo l'inizio della totalità il cielo si rischiarava completamente, e per il resto della serata poteva giudicarsi *assai sereno*, *uniforme*, *senza veli* e *trasparente; serata calma*.

I dati utilizzati nella presente Nota sono perciò quelli relativi alla seconda metà dell'eclisse, e sono da giudicarsi ottimi. Durante la fase di eclisse parziale la zona lunare già in ombra appariva ad occhio nudo assai oscura in entrata, mentre si distingueva assai meglio in uscita. Durante la totalità si è notata una diversa colorazione, dall'orlo al centro dell'ombra; bianco per-

laceo l'orlo, quindi rossastra e poi scura verso il centro. Complessivamente, l'eclisse fu giudicata *assai chiara*.

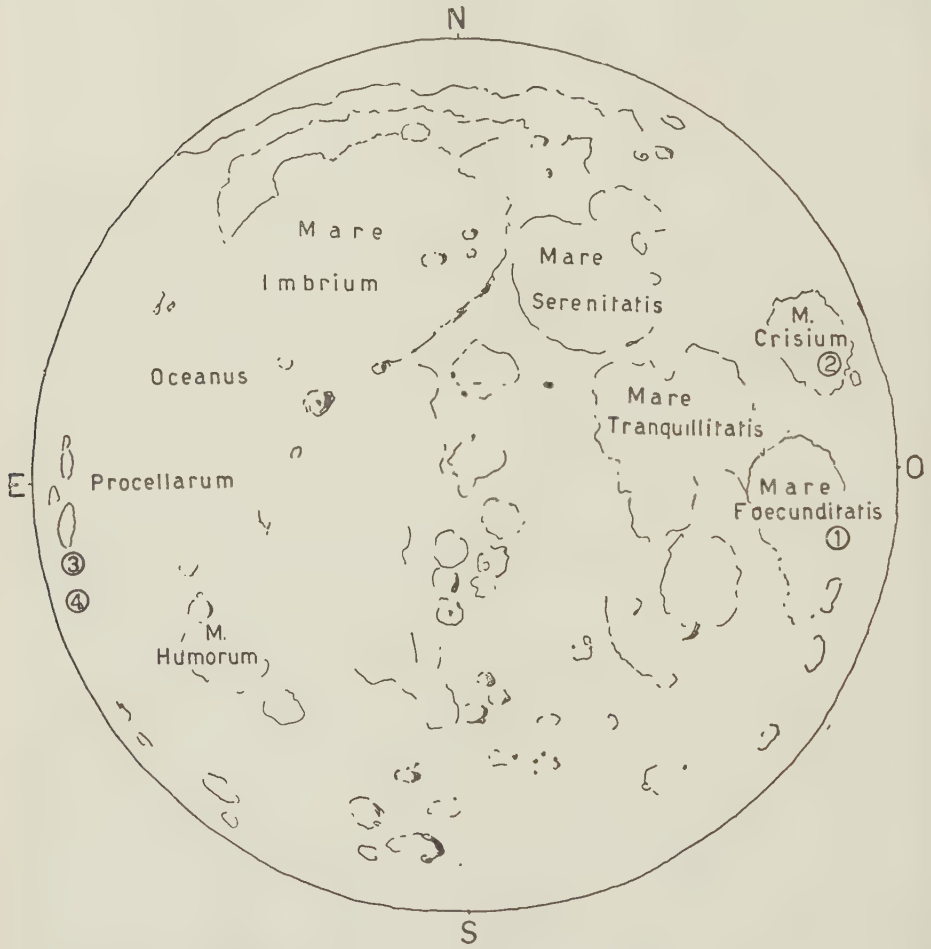


Fig. 1. – Zone lunari scelte per la fotometria.

3. SCELTA DELLE ZONE LUNARI PER LA MISURA E LORO COMPORTAMENTO NELLA PENOMBRA. – Come abbiamo accennato, furono scelte quattro zone lunari, indicate nella figura 1. La zona n. 1 si trova sull'orlo del *Mare della Fecondità*, centrata sul cratere *Langrenus*; la n. 2 è nella parte meridionale del *Mare delle Crisi*; la n. 3 a sud del cratere *Grimaldi*; infine la zona n. 4 è centrata sul cratere *Crüger*. Secondo il Dubois le zone n. 1 e 3 si troverebbero in plaghe lunari ove il fenomeno della luminescenza sarebbe poco evidente, mentre le zone n. 3 e 4 sarebbero situate in plaghe più sensibili a tale fenomeno.

Indichiamo con $\Delta\mu_o$ la differenza di grandezza stellare di due punti lunari *a* e *b fuori eclisse*, e con $\Delta\mu$ quella che si riscontra allorquando il punto

a è penetrato nella penombra ad una distanza γ' (in primi di arco) dall'orlo della penombra stessa, mentre il punto *b* (che assumiamo come riferimento) è ancora al di fuori. La differenza $\Delta\mu - \Delta\mu_o = \Delta m$ fornisce, istante per istante, la variazione di grandezza stellare subìta dal punto *a* man mano che esso si immerge nella penombra. Si ottiene in tal modo una curva di densità della penombra *relativa al punto a*.

TABELLA I.

Densità della penombra (λ 4000) *in funzione della distanza* γ' *dall'orlo della penombra.*

Coppia 2–3 $\Delta\mu_o = +0{,}47$		Coppia 2–4 $\Delta\mu_o = +0{,}52$		Coppia 1–3 $\Delta\mu_o = -0{,}07$		Coppia 1–4 $\Delta\mu_o = -0{,}02$	
γ'	Δm	γ'	Δm	γ'	Δm	γ'	Δm
−3′,0	+ 0,04	−3′,0	+ 0,10	+ 2′,5	± 0,00	+ 2′,5	± 0,00
+ 1′,5	+ 0,05	+ 1′,5	+ 0,13	5′,0	− 0,05	5′,0	− 0,05
4′,0	± 0,00	4′,0	+ 0,03	10′,5	+ 0,37	10′,5	+ 0,34
10′,0	+ 0,23	10′,0	+ 0,23	17′,0	+ 0,49	17′,0	+ 0,52
16′,0	+ 0,45	16′,0	+ 0,48	19′,0	+ 0,92	19′,0	+ 0,92
18′,0	+ 0,71	18′,0	+ 0,71	22′,0	+ 1,14	22′,0	+ 1,12
21′,0	+ 0,90	21′,0	+ 0,90	24′,0	+ 1,69	24′,0	+ 1,69
22′,5	+ 1,23	22′,5	+ 1,25	26′,0	+ 2,47	26′,0	+ 2,49
25′,5	+ 1,60	25′,5	+ 1,63	29′,5	+ 4,03 (*)	29′,5	+ 3,83 (*)
27′,0	+ 1,73	27′,0	+ 1,70	—	—	—	—
29′,0	+ 2,36 (*)	—	—				
30′,0	+ 2,56 (*) (a)	30′,0	+ 2,31 (*)				
32′,0	+ 3,13 (*) (a)	32′,0	+ 2,94 (*)				

(*) Filtro azzurro nel punto di riferimento, con assorbimento misurato in $\Delta m = +3.63$.
(a) Correzione di + 0.05 per essere il punto 3 ancora in penombra alla distanza $\gamma' = 6'$.

Ovviamente, allorché il punto di riferimento *b* penetrerà anch'esso nella penombra, occorrerà apportare una correzione per la diminuita luminosità di *b*, ciò che sarà molto facile giacché la prima parte della curva di densità (verso la parte dell'orlo della penombra) è stata già tracciata. Presupponendo che le differenze di assorbimento atmosferico su due punti lunari siano tra-

scurabili, e supponendo la simmetria della penombra intorno al centro, la curva trovata può ritenersi largamente indipendente dalle variazioni atmosferiche nel corso della serata, dall'assorbimento per la differente altezza della Luna sull'orizzonte e, sostanzialmente, anche dalla luce diffusa del cielo, trattandosi sempre di determinazioni differenziali entro un campo che non supera i 30′.

TABELLA II.

Entrata nell'ombra (λ 4000) *in funzione della distanza* γ *dall'orlo dell'ombra.*

Coppia 2–3				Coppia 2–4			
γ	γ'_3	C	Δm	γ	γ'_4	C	Δm
1′,5	+ 7′,5	+ 0,08	+ 4,40	1′,5	+ 7′,0	+ 0,08	+ 4,27
3′,5	+ 8′,5	+ 0,15	+ 4,40	3′,5	—	—	—
6′,0	+ 12′,5	+ 0,35	+ 5,53	6′,0	+ 14′,0	+ 0,40	+ 5,45

Filtro azzurro sui punti di riferimento, con assorbimento $\Delta m = + 3{,}63$. I valori γ'_3 e γ'_4 indicano le distanze dall'orlo della penombra dei punti 3 e 4 di riferimento, mentre C è la relativa correzione apportata per essere i due punti ancora in penombra.

Il procedimento ora indicato è stato applicato alle coppie di punti: 1–3; 1–4; 2–3; 2–4, nella *fase di uscita*; pertanto i punti primi ad uscire sono stati il 3 e, immediatamente dopo, il 4. Questi hanno perciò assunto il ruolo di punti di riferimento. Abbiamo ottenuto in tal modo la Tabella I.

4. FOTOMETRIA DELL'OMBRA. – Sempre nella fase di uscita, è stato possibile effettuare il confronto tra le coppie di punti 2–3 e 2–4, mentre il punto 2 si trovava nell'ombra, ed i punti 3 e 4 nella penombra. Assumendo come diminuzione di splendore dei punti 3 e 4, ancora in penombra, quanto risulta in media dalla Tabella I nelle varie posizioni al momento dei confronti, si ottiene la Tabella II.

Benché molto concordanti, questi dati per l'ombra sono troppo esigui per poterne trarre delle conclusioni; si può soltanto dire, da uno sguardo alla fig. 2, che il punto n. 2 (nel *Mare Crisium*) sembra aver subìto, dal passaggio dalla posizione di circa 2′ *fuori* dell'ombra a circa 2′ *entro* l'ombra, una diminuzione di splendore pari a circa due grandezze stellari, che sembrerebbe un valore piuttosto basso.

5. DISCUSSIONE DEI RISULTATI. – I risultati della Tabella I e della Tabella II sono rappresentati nella fig. 2. Come si vede vi è un accordo veramente buono tra i valori delle coppie 1–3 ed 1–4 da una parte e 2–3, 2–4 dal-

l'altra. L'accordo è anche ottimo per tutte le quattro coppie in prossimità dell'orlo della penombra, ma via via che i punti si immergono nel cono d'ombra, le coppie 2–3, 2–4 tendono a discostarsi sistematicamente dalle altre due, con Δm sensibilmente minori.

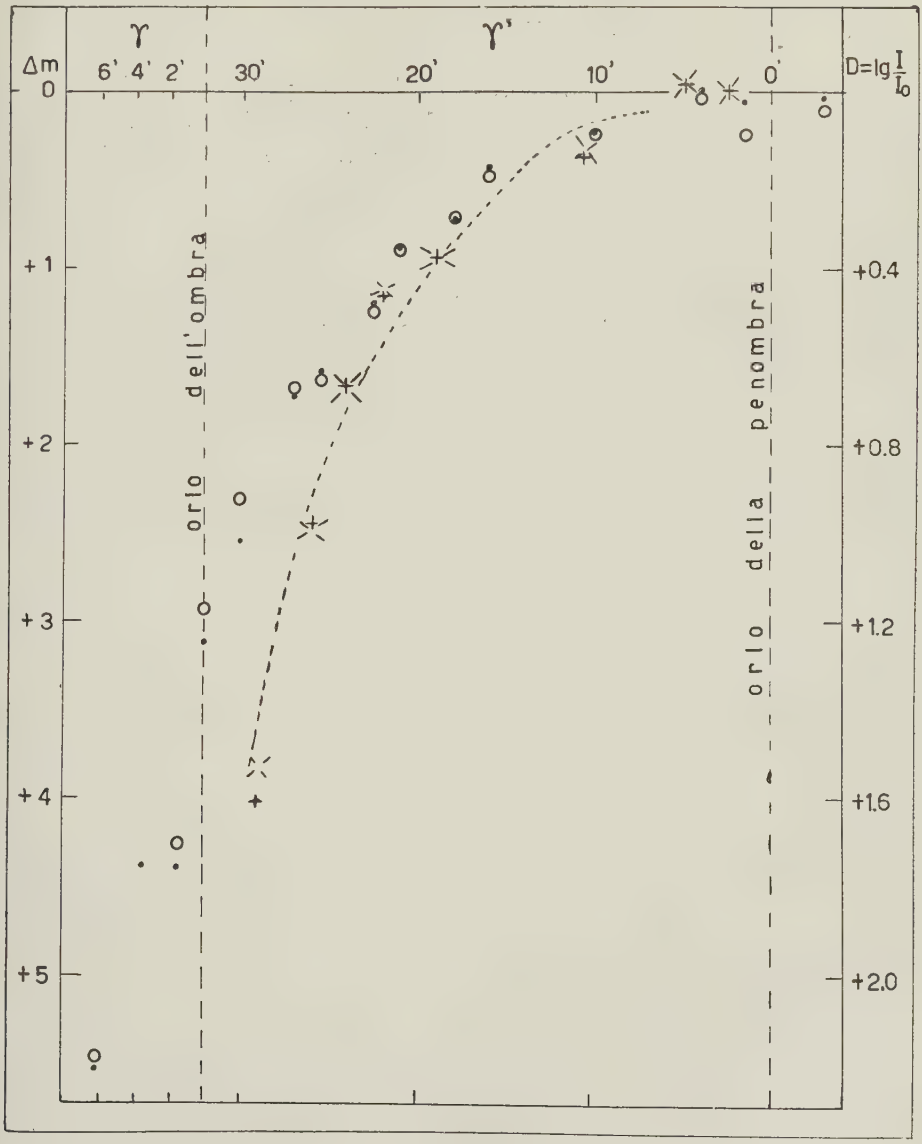


Fig. 2. – Densità della penombra; *fase di uscita.*

\+ = 1–3 ; • = 2–3 } valori osservati
× = 1–4 ; ○ = 2–4 }

----- = curva di densità della penombra (λ 4000) secondo il Link.

Nella stessa fig. 2 la curva tratteggiata rappresenta l'andamento della curva di densità nella penombra calcolata in base alla così detta teoria sem-

plificata del Link [4], nella quale si fa completamente astrazione della lieve influenza dell'atmosfera terrestre, ma si tiene conto dell'oscuramento al bordo solare. La brillanza di un punto del disco solare posto alla distanza R dal centro si può porre con buona approssimazione nella forma:

$$b(R) = 1 - \chi + \frac{\chi}{R_\odot} \cdot \sqrt{R_\odot^2 - R^2}$$

Assumendo per la zona spettrale λ 4000 il valore $\chi = 0{,}8$, si dimostra che la densità della penombra, calcolata con la teoria semplificata, dà un estremo inferiore per la densità della penombra, e perciò gli O—C *negativi* non possono in alcun modo essere spiegati con le trascurate influenze atmosferiche terrestri.

Nell'eclisse da noi osservata si vede che il punto contrassegnato col n. 1 ha un andamento che segue con grande approssimazione la curva teorica; possiamo perciò giudicare questo punto come *normale*. Al contrario il punto n. 2, situato nel *Mare Crisium*, presenta, all'avvicinarsi all'orlo dell'ombra, un sensibile *eccesso d'illuminazione*, ciò che confermerebbe le previsioni del Dubois per tale zona, ed anche le misure da noi fatte in altre eclissi. È appunto questo eccesso di illuminazione che potrebbe essere spiegato, secondo il Link, dall'aumento della componente ultravioletta e corpuscolare solare, che tende fortemente a prevalere in vicinanza dell'orlo dell'ombra.

(4) Cfr. F. LINK, loc. cit., Tabella di p. 66. Questa Tabella permette di determinare la densità $D = -\log I$ in un luogo della penombra alla distanza γ dall'orlo dell'ombra per ogni assegnato valore di χ. Con I s'intende l'intensità luminosa di un punto lunare riferita all'intensità dello stesso punto fuori eclisse. Per avere il Δm teorico occorre moltiplicare D per 2,5.

Astrofisica teorica. — *Sulla variazione annuale del test chimico-fisico D di Piccardi e la cosmologia relativistica.* Nota (*) di ANTONIO GIÃO, presentata dal Corrisp. G. RIGHINI.

1. Abbiamo già dimostrato [1,2] come, per arrivare ad un sistema completo delle equazioni del campo, sia necessario considerare lo spazio fondamentale N-dimendionale (o varietà) V_N come una ipersuperfice di uno spazio inviluppante $(N+1)$-dimensionale V_{N+1}. Le equazioni del campo possono essere derivate per mezzo di due diversi metodi. Uno di questi metodi è una applicazione del ben noto teorema di Cartan [3], mentre nell'altro metodo si parte dalla condizione generale che le equazioni del campo omogeneo (cioè le equazioni del campo per un V_N vuoto) devono essere soddisfatte da ogni spazio con curvature media riemanniana e normale isotropiche. Le equazioni del campo possono essere scritte come segue:

$$(1)\qquad \begin{cases} a) \quad R_{ik} - \frac{1}{2}(R+\lambda) g_{ik} = T_{ik}, \\ b) \quad S_{ik} - \frac{1}{2}(S+\mu)\,\omega_{ik} = U_{ik}, \\ c) \quad G_{ijkl} = \overline{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}\, X^{\alpha}_{,i}\, X^{\beta}_{,j}\, X^{\gamma}_{,k}\, X^{\delta}_{,l}, \\ d) \quad C_{ijk} = -\, n^{\alpha}\, \overline{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}\, X^{\beta}_{,i}\, X^{\gamma}_{,j}\, X^{\delta}_{,k}, \end{cases}$$

con i seguenti significati dei diversi simboli: g_{ik} e ω_{ik} sono i tensori metrici interno ed esterno della ipersuperficie V_N di V_{N+1}; R_{ik} e S_{ik} sono i tensori di Ricci formati rispettivamente con g_{ik} e ω_{ik}; R e S gli scalari di Ricci formati con g_{ik} e ω_{ik}; λ e μ due parametri cosmologici che si comportano nel caso generale come funzioni scalari; G_{ijkl} e il tensore di Gauss; C_{ijk} il tensore di Codazzi; $\overline{R}_{\alpha\varrho\gamma\delta}$ il tensore di Riemann-Christoffel di V_{N+1} su V_N; n^{α} le componenti controvarianti del vettore unità normale a V_N in V_{N+1}; $X^{\alpha}_{,i}$ $(\alpha = 1, 2, \cdots, N+1;\ i = 1, 2, \cdots, N)$ le derivate delle coordinate X^{α} in V_{N+1} rispetto alle coordinate x^i in V_N; T_{ik} e U_{ik} i tensori momento-energia della «materia» ed «elettricità» (U_{ik} è la sorgente del potenziale elettromagnetico generalizzato descritto da ω_{ik}, proprio come T_{ik} è la sorgente del potenziale gravitazionale generalizzato descritto da g_{ik}). Le equazioni $(1, c, d)$

(*) Pervenuta all'Accademia il 26 luglio 1958.

(1) A. GIÃO, «Portugaliae Physica», *2*, pp. 1–98, (1946); «Journal de Phys. et Rad.», *10*, pp. 240–249 (1949); *12*, pp. 31–40, e 99–106 (1951); «Physical Rev.», *76*, pp. 764–768 (1949); «Comptes Rendus Acad. Sc. Paris», diverse Note nei vol. 224 e 225 (1947), 226 (1948), 228 e 229 (1949), 230 e 231 (1950).

(2) A. GIÃO, *Le problème du temps en Cosmologie relativiste*, «Mem. Soc. Astr. It.», Supplementi, 2, 1957.

(3) E. CARTAN, «J. de Math. p. et appliq.», *1*, pp. 141–203 (1922).

sono le equazioni di compatibilità di Gauss e Codazzi che devono essere soddisfatte dato che V_N è una ipersuperficie.

2. L'analisi del sistema (1) delle equazioni del campo conduce all'importante risultato che ogni soluzione non banale necessariamente appartiene ad uno dei due differenti tipi:

a) in uno di questi tipi, λ e μ sono costanti ed *il contenitore di ogni soluzione non banale è uno spazio quadridimensionale di classe 1 con una metrica interna iperbolica normale.* In altre parole: i contenitori delle soluzioni di questo tipo sono cronotopi quadridimensionali. Una di queste soluzioni deve essere considerata come corrispondente al nostro universo fisico quadridimensionale;

b) nell'altro tipo di soluzioni non banali, λ e μ sono funzioni scalari ed i *contenitori sono spazi tridimensionali di classe* > 1 *con metrica interna ellittica.* Questi contenitori sono ipersuperfici dei contenitori quadridimensionali delle soluzioni del primo tipo. Inoltre vi è una soluzione non banale tridimensionale (essa sarà chiamata *Universo tridimensionale*) che è una ipersuperficie dello spazio–tempo dell'Universo fisico ed ha la proprietà fondamentale di esplorare o « scanning » successivamente l'Universo fisico, introducendo così in esso una evoluzione, una successione, in altre parole un tempo genuino (per ulteriori dettagli vedere [2]). Si può dire che l'Universo tridimensionale e « l'orologio cosmico » dell'Universo fisico quadridimensionale.

3. Vi è una fondamentale interazione fra gli Universi tridimensionale e fisico [2]. L'azione dell'Universo fisico sull'Universo tridimensionale è completamente evidente dal solo fatto che il secondo Universo è una ipersuperficie del primo. Le corrispondenti reazioni dell'Universo tridimensionale sull'Universo fisico prende posto attraverso le sorgenti di energia che corrispondono alla non conservazione dei tensori momento–energia dell'Universo tridimensionale. *I parametri cosmologici di questo Universo sono funzioni scalari*; in conformità, i corrispondenti tensori momento–energia non sono identicamente conservativi dato che noi qui abbiamo:

$$(2) \qquad T^{ij}_{,j} = -\frac{1}{2} g^{ij} \lambda_{,j} \quad ; \quad U^{ij}_{,j} = -\frac{1}{2} \omega^{ij} \mu_{,j} .$$

Consideriamo più dettagliatamente il tensore T_{ik} dell'Universo tridimensionale applicando alla precedente relazione per T_{ik} l'operatore della divergenza scalare:

$$(3) \qquad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g}\, T^{ij}_{,j}) = -\frac{1}{2} \Delta\lambda \equiv \varepsilon .$$

Questa relazione definisce la densità (ε) delle sorgenti dell'azione dell'Universo tridimensionale sull'Universo fisico [2]. Dato che ε non tende a zero, l'equazione di continuità *per l'Universo fisico* deve coinvolgere un termine dipendente da queste sorgenti. Quindi questa equazione assume

la forma seguente, separando la coordinata temporale t dalle coordinate spaziali x^j ($j = 1, 2, 3$):

$$(4) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{g}\,\rho_0^*\,\frac{dt}{ds}\right) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sqrt{g}\,\rho_0^*\,\frac{dx^j}{ds}\right) = -\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}\,\varepsilon\sqrt{g},$$

dove ρ_0^* è la densità dell'energia, dx^j/ds il vettore velocità e Λ la costante cosmologica dell'Universo fisico ($1/\sqrt{\Lambda}$ giuoca qui la parte di una unità naturale di lunghezza che deve essere introdotta nella (4) per ottenere una equazione omogenea adimensionale). Integrando la (4) in un volume tridimensionale V limitato da una superficie σ si ottiene:

$$(5) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_V \sqrt{g_{44}}\,\rho_0^*\,\frac{dt}{ds}\,dv + \int_\sigma \sqrt{g_{44}}\,\rho_0^*\,u^n\,d\sigma = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}\int_V \sqrt{g_{44}}\,\varepsilon\,dv,$$

ove u^n denota la componente del vettore velocità normale a σ. Notiamo che

$$\frac{dt}{ds} = \sqrt{1-\beta^2}/\sqrt{g_{44}},$$

il simbolo β denotando il fattore classico di Lorentz. Introducendo la notazione η per il valore medio

$$\eta = \frac{\int_V \sqrt{1-\beta^2}\,\rho_0^*\,dv}{\int_V \rho_0^*\,dv},$$

l'equazione (5) diviene

$$(6) \qquad \eta\,\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho_0^*\,dv + \left(\int_V \rho_0^*\,dv\right)\frac{\partial \eta}{\partial t} + \int_\sigma \sqrt{g_{44}}\,\rho_0^*\,u^n\,d\sigma = -\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}\int_V \sqrt{g_{44}}\,\varepsilon\,dv.$$

Questa equazione venne da noi impiegata per l'analisi della creazione e distruzione della materia alla scala cosmologica, cioè, secondo la nostra teoria, ad una delle manifestazioni dell'azione dell'Universo tridimensionale sull'Universo fisico.

4. Vogliamo ora mostrare la possibilità di mettere in relazione la variazione annuale di uno dei tests differenziali chimico-fisici [4] di Piccardi, il cosidetto test D, con le precedenti considerationi. In altre parole noi vogliamo tentare di dimostrare che *è possibile considerare la variazione annuale del test D di Piccardi come una manifestazione del flusso di energia rappresentante l'azione dell'Universo tridimensionale sull'Universo fisico.* Per questo scopo consideriamo un piccolo volume sferico V di raggio r in cui il coefficiente metrico g_{44} (potenziale gravitazionale), come la densità e la velocità della

(4) G. PICCARDI, «Archiv fur Meteorologie, Geophysik und Bioklimatologie», B. 6, 486 (1955), e molte altre pubblicazioni.

materia possono essere considerate come costanti. Applicando l'equazione (6) a questo volume, l'integrale superficiale tende a zero e noi semplicemente otteniamo:

$$\eta \frac{\partial \rho_o^*}{\partial t} + \rho_o^* \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{3}{4\pi r^3} \frac{\sqrt{g_{44}}}{\sqrt{\Lambda}} \int_V \varepsilon \, dv. \tag{7}$$

Ricordiamo un risultato ottenuto nel lavoro [2], e cioè: *il tensore* T_{ik} *dell'Universo tridimensionale deve essere considerato come un tensore di puro sforzo.* Supponendo che la sua parte principale sia uno sforzo di pressione, facilmente deduciamo dalla (3):

$$\varepsilon = -\frac{8\pi K}{c^4} \Delta p$$

ove p *è la pressione nell'Universo tridimensionale*, c la velocità della luce e K la costante newtoniana di gravitazione. L'equazione (7) allora diventa:

$$\eta \frac{\partial \rho_o^*}{\partial t} + \rho_o^* \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\sigma K}{r^3 c^4} \frac{\sqrt{g_{44}}}{\sqrt{\Lambda}} \int_\sigma \left(\nabla p \cdot \vec{n}\right) d\sigma, \tag{8}$$

$\vec{n}$ denotando il vettore unitario normale a σ. Siccome V è considerato piccolo, noi possiamo scrivere semplicemente:

$$\nabla p = (\nabla p)_o + [\nabla (\nabla p)]_o \cdot \vec{r}.$$

Notando con x la normale alle superfici iso–p, la relazione (8) diviene:

$$\eta \frac{\partial \rho_o^*}{\partial t} + \rho_o^* \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{8\pi K}{c^4} \frac{\sqrt{g_{44}}}{\sqrt{\Lambda}} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} .$$

Essa può essere semplificata notando che il termine dipendente da $\partial\eta/\partial t$ è ovviamente trascurabile e che $g_{44} \simeq c^2$ e $\eta \simeq 1$. Conseguentemente:

$$\frac{\partial \rho_o}{\partial t} = \frac{c}{\sqrt{\Lambda}} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} . \tag{9}$$

Il simbolo ρ_o denota qui la densità energetica con le dimensioni classiche $ML^{-1}T^{-2}$ ($\rho_o = c^4 \rho_o^*/8\pi K$). Siccome p deve qui essere considerato come il campo di pressione a grande scala nell'Universo tridimensionale, uno sviluppo in serie di $p(x)$ darà alla (9) la forma seguente

$$\frac{\partial \rho_o}{\partial t} = bx(t) + \frac{c}{\sqrt{\Lambda}} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial^2 x^2}\right)_a, \tag{10}$$

b denotando la costante

$$\frac{c}{\sqrt{\Lambda}} \left(\frac{\partial^3 p}{\partial x^3}\right)_a$$

e l'indice α il valore delle diverse quantità per una posizione iniziale arbitraria ($x = 0$) del centro di V. La precedente relazione equivale a

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = b \int^{t} W_x \, dt + \frac{c}{\sqrt{\Lambda}} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right)_a , \tag{11}$$

dove W_x denota le componenti x della velocità $\vec{W}$ di V nello spazio. Questa relazione dimostra chiaramente l'influenza della variazione della velocità del laboratorio nello spazio sulla intensità $\partial \rho_0 / \partial t$ dell'azione dell'Universo tridimensionale sui processi fisici e chimico-fisici svolgentisi in V.

Piccardi [5] ha sottolineato l'importantissima proprietà secondo cui la variazione annuale dei risultati del suo test D è simile alla variazione annuale della velocità lineare della Terra nel suo moto elicoidale nello spazio (moto risultante dal moto annuale della Terra attorno al Sole e dal moto del Sole nello spazio galattico). La relazione (10) chiaramente spiega questo risultato in modo molto semplice, dato che la funzione $x(t)$ della (10) ovviamente presenta una variazione annuale corrispondente al moto elicoidale della Terra, stabilito che il campo di pressione a grande scala dell'Universo tridimensionale è considerato quasi stazionario (che è una ipotesi molto naturale dal punto di vista cosmologico).

Il numero percentuale rappresentante i risultati dei tests di Piccardi (sempre da Lui denotato col simbolo °/₀T) è chiaramente correlato col nostro $\partial \rho_0 / \partial t$ e noi desideriamo investigare questa quantità da questo punto di vista. Si può già dire che molto probabilmente $\partial \rho_0 / \partial t$ è, come prima approssimazione, proporzionale a °/₀T del test D. Conseguentemente, il massimo ed il minimo della variazione annuale di °/₀T nel test D deve ovviamente coincidere, secondo la (10), col massimo ed il minimo della funzione $x(t)$. Questa funzione è la lunghezza percorsa dal laboratorio nello spazio misurata lungo la normale alle superfici isobariche del campo a grande scala p. Inoltre, siccome il valor medio annuale di °/₀T del test D è diverso dal 50 °/₀, il valor medio annuale di $\partial \rho_0 / \partial t$ deve anche essere diverso da zero, ciò che implica, in accordo con la (10), $(\partial^2 p / \partial x_2)_a \neq 0$. In altre parole, il cammino medio della Terra deve trovarsi in vicinanza di una buca od un orlo del campo a grande scala p. L'ampiezza della variazione annuale del test D è proporzionale a

$$\frac{c}{\sqrt{\Lambda}} \left(\frac{\partial^3 p}{\partial x^3} \right)_a \mathfrak{A}$$

dove $\mathfrak{A}$ è l'ampiezza della funzione periodica $x(t)$ nel moto elicoidale della Terra. L'ampiezza della variazione annuale è completamente determinata da questo moto e dalle caratteristiche a grande scala del campo p.

(5) G. PICCARDI, questi « Rendiconti », ser. 8ª, *21*, 84 (1956); id., serie 8ª, *23*, 419 (1957).

Chimica. — *Struttura dei bassi polimeri lineari dall'acetilene* (*). Nota di Erminio Lombardi e Luigi Giuffrè, presentata (**) dal Socio G. Natta.

In questo lavoro vengono riportati i risultati ottenuti sullo studio della struttura dei bassi polimeri lineari dell'acetilene ottenuti per estrazione con solventi dal poliacetilene preparato, come è descritto in una precedente Nota [1], per polimerizzazione dell'acetilene con sistemi catalitici, simili a quelli generalmente impiegati nella polimerizzazione stereospecifica delle α–olefine, ossia a base di un composto metallorganico di un metallo appartenente ad uno dei tre primi gruppi del sistema periodico e di un composto di un metallo di transizione.

Lo studio eseguito sulle frazioni polimeriche estraibili con acetone e con cloroformio del polimero ha consentito di dimostrare che i polimeri esaminati dell'acetilene contengono catene lineari a doppi legami coniugati in risonanza tra loro, del tipo:

$$(—CH=CH—CH=CH—CH=CH—)_n.$$

Preparazione dei polimeri.

Le prove di polimerizzazione sono state effettuate usando diversi sistemi catalitici come $TiCl_3$ e $AlEt_3$, alcolato di titanio ed $AlEt_3$, $TiCl_3$ e $AlEt_2Cl$, $TiCl_2$ + alcolato di titanio ed $AlEt_3$, $TiCl_3$ + alcolato di titanio e $AlEt_3$ in eptano anidro. Come verrà riferito i risultati ottenuti sulle frazioni a basso peso molecolare, appaiono indipendenti dal tipo di sistema catalitico stereospecifico da noi usato.

I polimeri, operando sotto azoto, sono stati successivamente filtrati e lavati ripetutamente con eptano a freddo per allontanare il catalizzatore solubile presente.

Il prodotto così ottenuto, previamente seccato, è stato macinato in mulino a palle in atmosfera inerte; quindi è stato a lungo trattato a freddo con una soluzione acquosa di HCl (1 : 10) per eliminare le impurezze inorganiche dovute al complesso catalitico ancora parzialmente legato alle catene polimeriche.

I polimeri sono stati poi sottoposti a prolungato lavaggio con acqua fino a scomparsa dello ione cloro nelle acque di lavaggio.

Dopo filtrazione ed ulteriore essiccamento sono stati infine sottoposti ad estrazione con acetone all'ebollizione.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano.
(**) Nella seduta del 10 giugno 1958.

Tutte le operazioni sono state effettuate in ambiente inerte allo scopo di evitare alterazioni dei prodotti instabili all'aria.

Malgrado i ripetuti lavaggi acidi una piccola quantità di composto inorganico rimane nel polimero sottoposto ad estrazione con acetone all'ebollizione. Il tenore in ceneri dopo combustione risulta infatti difficilmente al disotto dello 0,5 %.

Esame dei prodotti estraibili.

Le soluzioni di poliacetilene in acetone sono state cromatografate su colonna di allumina, eluendo poi con cloroformio.

Le frazioni così ottenute presentano colorazioni varianti dal giallo chiaro, per le prime frazioni eluite, fino al rosso arancione per le ultime frazioni.

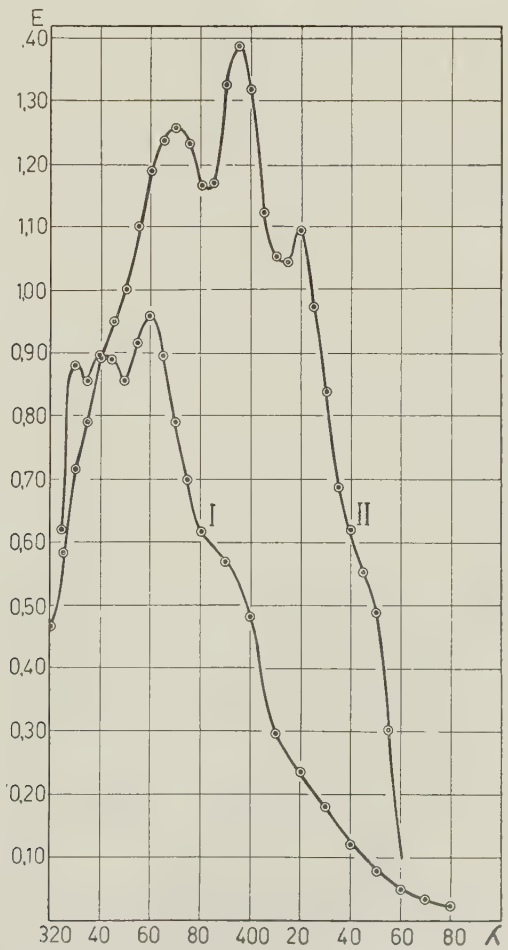


Fig. 1. – Spettri di assorbimento della frazione di poliacetilene solubile in acetone:

curva I – prodotto grezzo;
curva II – prodotto cromatografato su colonna di Al_2O_3.

Gli spettri di assorbimento ultravioletto dei prodotti ottenuti nelle diverse prove sono tutti risultati praticamente uguali tra loro.

Tali spettri (figg. 1 e 2) presentano analogie con quelli di alcuni tipi di polieni ed in particolare dei polieni noti in letteratura [2] del tipo $CH_3—(CH=CH)_n—CH_3$. In effetti, le lunghezze d'onde corrispondenti ai massimi superiori d'assorbimento di tali dimetilpolieni sono paragonabili con le grandezze corrispondenti da noi osservate (Tabella I).

Fig. 2. – Spettri di assorbimento della frazione di poliacetilene solubile in acetone:

curva I – prodotto cromatografato su colonna di Al_2O_3;
curva II – prodotto ottenuto per eluizione con $CHCl_3$.

Dal confronto tra i risultati riportati in Tabella I si dovrebbe dedurre che i poliacetileni da noi separati contengono fino a circa 12 doppi legami coniugati.

Si deve tuttavia considerare che le osservazioni da noi riportate prescindono dalla natura dei gruppi terminali delle catene poliacetileniche.

Tenuto conto del meccanismo di polimerizzazione di altri idrocarburi non saturi (ad esempio etilene) con i catalizzatori da noi usati e tenuto conto della probabile minore dissociabilità della catena polimerica dal complesso

catalitico, è prevedibile che la catena polimerica si distacchi dal complesso catalitico solo dopo aggiunta dei reattivi usati per la depurazione dei polimeri:

$$[Cat]—R+CH\equiv CH \longrightarrow [Cat]—CH=CH—R$$

$$[Cat]—(CH=CH)_n—R+CH\equiv CH \longrightarrow [Cat]—(CH=CH)_{(n+1)}—R$$

$$[Cat]—(CH=CH)_{(n+1)}—R+HCl \longrightarrow [Cat]Cl+CH_2=CH—(CH=CH)_n—R\ .$$

Si può pertanto essere indotti a ritenere che le catene di poliacetilene contengano un gruppo terminale vinilico ed uno alchilico.

I poliacetileni solubili da noi separati presentano una reazione caratteristica (saggio con acido solforico concentrato alla tocca) delle vitamine a struttura lineare contenenti sequenze di doppi legami coniugati (carotene, licopina...) [3].

Tabella I.

	Numero di doppi legami coniugati presenti	Numero di doppi legami coniugati effettivi (*)	max in $m\mu$	max per i poliacetileni ($m\mu$)
$H_3C—(CH=CH)_n—CH_3$				
n				
2	2	2	227	
3	3	3	263	
4	4	4	299	
5	5	5	326	330
6	6	6	352	360
8	8	8	395,5	395
9	9	9	412,5	
10	10	10	419	420
$C_6H_{13}—(CH=CH)_{10}—C_6H_{13}$	10	10	423	
$C_{30}KW$	7	7	374	370
β-carotina	11	11,5	452	450
3-deidro-β-carotina	12	12	461	
3,3'bis-deidro-β-carotina	13	12,5	471	475
Licopina	11	12,5	469	
Omo-β-carotina	12	12,5	466	
Decapreno-β-carotina	15	16,5	498	

(*) Il valore di n è stato corretto, tenendo conto dell'influenza dei gruppi terminali ed intermedi [2].

Risulta quindi che le frazioni solubili in acetone del poliacetilene ottenuto per polimerizzazione dell'acetilene con i processi di catalisi coordinata con catalizzatori contenenti metalli di transizione e composti metallorganici, contengono delle catene lineari di diversa lunghezza.

In tali polimeri sono state identificate catene contenenti fino a 12 doppi legami coniugati.

I risultati sui polimeri a basso peso molecolare confermano l'ipotesi esposta in una precedente Nota e fanno ritenere che anche i polimeri insolubili ad alto peso molecolare che accompagnano i prodotti solubili qui esaminati, contengano catene lineari con lunghe sequenze di doppi legami coniugati in risonanza tra loro.

Desideriamo ringraziare il prof. G. Natta per averci suggerito il presente lavoro, nel corso del quale ci ha costantemente seguiti e consigliati.

Bibliografia.

[1] G. Natta, G. Mazzanti, P. Corradini, «Rend. Acc. Naz. dei Lincei», Nota presentata nella stessa seduta.

[2] F. Bohlmann e H. J. Mannhardt, «Ber.», *89*, 1307 (1956)

[3] Rondoni, *Biochimica*, vol. I, 142.

Mineralogia. — *Prima segnalazione in natura della zeunerite fra i minerali secondari di uranio della Val Rendena* (*). Nota (**) di CARLO L. GARAVELLI e FIORENZO MAZZI, presentata dal Socio G CAROBBI.

Durante una serie di ricerche sui minerali secondari di uranio presenti nei giacimenti del Trentino sud-occidentale [1] è stato rinvenuto un campione che, attraverso ricerche roentgenografiche, spettrografiche ed ottiche, è stato possibile identificare con la zeunerite, arseniato di uranile e rame idrato $Cu(UO_2)_2(AsO_4)_2 \cdot 10\text{–}16\ H_2O$, composto la cui presenza in natura non era stata finora mai accertata.

Come è noto, la zeunerite appartiene alla serie delle « miche di uranio », fosfati od arseniati doppi di uranile e di un metallo bivalente (Ca , Cu , Mg , Fe , Ba) con contenuto variabile di H_2O. Questi composti presentano un reticolo a strati, nel quale le molecole di acqua (ed i cationi) occupano posizioni interstrato. Queste molecole di acqua hanno un comportamento zeolitico e il loro numero può variare con continuità da 16 (completa idratazione) fino ad 8, senza variazioni di simmetria reticolare, avendosi solo una leggera contrazione del periodo c_o, perpendicolare agli strati.

Una ulteriore diminuzione del contenuto di H_2O conduce ad una modificazione del reticolo, che passa dal gruppo spaziale I4/mmm (con due molecole nella cella elementare) al gruppo P4/nmm (con una molecola nella cella elementare); mentre il periodo a_o resta pressoché invariato, il periodo c_o scende a meno della metà (da circa 20 Å a circa 8,7 Å). Come è noto, le miche di uranio così disidratate sono denominate con il prefisso *meta–*.

Il fenomeno di disidratazione è di regola reversibile; solo nel caso dell'arseniato di uranile e rame non è possibile riscontrare questa reversibilità [2]. Tale fatto può giustificare l'assenza in natura della fase a maggiore stato di idratazione, alla quale, per ragioni di parallelismo nella nomenclatura, si è convenuto [3] di riservare il nome « zeunerite », in attesa che potesse venire dimostrata la sua eventuale presenza in natura.

Le conoscenze attuali sulle proprietà di questo composto derivano pertanto solamente dallo studio di materiale sintetico [2]. Il solo minerale che potrebbe avvicinarsi alla zeunerite è stato studiato da C. Frondel [4] e da lui ritenuto simile alla uranospatite descritta da Hallimond [5]: esso proviene da Wheal Basset (Cornovaglia) e la sua composizione risulta $Cu(UO_2)_2\ [(As, P)O_4]_2 \cdot 11\ H_2O$ con $As/P = 2$. Tuttavia i dati ottici e roentgenografici lasciano alquanto perplessi: il suo reticolo è del tipo metazeunerite, per quanto

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio Geochimico del C.N.R.N. presso l'Istituto di Mineralogia, Petrografia e Geochimica dell'Università di Firenze.

(**) Pervenuta all'Accademia il 22 luglio 1958.

ciò sia in contrasto con la composizione chimica; gli indici di rifrazione sono molto bassi ($n_e \cong 1{,}56$; $n_o = 1{,}598$), in sufficiente accordo con la formula chimica, ma incompatibili con quelli della metazeunerite od anche della metatorbernite.

Ci sembra perciò opportuno dare notizia del rinvenimento di un minerale, le cui proprietà concordano pienamente con quelle della zeunerite sintetica.

Il campione studiato proviene dal giacimento uranifero della Val Rendena. Esso venne raccolto in località Palastro, ove, quasi in superficie, furono rinvenuti sporadicamente tronchi fossili compresi entro banchi arenacei, immediatamente al di sotto della normale copertura di detriti e ciottoli. Questi tronchi avevano in media un diametro di circa 15 cm, con una lunghezza di circa 2 metri, ed erano intensamente silicizzati ed arricchiti di minerale radioattivo.

Su di un frammento di uno di questi tronchi, è stato rinvenuto il minerale che viene descritto nel presente studio. Esso si presentava sotto forma di masserelle cristalline piuttosto minute, con dimensioni lineari massime di un paio di millimetri.

Tali masserelle sono state rinvenute su due diaclasi di questo frammento, diaclasi riempite di quarzo latteo secondario in individui cristallini distinti. Il minerale di uranio si trovava deposto sopra questi cristalli di quarzo, ed era a sua volta ricoperto parzialmente da un materiale ocraceo ricco di idrossidi di ferro.

Il colore del minerale è verde smeraldo, con lucentezza sericea sui piani di sfaldatura molto evidenti. Sono state notate eccezionalmente alcune minute associazioni parallele di cristallini tabulari limpidi, privi peraltro di contorni cristallografici definiti, aventi dimensioni lineari di 200–300 μ, con uno spessore di circa 40 μ.

Il minerale non mostra apprezzabile fluorescenza in luce ultravioletta.

La piccolezza, l'imperfezione morfologica e la fragilità dei cristalli hanno impedito ricerche goniometriche.

Al microscopio il minerale appare birifrangente uniassico. Si osservano lamine di sfaldatura basale, a contorno irregolare, dalle quali emerge praticamente centrato l'asse ottico. Il colore è verde molto chiaro, il segno ottico è negativo e l'indice di rifrazione $n_o = 1{,}614$. Non è stato possibile valutare l'altro indice di rifrazione data l'esilità delle lamine di sfaldatura.

L'insufficienza di materiale non ha permesso l'analisi chimica quantitativa. L'identificazione è stata pertanto affidata essenzialmente a ricerche roentgenografiche e spettrografiche.

Per l'esecuzione di queste ultime, abbiamo potuto separare circa 0,5 milligrammi di minerale accuratamente purificato al binoculare. Data l'esigua quantità di materiale, si è stati costretti a rinunziare all'esecuzione di riprese separate, da condursi rispettivamente nelle condizioni più favorevoli alla rivelazione dei metalli in un caso, e del fosforo e dell'arsenico nell'altro.

Abbiamo quindi eseguito un'unica ripresa sul campione. Le condizioni operative adottate nel nostro laboratorio spettrografico per l'esame di piccoli campioni di materiali uraniferi, sono le seguenti:

spettrografo Zeiss Q–24
elettrodi: superiore (anodo): ø 3 mm, forma piana,
inferiore (catodo): cavità ø 0,6 mm e profondità 5 mm; ø esterno 2 mm,
eccitazione: in arco continuo; tens. 220 V; corrente 6–8 A (10″ iniziali a 4 A); innesco mediante scintilla in a. f.,
ottica: immagine dell'arco proiettata su diaframma intermedio di 5 mm; fenditura 6 μ.

Gli spettri sono stati registrati su una lastra ad alto contrasto e a grana sottile (Gevaert Process Extra Ortocromatica) sviluppata in D 19 per 9′ a 18°C.

Sono stati ripresi lo spettro del minerale e, per confronto, quelli di U_3O_8 e di torbernite, sia pura, sia diluita 1 : 5 con U_3O_8. Ogni ripresa è stata protratta in media per 1′ 15″, in modo che la volatilizzazione del campione avvenisse quasi integralmente, per rendere possibile una valutazione comparativa della intensità delle righe. L'uniformità tra gli spettri dell'uranio così ottenuti garantisce l'attendibilità di tale confronto.

Lo spettrogramma del nostro minerale ha rivelato la presenza di rame (in quantità simile a quella della torbernite pura), arsenico ed uranio quali costituenti maggiori, e soltanto piccole quantità (meno dell'1 %) di fosforo e calcio. Sono risultati pure presenti silicio e ferro verosimilmente dovuti ad impurezze.

Poiché dalle caratteristiche esteriori e dalle proprietà ottiche risultava praticamente certo trattarsi di un termine della serie delle miche di uranio, l'unico minerale noto a cui, in base ai risultati spettrografici, potevasi attribuire il nostro campione, era dato dalla metazeunerite. Ciò sarebbe stato tuttavia in contrasto con l'assenza della fluorescenza ai raggi ultravioletti e con il valore dell'indice di rifrazione n_o, che per la metazeunerite risulta compreso tra 1,629 e 1,651. Abbiamo pertanto ritenuto possibile che si trattasse di zeunerite, per la quale si ha [2]:

$n_o = 1{,}602$ per 16 H_2O di cristallizzazione
$n_o = 1{,}610$ per 10 H_2O.

Per via roentgenografica sarebbe stato possibile ottenere una conferma di questa supposizione. Infatti, in primo luogo gli spettri di polvere delle miche di uranio a maggiore grado di idratazione sono nettamente diversi da quelli delle corrispondenti fasi « meta »; inoltre è possibile distinguere, a parità di condizioni di idratazione, i composti contenenti fosforo da quelli contenenti arsenico mediante una valutazione del periodo reticolare a_o. Ciò in quanto la sostituzione fosforo–arsenico provoca un aumento di questo

periodo, come risulta dal seguente prospetto, costruito utilizzando i dati accettati da Strunz [6]:

saléeite	$a_0 = 6{,}98$	$\Delta a_0 = 0{,}18$ Å;
novacekite	$a_0 = 7{,}16$	
metatorbernite	$a_0 = 6{,}96$	$\Delta a_0 = 0{,}17$ Å;
metazeunerite	$a_0 = 7{,}13$	
meta–autunite	$a_0 = 6{,}99$	$\Delta a_0 = 0{,}20$ Å;
metauranospinite	$a_0 = 7{,}19$	
metaidrogenoautunite	$a_0 = 7{,}02$	$\Delta a_0 = 0{,}14$ Å.
troegerite	$a_0 = 7{,}16$	

Per ottenere uno spettro di polvere di accuratezza sufficiente a determinare con precisione le costanti reticolari è stato utilizzato un diffrattometro XRD–5 della General Electric, operando alla velocità del goniometro di 0,2° al minuto, con la radiazione CuK_α ed adottando una tecnica recentemente descritta [7] per l'impiego di microcampioni: nel nostro caso meno di un mg. La misura accurata degli angoli di diffrazione è stata fatta con riferimento alle righe del quarzo, presente nel campione, e del fluoruro sodico di supporto, con una precisione di $\pm$ 0,02° in 2 ϑ.

Confermando l'ipotesi precedentemente espressa, i diffrattogrammi non solo hanno escluso trattarsi di un termine della serie « meta », ma hanno anche confermato che il campione non è una torbernite. Essi hanno invece mostrato una identità quasi perfetta con quello della zeunerite artificiale ottenuto dalla Weiss Frondel [8], come risulta dalla Tabella I.

La determinazione delle costanti reticolari effettuata attraverso questi diffrattogrammi ha permesso di confermare, dal valore del periodo a_0, la presenza dell'arsenico in luogo del fosforo. Sono state anche calcolate contemporaneamente le costanti reticolari della zeunerite artificiale, dati che mancavano nella letteratura.

Per questo scopo, abbiamo proceduto anzitutto ad indicizzare lo spettro di polvere della torbernite [8], in base alle costanti reticolari note per questo minerale [6]. Poiché torbernite e zeunerite sono isostrutturali, sulla scorta di questi dati e tenendo in considerazione i rapporti di intensità dei vari riflessi, abbiamo potuto successivamente indicizzare gli spettri delle zeuneriti artificiali [8] e quello del minerale in esame. Il calcolo è stato condotto con il metodo dei minimi quadrati, assumendo che, senza commettere un errore numericamente troppo sensibile, la distribuzione di $\text{sen}^2\,\vartheta$ potesse ritenersi gaussiana.

I dati utilizzati sono riassunti nella stessa Tabella I. I risultati del calcolo dànno i seguenti valori (in Å):

Zeunerite di Val Rendena	Zeunerite artif. 10 H_2O	Zeunerite artif. 16 H_2O	Torbernite
a_0 7,173	7,196	7,189	7,06
c_0 20,801	20,764	20,772	20,5

TABELLA I.

hkl	Zeunerite di Val Rendena		Zeunerite artif. 10 H_2O		Zeunerite artif. 16 H_2O		Torbernite [8]	
	d	I/I_o	*d*	I/I_o	*d*	I/I_o	*d*	I/I_o
002	10,385	100	10,33	90	10,65	100	10,3	100
101	6,780	10	6,82	40	6,86	50	6,61	40
004	5,195	40	5,27	50	—	—	5,18	30
110	5,070	14	5,07	70 *df*	5,04	80	4,94	90
103	4,999	16						
112	4,557	4	4,58	20	4,55	20	4,48	40
105	3,605	30	3,60	100	3,59	90	3,58	90
200	3,583	20					3,51	80
202	3,390	15	3,40	60	3,39	70	—	—
211	3,168	4	3,18	20	3,18	20	3,10	10
204	2,950	8	2,94	40	2,93	40	2,90	30
213	2,910	6	—	—	—	—	2,85	20
116	2,860	2	2,86	10	2,86	40	—	—
107	2,750	7	2,75	20	2,73	30	2,73	10
215	2,538	7	2,54	30	2,54	40	2,48	10
220								
222	2,461	4	2,47	30	2,47	40	2,41	20
301	2,370	1	—	—	2,38	10	2,32	10
310	2,264	6	2,27	30	2,27	30	2,24	10
303								
109	2,200	6	2,19	30	2,19	40	2,158	20
217	2,181	5						
0.0.10	2,083	8	2,07	40	2,08	50	2,040	30
314	2,076	8						
305								
1.1.10	1,928	12	1,926	40	1,926	60	1,917	10
219	1,876	2	—	—	1,873	20	—	—
307	1,863	1	1,869	10	—	—	—	—

df = riga diffusa.

Le considerazioni che potrebbero farsi a commento di questi dati risultano limitate dal fatto che, naturalmente, non possiamo esprimere un giudizio sulla precisione dei valori calcolati per la zeunerite sintetica. Resta comunque confermato che, in accordo con i dati spettrografici, il rapporto As/P deve considerarsi elevato.

Per quanto concerne il contenuto in acqua, che i nostri dati roentgenografici indicherebbero piuttosto elevato, riteniamo che poco possa dirsi con sicurezza. Appare tuttavia più probabile che tale valore non debba discostarsi troppo da 10 molecole, sia considerando il valore dell'indice di rifrazione n_o, sia perché la zeunerite sintetica con più di 10 molecole di H_2O si disidrata spontaneamente fino a raggiungere l'equilibrio al contenuto suddetto [2].

Concludendo, ci sembra che l'esistenza in natura della zeunerite, pur costituendo un fatto eccezionale a causa della irreversibilità della disidratazione, possa ritenersi dimostrata con sicurezza.

Bibliografia.

[1] C. L. Garavelli e F. Mazzi, in «Studi e ricerche della Divisione Geomineraria del C.N.R.N.», Roma (1958).
[2] J. Weiss Frondel, «Am. Min.», XXVI, 249 (1951).
[3] C. Palache, H. Berman e C. Frondel, *Dana's System of Mineralogy*, vol. II, New York (1951).
[5] C. Frondel, «Min. Mag.», XXX, 343 (1954).
[5] A. F. Hallimond, «Min. Mag.», XVII, 221 (1915).
[6] H. Strunz, *Mineralogische Tabellen*, Leipzig (1957).
[7] C. L. Garavelli e F. Mazzi, «Atti Fond. G. Ronchi», XII (1957).
[8] C. Frondel, D. Riska e J. Weiss Frondel, «U. S. Geol. Surv. Bull.», n. 1036–G (1956).

Zoologia. — *I fenomeni di autolisi nella metamorfosi di* Bufo vulgaris (*). Nota (**) di ANITA BALDISSEROTTO e BRUNA UGURGIERI, presentata dal Socio G. COTRONEI.

INTRODUZIONE.

La metamorfosi degli Anfibi anuri si compie attraverso complesse modificazioni dell'intero organismo della larva, nelle quali completi sistemi organici vengono demoliti e ricostruiti per le esigenze della vita terrestre. La dinamica di queste trasformazioni presenta un interesse notevole da molteplici punti di vista: morfologici, ecologici e biochimici in quanto è possibile vedere come alle modificazioni organologiche, necessarie per l'ambiente terrestre, si accompagnino nuove condizioni biochimiche. Gli studi compiuti in questo Istituto da Urbani e Allievi dimostrano che i cicli di sviluppo degli organismi sono accompagnati da cambiamenti delle attività enzimatiche ed è possibile riconoscere il significato funzionale di determinati stadi morfologici dal particolare comportamento di molti enzimi e composti organici.

Nel caso particolare della metamorfosi, dove avvengono demolizioni di strutture e la loro ricostruzione su di un nuovo disegno, una notevole importanza ha l'andamento dei fenomeni di autolisi, come già fu messo in luce da Cotronei (1914) [1] per l'apparato digerente nei riguardi delle correlazioni di massa che si stabiliscono tra i vari organi; manifestazioni evidenti di autolisi locali e controllate si hanno, tra l'altro, nella perforazione degli opercoli per la fuoriuscita degli arti anteriori e nel riassorbimento della coda.

Braus (1906) [2] riteneva che la perforazione degli opercoli non fosse dovuta alla pressione meccanica degli arti in accrescimento e Cotronei (1913) dimostrò [3] che la rottura di queste formazioni è indipendente dal grado di accrescimento dell'arto: Helff (1926) [4] ha ulteriormente confermato trattarsi di un fenomeno di istolisi. Così per quanto riguarda il riassorbimento della coda, che caratterizza la metamorfosi degli Anuri, Barfurth (1887) [5] pensava che lo sviluppo dell'urostilo, comprimendo i vasi caudali, provocasse l'insorgenza di fattori asfittici responsabili di questo fenomeno, ma Helff (1930 [6] asportando l'urostilo della larva prima della metamorfosi ha visto che la coda si riassorbe regolarmente. Lindeman (1929) [7] usando la tecnica dei trapianti è condotto a concludere che nella istolisi della coda entrano in gioco due componenti, una che si trova nella coda stessa ed una

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia ed Anatomia Comparata della Università di Camerino, con il contributo del C.N.R. e della Rockefeller Foundation.

(**) Pervenuta all'Accademia il 14 luglio 1958.

altra che è portata dalla corrente sanguigna e provoca la istolisi a determinati stadi della metamorfosi.

Indubbiamente, da un punto di vista generale, gli enzimi proteolitici dovrebbero essere i composti maggiormente interessati in questi fenomeni. Ciò soprattutto se si tiene conto del ruolo che viene attribuito alle proteasi intracellulari che sono state indicate, sotto il nome generico di *catepsine*, come gli agenti responsabili della autodigestione del protoplasma dopo la morte della cellula.

Questi enzimi durante la vita della cellula sarebbero in condizioni di inattività e la loro entrata in azione verrebbe determinata dalle nuove condizioni fisico–chimiche che si instaurano nel protoplasma « post mortem ».

Accanto a questa ipotesi, che attribuisce alle proteasi intracellulari il compito della autodigestione del protoplasma, ve n'è un'altra che, poggiando su numerosi dati sperimentali, lascia ritenere molto attendibile la esistenza di rapporti stretti tra la attività degli enzimi proteolitici intracellulari ed i fenomeni di sintesi proteica che si realizzano durante la vita della cellula. I numerosi lavori di Urbani e Collaboratori [8, 9, 10, 11, 12] hanno dimostrato su svariati materiali che vi è parallelismo di comportamento tra enzimi proteolitici endocellulari e tenore in acidi pentosonucleici e sia gli uni che gli altri sono rivelabili in notevole quantità quando le cellule operano spiccati fenomeni di sintesi. Brachet (1958) [13], nel suo recente trattato di biochimica cellulare, sottolinea l'interesse di questi dati che vanno integrati con le classiche osservazioni sull'argomento di Linderstrøm–Lang (1940) [14], Holter (1949) [15] e di Duspiva (1942) [16].

Per quanto riguarda lo studio delle dipeptidasi (agenti a pH alcalino) e delle proteinasi (agenti a pH acido ed alcalino) nella metamorfosi di *Bufo vulgaris* si rimanda al recente lavoro di Urbani (1957) [17], e ci limitiamo qui ad osservare quanto più strettamente concerne l'argomento della presente Nota e che cioè la proteinasi acida mostra una attività fortemente crescente, in questo periodo, sia nell'animale intero che nella coda in riassorbimento. Questi risultati possono lasciar pensare che una attività proteolitica gradatamente in incremento possa essere collegata con i fenomeni di istolisi ed autodigestione che operano nella metamorfosi.

I risultati di Urbani (1957) [17] sono stati ottenuti mettendo a reagire, a pH appropriato, l'omogenato di esemplari a vari stadi della metamorfosi con il substrato (caseina) e determinando quindi la quantità di questa proteina idrolizzata nella unità di tempo: si è in altri termini fornito il substrato al fine di rivelare l'azione enzimatica. Abbiamo ritenuto fosse interessante condurre una ricerca analoga senza fornire il substrato all'azione delle proteasi, determinando perciò la loro attività ai vari stadi della metamorfosi in base alla quantità di proteine cellulari idrolizzate nella unità di tempo in condizioni asettiche.

I dati ottenuti da questo studio vengono qui brevemente esposti.

MATERIALE E METODO.

Le larve di *Bufo vulgaris* sono state allevate in acqua corrente e nutrite esclusivamente con insalata bollita: questa alimentazione si è rivelata ottima per un regolare svolgimento dei fenomeni di accrescimento larvale e metamorfosi. Le determinazioni della attività autolitica sono state eseguite a cinque stadi contrassegnati con numeri romani: gli stessi sui quali sono stati compiuti gli studi prima riferiti.

I. – Larva al termine dell'accrescimento ponderale.
II. – Larva che ancora si alimenta, con arti posteriori accresciuti.
III. – Larva con arto anteriore sinistro fuoriuscito dall'opercolo.
IV. – Larva con i quattro arti liberi e coda in riassorbimento.
V. – Animale metamorfosato da uno, due giorni.

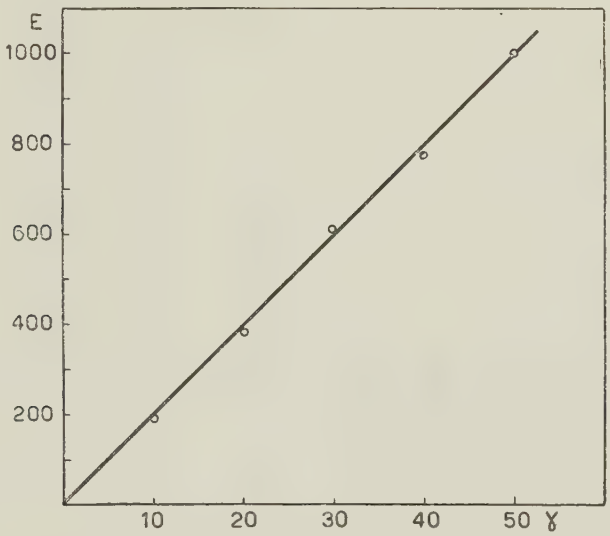


Fig. 1. – Curva di taratura del metodo colorimetrico per gli aminoacidi aromatici con il reattivo di Folin Ciocalteau. In ordinate le Estinzioni lette allo « Spectronic » a 600 mμ, in ascisse le quantità di tirosina contenute in 2,33 ml ed espresse in *gamma*.

Giova qui ricordare che dallo stadio I al V si ha una progressiva disidratazione dell'organismo ed il peso fresco si riduce da circa 140 mg a circa 50 mg (Urbani, 1957) [18].

Gli esemplari ai vari stadi sopra indicati sono stati omogenati in acqua distillata a mezzo di un omogenizzatore di vetro neutro in ragione di un animale per ml di acqua. Di solito si sono omogenati 5 esemplari in 5 ml.

Dall'omogenato appena ottenuto sono stati prelevati 200 μl ai quali sono stati aggiunti 1 ml di acqua distillata e 2 ml di acido tricloroacetico 0,3 M: il tutto è stato posto in frigidaire per una nottata. Questi prelievi eseguiti in doppio sono stati utilizzati quali *prove in bianco* al tempo zero.

Gli omogenati sono stati quindi posti in termostato a 40 °C e la autolisi bloccata dopo 6 hh e dopo 24 hh con la identica procedura eseguita per le prove in bianco.

L'acido tricloroacetico precipita le proteine non idrolizzate dell'omogenato e queste vengono allontanate dal liquido per centrifugazione a 3.000 giri per 3 minuti: si preleva quindi 1 ml del supernatante che viene addizionato con 2 ml di NaOH 0,5 N e 333 μl di reattivo di Folin Ciocalteau che mette in evidenza gli aminoacidi aromatici (Urbani e De Cesaris Coromaldi, 1954) [19], il colore che si sviluppa viene colorimetrato allo « Spectronic » a 600 mμ contro la prova in bianco. Le estinzioni lette vengono tradotte in *gamma* di tirosina su curva di taratura costruita con quantità note di questo aminoacido (fig. 1).

Risultati e conclusioni.

I risultati ottenuti da cinque serie complete di determinazioni, ciascuna delle quali eseguita in doppio, sono illustrati nel grafico (fig. 2) nel quale figurano le medie di tutti i valori. È da notarsi subito che la velocità di autolisi è decrescente dallo stadio I al V ma non vi è uno stretto parallelismo tra i dati ottenuti dopo 6 ore di incubazione e quelli dopo 24 ore. Infatti le larve dello stadio I mostrano una attività autolitica non molto diversa dopo 6 e 24 ore mentre dallo stadio II al IV si ha, in media, un raddoppio della attività autolitica nei due tempi di incubazione considerati e allo stadio V, cioè a metamorfosi ultimata, la differenza torna ad essere meno sensibile. Questo dimostra che gli stadi antecedenti la metamorfosi e gli animali metamorfosati sono caratterizzati da enzimi proteolitici con differenti caratteristiche di azione: tale risultato meriterebbe di essere analizzato a fondo perché costituisce una ulteriore prova della tesi sostenuta da Urbani che gli stadi morfologici di sviluppo sono identificabili da particolari corredi enzimatici.

Altro fatto degno di interesse che le presenti ricerche dimostrano è che la attività autolitica procede nella metamorfosi di *Bufo vulgaris* in maniera opposta alla attività proteinasica (Urbani, 1957) [17, 18]. Infatti la proteinasi acida mostra un crescente aumento durante la metamorfosi di questa specie mentre la attività autolitica si va smorzando man mano che l'animale raggiunge la sua forma definitiva.

Questi dati indicano chiaramente che le proteinasi acide studiate precedentemente da Urbani, fornendo come substrato da idrolizzare la caseina, sono degli enzimi a differente significato da quelli autolitici da noi messi in evidenza: si vede infatti che le proteine della larva che si accinge alla crisi metamorfica sono molto più sensibili alla autolisi delle proteine definitive che l'animale va gradatamente costruendo: questo è in buon accordo con alcuni dati della letteratura.

Merita a questo punto di essere ricordato un interessante lavoro di Morse (1918) [20] che costituisce un originale studio della biochimica della

metamorfosi degli Anuri. Questo autore ha saggiato le code normali di *Rana catesbeiana* in confronto alle code in riassorbimento di esemplari in metamorfosi della stessa specie, incubando l'omogenato in presenza di plasma sanguigno per una notte a 39 °C. Il dializzato ha dato in presenza di ninidrina reazione negativa per le code della larva e reazione positiva per le code in riassorbimento, dimostrandosi così una maggiore attività proteasica nelle code degli animali in metamorfosi. Questo risultato è stato confermato con metodi molto più precisi da Urbani (1957) [17] su *Bufo vulgaris* e da Weber (1957) [21] su *Xenopus laevis*.

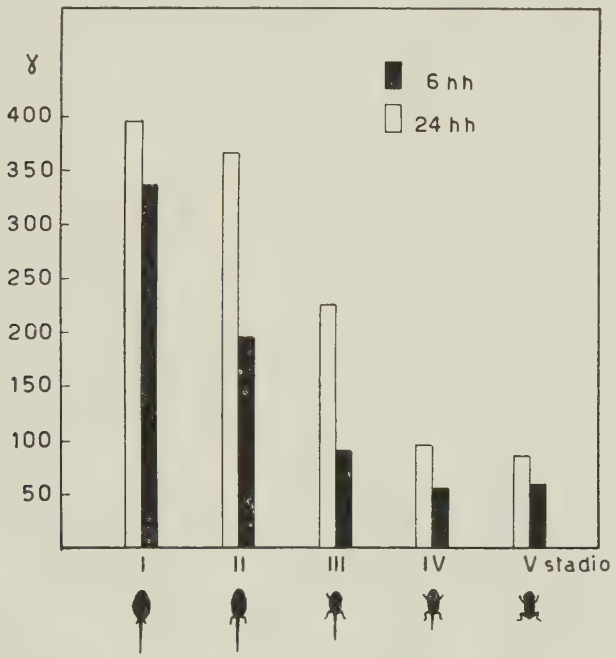


Fig. 2. – Attività autolitica di esemplari di *Bufo vulgaris* ai vari stadi della metamorfosi (vedi spiegazione nel testo). In ascisse sono indicati gli stadi con rappresentazione schematica. In ordinate la attività autolitica (dopo 6 hh e 24 hh di incubazione) espressa in *gamma* di tirosina liberata dall'omogenato di un esemplare.

Lo stesso Morse ha lavorato con animali interi studiando la autolisi senza aggiungere alcun substrato: l'esame dell'autolizzato eseguito con il Kjeldahl ha dato per gli animali in metamorfosi un aumento di circa il 60 % di azoto non proteico (vale a dire appartenente ad aminoacidi o peptidi) rispetto ai controlli (larve), *per unità di peso*. Se si osserva il grafico della fig. 2 dove i valori sono riportati per esemplare e non per unità di peso, si vede che l'attività autolitica di animali allo stadio III, dopo 24 ore di incubazione, se calcolata per unità di peso (si passa da un peso fresco di circa 140 mg dello stadio I a circa 90 mg dello stadio III) è superiore a quella dello stadio I.

Nel piano di queste ricerche, suggeriteci dal prof. Urbani, era previsto anche lo studio della attività autolitica nella coda durante i fenomeni di involuzione, infatti questo organo è sede, durante la metamorfosi, unicamente di fenomeni involutivi mentre nel restante del corpo coesistono attività di demolizione e di ricostruzione: purtroppo la mancanza di materiale ci ha, per il momento, impedito questa ulteriore interessante analisi che viene rinviata ad un prossimo futuro.

In conclusione i risultati esposti nella presente Nota dimostrano che le attività autolitica e proteinasica rivelabili nella metamorfosi di *Bufo vulgaris* hanno un differente significato: mentre i primi enzimi hanno il compito di demolire strutture proteiche preesistenti, i secondi sono probabilmente correlati con la sintesi delle nuove proteine che si edificano durante la realizzazione della forma definitiva dell'Anuro.

Bibliografia.

[1] Cotronei G., «Mem. Acc. Lincei», Anno CCCXI, Vol. 10 (1914).
[2] Braus H., «Morph. Jahrb.», *35*, 509 (1906).
[3] Cotronei G., «Bios,», *2*, 27, (1913).
[4] Helff O. M., «Anat. Rec.», *47*, 177 (1930).
[5] Barfurth D., «Arch. f. Mikr. Anat.», *29*, 1 (1887) e *29*, 28 (1887).
[6] Helff O. M., «J. Exp. Zool.», *45*, 1 (1926).
[7] Lindeman V. F., «Physiol. Zool.», *2*, 225 (1929).
[8] Urbani E., «Rend. Acc. Naz. Lincei», *16*, 556 (1954).
[9] Urbani E., «Experientia», *11*, 209 (1955).
[10] Urbani E., «Ric. Sci.», *25*, 2258 (1955).
[11] Urbani E. e De Cesaris Coromaldi L., «Ric. Sci.», *24*, 1275 (1954).
[12] Urbani E. e De Cesaris Coromaldi L., «Rend. Acc. Naz. Lincei», *18*, 341 (1955).
[13] Brachet J., *Biochemical Cytology*, Ed. Acad. Press Inc. (1957).
[14] Linderstrøm-Lang K. U., «Bull. Soc. Chim. Biol.», *22*, 339 (1940).
[15] Holter H., «Pubbl. Staz. Zool. Napoli», *21*, Suppl. 60 (1949).
[16] Duspiva F. «Biol. Zbl.», *62*, 403 (1942).
[17] Urbani E., «Ist. Lombardo (Rend. Sc.)», B. *92*, 69 (1957).
[18] Urbani E., «Boll. di Zool.», *24*, 333 (1957).
[19] Urbani E. e De Cesaris Coromaldi L., «Ric. Sci.», *24*, 2364 (1954).
[20] Morse W., «Biol. Bull.», *34*, 149 (1918).
[21] Weber R., «Experientia», *13*, 153 (1957).

Zoologia. — *Osservazioni preliminari sulla corona ciliata in* Spadella cephaloptera *Busch (Chaetognatha)* (*). Nota (**) di ELVEZIO GHIRARDELLI, presentata dal Corrisp. U. D'ANCONA.

La corona ciliata è un organo caratteristico dei Chetognati, descritto per la prima volta dal Busch nel 1851 (1), in *Spadella cephaloptera*. È posta nella regione dorsale del corpo, sul capo, sul collo e talvolta si estende anche sul tronco. La sua forma e la sua grandezza possono essere assai diverse a seconda delle specie; ma anche nell'ambito di una stessa specie si può osservare un certo grado di variabilità (Ghirardelli) (2).

Generalmente la corona ha la forma di una ellissi assai allungata con il diametro maggiore orientato secondo l'asse longitudinale del corpo, solo in *Spadella* il diametro maggiore è perpendicolare all'asse longitudinale.

In vivo la corona di *Spadella* assume facilmente i coloranti vitali ed appare formata da due ellissi concentriche (corona esterna e corona interna). Le cellule della corona esterna sono fornite di ciglia vibratili ed hanno caratteri di cellule di senso, quelle della corona interna sono ghiandolari.

Le poche notizie sopra riportate riassumono quello che fino ad oggi era noto sulla corona ciliata dei Chetognati; riferirò ora i primi risultati di ricerche, che sono ancora in corso, sullo sviluppo e sulle funzioni della corona in *Spadella cephaloptera* Busch.

Lo studio dello sviluppo della corona a partire dalla schiusa mi ha condotto a risultati non privi di interesse. Infatti ho potuto constatare che le cellule della corona sono indubbiamente di origine ectodermica come quelle del ganglio ventrale dalle quali, nelle prime due settimane di vita, non sono distinguibili per caratteri morfologici; inoltre durante tutto questo periodo l'abbozzo della corona e quello del ganglio sono intimamente connessi tanto che le regioni lateroposteriori della corona si continuano senza nessuna interruzione con la parte anteriore del ganglio (figg. 1 e 2). Tali abbozzi sono già presenti alla nascita; quello del futuro ganglio ventrale presenta dimensioni relative assai maggiori che negli animali adulti e non ha ancora raggiunta la sua definitiva posizione ventrale, ma consiste di due grosse masse di cellule poste ai lati del corpo, che si estendono su tutta la lunghezza del tronco.

Due giorni dopo la schiusa la corona, posta subito sotto l'epidermide monostratificata, è costituita da un cordone anulare di cellule fittamente

(*) Istituto di Zoologia della Università di Bologna diretto dal prof. E. Vannini e Centro di Studio per la Biologia del C.N.R. diretto dal prof. G. Montalenti.

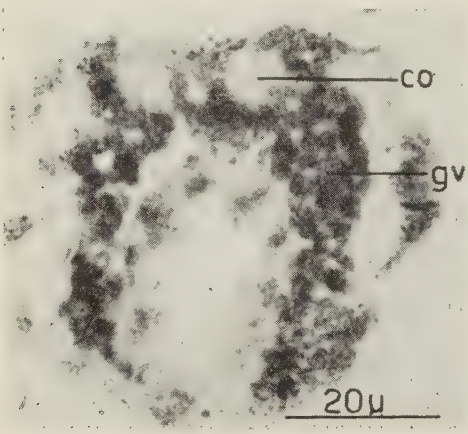
(**) Pervenuta all'Accademia il 13 agosto 1950.

(1) W. BUSCH, *Beobachtungen über Anatomie und Entwicklung einiger wirbelloser Seetiere*, Berlin (1851).

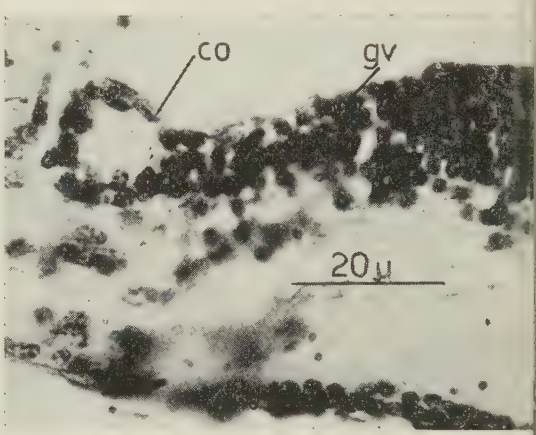
(2) E. GHIRARDELLI, *Chetognati raccolti nel Mar Rosso e nell'Oceano Indiano dalla nave «Cherso»*, « Boll. Pesca Pisc. Idrob. », vol. 2, fasc. 2, p. 253 (1947).

ammassate, salvo che nell'interno del cordone stesso ove a partire dal quarto-quinto giorno compare un canale che lo percorre tutto (figg. 1 e 2, *co*).

Col progredire dello sviluppo si osserva una attiva moltiplicazione cellulare per cui, infine, la corona risulta formata da due o tre strati di cellule nella parte profonda e da un solo strato nella regione superficiale sotto alla epidermide.



1.



2.

Fig. 1. – Sezione trasversa di una larva di *Spadella cephaloptera* di 10 giorni, passante per regione anteriore del ganglio ventrale (*gv*) che è a contatto con la corona (*co*).

Le cellule del ganglio e quelle della corona sono del tutto simili. (Emallume Mayer–Eosina).

Fig. 2. – Sezione frontale un poco obliqua di una larva di 4 giorni.

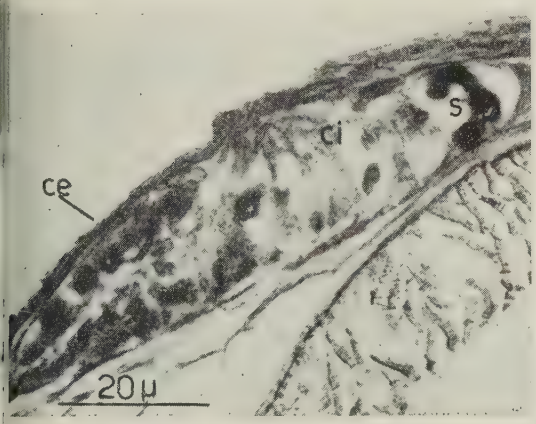
La corona (*co*) è a contatto con il ganglio (*gv*). Corona e ganglio sono formati da elementi cellulari del tutto simili. (Emallume Mayer–Eosina).

A dodici giorni di età le cellule della corona tendono ad ammassarsi sul bordo interno e cioè nella regione che nell'adulto corrisponde alla corona ghiandolare conservando tuttavia caratteri del tutto simili a quelli delle cellule del ganglio.

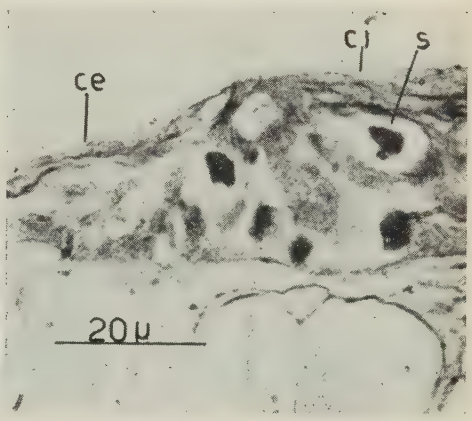
Quando cominciano a maturare le gonadi (a circa 20–30 giorni di età) la corona è completamente separata dal ganglio, il quale ormai si trova nella sua sede ventrale definitiva. Le cellule della corona esterna e quelle della corona interna cominciano a differenziarsi. Le prime hanno il nucleo più fortemente colorabile, uguale a quello delle cellule delle eminenze sensitive e sono meno numerose che non le cellule della corona interna; i nuclei di queste ultime sono un poco più grossi e vescicolosi e già assai somiglianti ai nuclei delle cellule ghiandolari della corona interna degli adulti. Nel citoplasma di queste cellule ghiandolari cominciano a comparire grossi granuli di secreto, che solo con appropriate colorazioni è possibile mettere in evidenza.

Da quanto ho esposto in precedenza, risulta dunque che la corona ciliata ed il ganglio ventrale hanno una origine unitaria da cellule ectodermiche

che sono del tutto simili a quelle dell'ectoblasto della gastrula. Soltanto quando le spadelle stanno per raggiungere la maturità sessuale, gli elementi del ganglio si differenziano da quelli della corona e, come si è detto, questi ultimi a loro volta dànno origine a due diversi tipi di cellule: quelle della corona interna divengono cellule ghiandolari, quelle della corona esterna, invece, conservano i caratteri di cellule nervose e presentano caratteristiche morfologiche che le rendono del tutto simili a quelle delle eminenze sensitive della epidermide (fig. 3).



3.



4.

Fig. 3. – Sezione trasversa della corona di una *Spadella* adulta.
ce, corona esterna; *ci*, corona interna ghiandolare. Sono visibili in *s* grossi granuli di secreto. (Gomori–Bargmann).

Fig. 4. – Sezione trasversa della corona di un esemplare adulto di *Spadella*.
ce, corona esterna; *ci*, corona interna. In *s*, sono visibili grossi granuli di secreto PAS positivi. (Mac Manus).

Era naturale, date queste premesse, indagare sulla natura del secreto della corona interna. Questo, negli adulti, si presenta sotto l'aspetto di grossi granuli nell'interno delle cellule ghiandolari e di granuli minutissimi all'esterno della corona stessa. Mi è stato possibile dimostrare che tale secreto si colora positivamente con i metodi più comunemente impiegati per la neurosecrezione: Gomori–Bargmann, fucsina paraldeide e che inoltre è Mac Manus positivo. La PAS positività resiste alla digestione salivare, il che fa supporre che siano presenti polisaccaridi, ma non glicogeno (figg. 3 e 4).

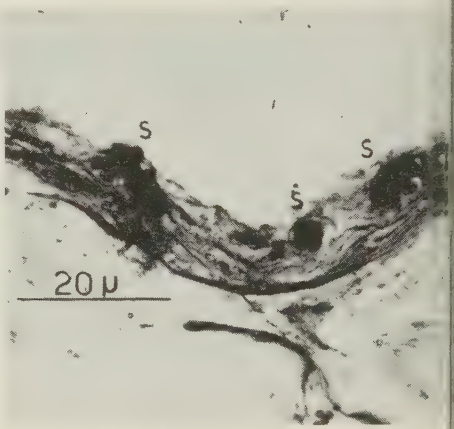
L'origine comune della corona e del ganglio ventrale non fa apparire troppo strano che la parte ghiandolare della corona elabori un prodotto che presenta i caratteri di un neurosecreto. Se si tratti di un neurosecreto strettamente paragonabile a quello noto per altri invertebrati e Vertebrati decideranno ulteriori osservazioni; è infatti consigliabile una certa cautela nell'applicare ai Chetognati metodi di ricerca che sono stati sperimentati su animali spesso assai distanti nella scala zoologica.

Il secreto finemente granulare della corona si diffonde e si distribuisce sopra la cuticola o inframmezzato alle più sottili lamelle cuticolari della super-

ficie del corpo, lungo la linea mediana dorsale, per raccogliersi infine, assai abbondante, nell'interno dell'apparato genitale femminile (figg. 5 e 6). Le regioni più ricche di granuli e cioè la corona ed i territori degli orifici genitali femminili, fino ai ricettacoli seminali, osservate con il microscopio a fluorescenza, presentano la stessa fluorescenza giallo verdastra che in attesa di ulteriore ricerche, fa pensare alla presenza di flavine.

La diffusione e la distribuzione dei granuli coincide in modo singolare con la via seguita dagli spermatozoi dopo l'accoppiamento.

5.



6.

Fig. 5. – Sezione trasversa di un esemplare adulto di *Spadella* passante all'altezza degli orifici ger femminili (*v*).

In alto a sinistra è visibile la doccia dorsale e lungo il bordo superiore della sezione a partire dalla doccia suddetta, si distinguono r granuli di secreto Gomori positivi. (Gomori–Bargmann).

Fig. 6. – Particolare della doccia dorsale di un esemplare adulto di *Spadella*.

Si vedono chiaramente i granuli di secreto Gomori positivi. (Gomori–Bargmann).

Ricorderò a questo proposito che la fecondazione avviene in *Spadella* per mezzo di una spermatofora che non è deposta vicino agli orifici genitali femminili ma sul collo dietro la corona ciliata. Da questa spermatofora ha origine una corrente di spermatozoi, che sembra seguire un cammino rigorosamente fissato; infatti essa si dirige verso il setto caudale, percorrendo la linea mediana dorsale e, giunta ad una certa distanza dal setto, si biforca in due rami che si volgono verso gli orifici genitali femminili (Ghirardelli) [3].

La coincidenza dei due percorsi può dunque far pensare che i granuli di secreto abbiano forse una qualche funzione nel regolare la migrazione degli spermatozoi.

(3) E. Ghirardelli, *Sulla biologia della riproduzione in* Spadella cephaloptera *Busch.* (*Chaetognatha*), « Rend. Accad. Sc. Istituto Bologna », ser. XI, T. 1, p. 166 (1954).

È però probabile che negli altri Chetognati che pure hanno tutti la corona ciliata, ma che conducono vita pelagica, la fecondazione avvenga in modo diverso da quello noto per *Spadella*, che è forma bentonica. Si tratta dunque di vedere se anche in altre specie esista questo particolare secreto della corona ciliata e se diffonda in modo simile a quello osservato in *Spadella* lungo la superficie dorsale del corpo, oppure se tale secreto manchi del tutto.

Le ricerche di Autori precedenti avevano attribuito alla corona ciliata funzioni di organo di senso olfattivo gustativo (Hertwig) [4], o di tatto (Grassi) [5], (John) [6]. Secondo Reisinger [7], invece, la corona sarebbe un organo escretorio e rappresenterebbe il primo gradino di una serie di stadi filogenetici che condurrebbero alla formazione di un protonefridio a solenociti. La struttura, l'origine e le modalità della secrezione della corona fanno cadere questa supposizione. Si tratta infatti di un organo puramente epidermico, ben isolato dalla sottostante muscolatura e sprovvisto di qualsiasi rapporto visibile con il celoma e che pertanto non può essere considerato un organo escretorio. È indubbio però che la corona di *Spadella* può essere ritenuta un organo di secrezione, almeno per quanto si riferisce alla corona interna ghiandolare.

Reisinger nega anche che la corona sia un organo di senso; ma anche questa sua affermazione non mi sembra accettabile, poiché se è vero che la corona non è forse un organo di senso così sensibile come è ammesso da John, essa sembra avere la capacità di percepire stimoli tattili e la sua stessa struttura fa pensare che almeno in parte abbia funzioni sensitive. Su queste funzioni, come pure sulla innervazione della corona, converrà indagare ulteriormente, ma credo non vi sia nessuna particolare ragione per la quale la presenza nella corona di una porzione ghiandolare escluda che la corona stessa abbia anche le funzioni di un organo di senso.

Questa supposizione può essere convalidata dalle osservazioni sullo sviluppo della corona e dalle caratteristiche morfologiche delle cellule della corona esterna, che sono del tutto simili a quelle delle eminenze sensitive della epidermide.

(4) O. HERTWIG, *Die Chaetognathen.* «Z. Naturwiss. Jena», vol. 14 (1880).

(5) G. B. GRASSI, *I Chetognati.* «Fauna u. Flora des Golfes von Neapel», Mon. V (1883).

(6) C. C. JOHN, *Habits structure and development of* Spadella cephaloptera, «Quart. J. Micr. Sc.», vol. 75, p. 625 (1933).

(7) E. REISINGER, *Zur Exkretionsphysiologie von* Spadella. *Ein Beitrag zur Kenntnis der Chaetognathencorona*, «Thalassia», vol. 1, fasc. 10, p. 1 (1934).

Fisiologia. — *Ricerche sulla Motilità dell'esofago Umano.* – IV. *Sul cosiddetto peristaltismo terziario dell'esofago, o motilità segmentale non peristaltica* (*). Nota di Luigi Turano, Alfredo Curatolo e Enzo Salomoni, presentata (**) dal Corrisp. G. Amantea.

Abbiamo già riferito in una precedente Nota (1) i risultati di nostre ricerche sulla peristalsi esofagea, condotte con una tecnica da noi stessi realizzata utilizzando simultaneamente il metodo meccanografico e quello roentgencinematografico.

La peristalsi – nelle due forme già distinte da Meltzer come primaria e secondaria, a seconda che sia conseguente o no all'atto deglutitorio – non rappresenta tutta la motilità dell'esofago. Ciò è apparso evidente nel corso delle nostre ricerche, ma era già stato rilevato da numerosi altri ricercatori, sia mediante l'indagine meccanografica che con quella radiologica.

L'esofago infatti, oltre che della motilità peristaltica, che si può considerare fondamentale, è dotato altresì di una *motilità segmentale* che, per la sua incostanza ed anche perché non sempre ne è agevole l'identificazione mediante le tecniche fino ad ora impiegate, costituisce tuttora oggetto di controversia. Controversia che peraltro è alimentata dalle disparità di terminologia e di interpretazioni con cui detta motilità è stata presentata dai suoi stessi assertori.

Nell'intento di evitare ulteriori confusioni, mentre ci riserviamo di discutere più avanti le diverse terminologie ed interpretazioni sopraccennate, nel corso di questa Nota ci riferiamo alla motilità in oggetto indicandola semplicemente come *motilità segmentale*, ivi comprendendovi ogni sorta di motilità attiva dell'esofago che non sia quella peristaltica, primaria o secondaria.

Proseguendo nel nostro piano di ricerche sulle funzioni motorie dell'esofago, il presente lavoro vuole essere un contributo alla conoscenza di detta *motilità segmentale*, intesa nei limiti sopra enunciati.

Metodo. – Per lo studio della motilità segmentale dell'esofago ci siamo serviti della tecnica generale già descritta in una precedente Nota (2), alla quale rimandiamo. La sonda

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Radiologia dell'Università di Roma e presso l'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 17 maggio 1958.

(1) L. Turano, A. Curatolo, E. Salomoni, questi « Rendiconti » vol. XXIV, fasc. 6, pp. 736–746 (1958).

(2) L. Turano, A. Curatolo, E. Salomoni, questi « Rendiconti », vol. XXIV, fasc. 4, pp. 449–456 (1958).

esofagea, munita di tre palloncini esploratori, era introdotta seguendo la via nasale ed aggiustata in modo da far corrispondere il palloncino distale allo sbocco cardiale, come descritto in altra precedente Nota [3] dedicata allo studio dell'attività cardiale. In tal modo i palloncini esploratori medio e prossimale venivano a trovarsi rispettivamente ad 8 ed a 18 cm circa dal cardias. In alcuni soggetti la sonda veniva ritirata ancora più verso l'esterno, rinunciando a registrare l'attività cardiale, al fine di rilevare quella dell'esofago più prossimale.

Ciascun palloncino esploratore, di 3 cm di lunghezza, insuffiato con 5 cc di aria, presentava 2 cm circa di diametro massimo ed esercitava sulle pareti dell'esofago a riposo una pressione corrispondente a 6–10 cm d'acqua.

Abbiamo esaminato 50 soggetti umani normali, comunque esenti da affezioni o sintomi a carico dell'apparato digerente. Per ciascuno l'osservazione venne protratta per circa due ore, sotto continua registrazione meccanografica dell'attività esofagea a tre livelli simultaneamente. L'esofago era altresì sorvegliato intermittentemente mediante radioscopia e, quando richiesto dall'interesse dei fenomeni in corso, veniva raccolta la corrispondente documentazione roentgencinematografica in sincronismo con la registrazione meccanografica.

Fatta distinzione degli eventi motori di tipo peristaltico, sia primario che secondario, nonché dei movimenti passivi trasmessi dagli apparati respiratorio e cardio-circolatorio, particolare attenzione venne rivolta a tutti quegli altri eventi motori non classificabili tra quelli.

Risultati.

Dei 50 soggetti esaminati, soltanto 15 non presentarono mai altri eventi motori attivi che non fossero classificabili come peristaltici. In tutti gli altri casi, cioè nel 70 % dei nostri esperimenti, fu possibile rilevare, oltre alla motilità peristaltica, una motilità attiva accessoria, incapace di propagazione e pertanto segmentale, rappresentata da eventi di tipo fasico, o di tipo tonico, oppure misto tonico e fasico.

Gli eventi di tipo fasico sono rappresentati da contrazioni brusche, rapide, di scarsa efficienza, capaci di determinare incrementi di pressione di solito non superiori ai 10 cm d'acqua. Si tratta sempre di contrazioni strettamente localizzate, senza mai tendenza a propagarsi lungo l'esofago come le onde peristaltiche. Talvolta isolate, più spesso ricorrenti e ravvicinate in modo da costituire treni più o meno lunghi di eventi abbastanza regolarmente intervallati, con una frequenza piuttosto costante di circa 2 per ogni 10 sec. (fig. 1).

Per quanto riguarda la sede di insorgenza, nelle condizioni sperimentali abituali, l'incidenza della suddetta attività fasica è del tutto eccezionale nel tratto cervicale e toracico alto. In un solo caso è occorso di registrare qualche contrazione isolata a questo livello. Meno raramente si cominciano ad incontrare eventi fasici di questo tipo nel terzo medio dell'esofago (4 casi, di cui in uno solo a gruppi di eventi ravvicinati e regolari, con la frequenza di 2 per 10 sec.). La maggiore incidenza del fenomeno è stata incontrata a livello del terzo inferiore dell'esofago, dove è stato rilevato nel 70 % dei

(3) L. Turano, A. Curatolo, E. Salomoni, questi « Rendiconti », vol. XXIV, fasc. 5, pp. 573–576 (1958).

casi ed era costituito generalmente da treni più o meno lunghi di eventi regolari succedentesi alla frequenza pressoché caratteristica di 2 per ogni 10 sec., nelle condizioni abituali di esperimento, cioè con una pressione all'interno del palloncino esploratore non superiore ai 10 cm d'acqua.

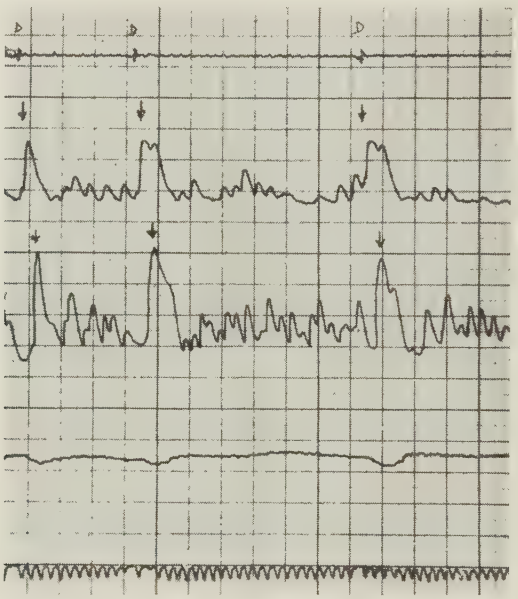


Fig. 1. – Attività dell'esofago a 18 cm (tracciato 2), a 8 cm (tracciato 3) dal cardias ed a livello cardiale (tracciato 4). Il tracciato superiore e quello inferiore registrano rispettivamente gli atti deglutitori (D) ed il pneumogramma. Si noti l'attività cardiale in coincidenza degli eventi peristaltici, mentre la rimanente attività non peristaltica dell'esofago lascia del tutto indifferente il tono cardiale.

In taluni soggetti (8 casi) abbiamo studiato il fenomeno in rapporto alle variazioni di tensione del palloncino esploratore, insufflato ulteriormente alle pressioni di 10, 15, 20, 25 cm d'acqua successivamente ed abbiamo potuto accertare la comparsa di contrazioni fasiche del tipo accessorio anche in quei soggetti che non lo avevano mostrato con le pressioni abituali del palloncino intraesofageo, mentre nei soggetti nei quali gli eventi fasici erano presenti alle pressioni più basse, le contrazioni assumevano una maggiore validità e durata, ovviamente a discapito della frequenza (fig. 2). Si è notato che la distensione del palloncino fino alla pressione di 20–30 cm d'acqua evoca la comparsa della descritta motilità accessoria anche nei livelli più alti dell'esofago, benché gli eventi motori non raggiungano mai quella frequenza descritta per l'esofago distale. Con una maggiore distensione dei palloncini esploratori si nota anche una maggiore incidenza e frequenza di contrazioni peristaltiche secondarie, del resto sempre ben riconoscibili, nelle nostre condizioni sperimentali, dalla motilità segmentale. Infatti, con la registrazione dell'attività esofagea su diversi livelli simultaneamente, i due

diversi tipi di contrazioni risultano differenziati per il fatto che mentre le contrazioni segmentali si esauriscono sempre al livello stesso nel quale si sono originate, le contrazioni peristaltiche si propagano immancabilmente sino all'estremo distale dell'esofago, salvo che il loro corso non venga inibito dall'insorgere a monte di altro evento peristaltico, ciò che risulta sempre ugualmente chiarito dal tracciato grafico della complessiva attività esofagea. Inoltre, mentre all'insorgere di un evento peristaltico si determina un rilasciamento del tono cardiale che dura per tutta la durata dell'onda peristaltica stessa [4], nessuna modificazione del tono cardiale accompagna mai la motilità segmentale, quale che ne sia la frequenza e l'efficienza delle contrazioni (fig. 3).

Attività esofagea a 10 cm dal cardias rilevata mediante palloncino esploratore variamente disteso con crescenti quantità di aria

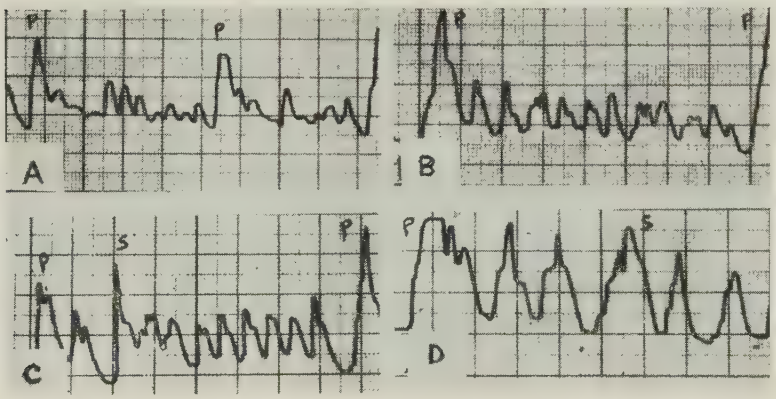


Fig. 2.

A) Tracciato rilevato con palloncino insufflato con 3 cc di aria press. 10 cm d'acqua).
B) Idem, con 6 cc di aria (press.: 15 cm d'acqua).
C) Idem, con 9 cc di aria (press.: 20 cm d'acqua).
D) Idem, con 12 cc di aria (press.: 25 cm d'acqua).

Oltre agli eventi fasici sopradescritti, e quasi sempre nell'esofago distale, si può notare un tipo di motilità segmentale costituito da più o meno brusche elevazioni di tono, di durata varia, da alcuni secondi a qualche minuto, raramente semplici (fig. 4), di solito complicate da eventi fasici del tipo prima descritto, i quali si impiantano sul *plateau* dell'elevazione tonica (fig. 5). Anche questo tipo di motilità segmentale non dà luogo a modificazioni del tono cardiale.

La simultanea indagine radioscopica e roentgencinematografica (fig. 6) ha non soltanto confermato i rilievi meccanografici descritti, ma ne ha bensì

(4) L. Turano, A. Curatolo, E. Salomoni, questi « Rendiconti », vol. XXIV, fasc. 5, pp. 573–576 (1958).

COMPORTAMENTO DEL TONO CARDIALE A SECONDA DELLA NATURA DELLA MOTILITÀ ESOFAGEA.

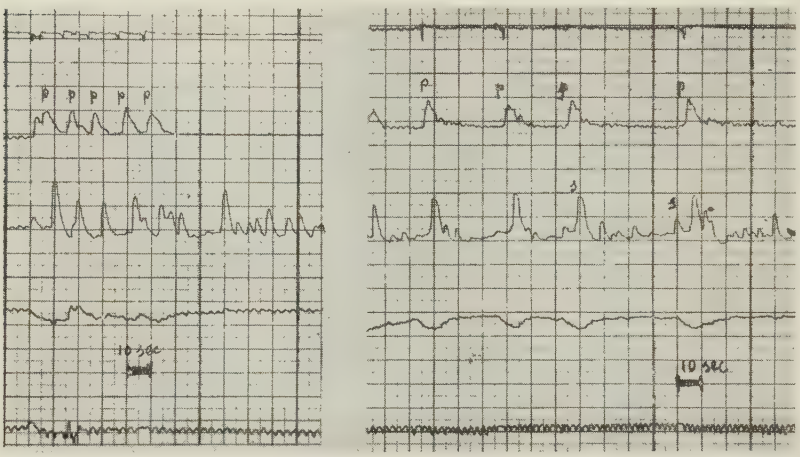


Fig. 3. – Il tono cardiale si rilascia nel corso degli eventi peristaltici primari (*p*) o secondari (*s*), ma rimane indifferente nel corso della motilità accessoria.

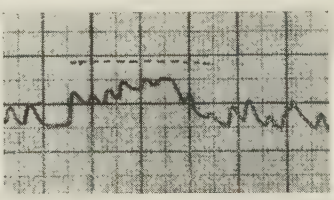


Fig. 4. – Contrazione tonica, protratta per circa 30 sec.

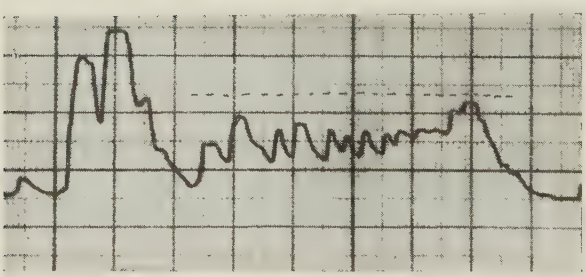


Fig. 5. – Contrazione tonica, protratta per circa 50 sec., sulla quale sono sovrapposte numerose contrazioni fasiche non peristaltiche.

dato ulteriore dimostrazione e chiarimento. Si è infatti potuto accertare quanto segue:

1° Che la motilità segmentale si produce specialmente in corrispondenza dei tratti di esofago le cui pareti sono distese per la presenza dei palloncini esploratori, ma può anche prodursi ad altri livelli dell'esofago, senza

alcuno stimolo distensivo artificiale, durante il rilassamento che segue al passaggio di una contrazione peristaltica. In quest'ultima evenienza, la presenza nel lume esofageo di residuo radio-opaco può conferire al profilo dell'esofago un aspetto irregolare, ora seghettato, ondulato, segmentato, oppure a cavaturacciolo, a seconda della frequenza e della profondità delle contrazioni fasiche, o tonico-fasiche, caratteristiche di questa motilità segmetale.

Sequenza roentgencinematografica (1 fotogramma ogni 9 dell'originale) e corrispondente meccanogramma che dimostrano eventi motori non peristaltici semplici e decorrenti al seguito della contrazione peristaltica.

Fig. 6.

La serie dei fotogrammi da leggere da sinistra a destra e dall'alto in basso, dimostra all'inizio contrazioni deboli, parziali risolventisi nella sede di insorgenza mentre nella seconda metà della serie contrazioni più frequenti e molteplici si vedono chiaramente al seguito di una contrazione peristaltica, conferenti all'esofago un aspetto segmentato caratteristico.

2° Che subito a valle di queste contrazioni non è apprezzabile alcun fenomeno che rassomigli a quel rilasciamento recettivo così evidente e costante immediatamente a valle di ogni contrazione peristaltica primaria e secondaria.

3° Infine che la suddetta motilità segmentale è del tutto senza importanza ai fini della rimozione e del trasporto di eventuali residui, che devono attendere il passaggio di un'onda peristaltica primaria o secondaria, per essere spazzati via nello stomaco.

Considerazioni.

Dai risultati delle nostre osservazioni appare innegabile l'esistenza nell'esofago di una motilità attiva particolare, chiaramente distinta e differenziabile da quella fondamentale peristaltica. Già nel 1914 Carlson e Luckhardt [5]

(5) A. J. Carlson, A. B. Luckhardt, « Am. J. Physiol. », *33*, 126 (1914).

avevano descritto nel terzo inferiore dell'esofago, al di fuori della peristalsi una motilità costituita da *contrazioni* che gli Autori definiscono *locali* in quanto rappresentano la *risposta locale* alla *stimolazione locale* determinata dalla presenza di un palloncino disteso nel lume esofageo. Gli Autori, accanto a *contrazioni locali* ravvicinate, regolari per ampiezza e frequenza, rapide e di durata non superiore a 2 sec., ne hanno rilevato altre irregolari per frequenza ed ampiezza protratte e di durata varia da alcuni secondi a parecchi minuti, sulle quali si possono sovrapporre contrazioni rapide del primo tipo.

Secondo Carlson e Luckhardt le contrazioni locali compaiono quando il palloncino intraesofageo viene disteso ad una pressione di 2–4 cm di cloroformio, ma possono comparire anche alla pressione di 1 cm. Gli Autori rilevano inoltre che le contrazioni locali risultano più marcate immediatamente dopo l'introduzione e la distensione del palloncino dell'esofago, e tanto più marcate quanto maggiore la pressione di distensione del palloncino.

Benché con la nostra tecnica i palloncini stati siano insufflati fino a pressioni notevolmente superiori (6–10 cm d'acqua), la motilità segmentale da noi rilevata appare ovviamente identica a quella che Carlson e Luckhardt hanno descritto molti anni prima di noi come contrazioni locali. Non sembra che alcuno, prima dei citati Autori, abbia mai notato e descritto una motilità attiva dell'esofago diversa da quella peristaltica. Tuttavia in qualche recente scritto è stata fatta qualche confusione tra le contrazioni locali di Carlson e Luckhardt, non peristaltiche, e le contrazioni peristaltiche da stimolazione locale intraesofagea, che altro non sono se non la peristalsi secondaria di Meltzer.

La motilità segmentale di cui si parla non può davvero essere identificata con quelle contrazioni che Cannon (1907) [6] ha visto comparire nell'esofago distale di animali vagotomizzati, dopo superata la fase di paralisi esofagea completa.

Cannon infatti le descrive come contrazioni ad anello che insorgono nell'esofago provvisto di muscolatura liscia in seguito allo stimolo distensivo determinato dalla presenza di materiale nel lume esofageo, e muovono giù dal tratto stimolato verso lo stomaco, come vere onde peristaltiche di efficienza sempre maggiore ed infine idonee a spingere attraverso il cardia tutto il contenuto esofageo nello stomaco. Si tratta quindi di eventi peristaltici veri e propri e tali li definisce lo stesso Cannon, quando conclude affermando che alle due forme di peristalsi, primaria e secondaria, descritta da Meltzer, « ne deve essere aggiunta una terza, visibile nella porzione di esofago provvisto di muscolatura non striata ».

Più tardi Jurica (1926) [7] ha ripetuto gli esperimenti di Cannon e confermandone i risultati definisce « peristalsi terziaria di Cannon » quella motilità che ricompare nell'esofago dopo vagotomia bilaterale alta. Questo autore,

(6) W. B. Cannon, « Am. J. Physiol. », *19*, 436 (1907).
(7) E. J. Jurica, « Am. J. Physiol. », *77*, 371 (1926).

pure avendo lavorato sotto la direzione di Carlson, non ricollega affatto la peristalsi terziaria di Cannon con quelle *contrazioni locali* che lo stesso Carlson aveva descritto 12 anni prima negli animali e nell'uomo a vaghi integri.

D'altra parte nessuno ha dimostrato ancora che le contrazioni locali di Carlson e Luckhardt siano *autonome*, ossia indipendenti dall'innervazione estrinseca dell'esofago. Né inoltre la comparsa negli animali vagotomizzati di una motilità autonoma dimostra che detta autonomia debba essere compatibile con l'integrità vagale.

Ciò premesso appare del tutto arbitrario ed equivoco l'uso che nella corrente letteratura scientifica di quest'ultimo decennio viene fatto di termini come *peristalsi terziaria*, *contrazioni terziarie*, *contrazioni autonome*, ecc. per indicare quelle *contrazioni locali* di Carlson e Luckhardt, cui corrisponde la *motilità segmentale* da noi descritta nella presente Nota.

Conclusioni.

L'esame critico dei dati rilevati dalla letteratura ed i risultati delle nostre osservazioni sperimentali ci inducono ad affermare quanto segue:

1° Oltre che della motilità peristaltica che è fondamentale per il trasporto del bolo nello stomaco, l'esofago è dotato di una motilità attiva, localizzata, a carattere segmentale, apparentemente senza importanza ai fini della progressione del contenuto esofageo.

2° Detta motilità segmentale corrisponde alle *contrazioni locali* descritte da Carlson e Luckhardt nel 1914 ed a quella motilità che gli Autori più recenti descrivono come *peristalsi terziaria*, *contrazioni terziarie*, *contrazioni autonome*, ecc.

3° Tuttavia la *motilità segmentale*, non ha nulla a che vedere con la *peristalsi terziaria di Cannon*, né risulta provato che essa è autonoma, ossia indipendente dall'innervazione estrinseca dell'esofago.

4° Essa costituisce una attività ben distinta e chiaramente differenziabile da quella peristaltica, primaria o secondaria, non soltanto per la relativa immobilità dell'anello di contrazione che rimane praticamente localizzato al livello esofageo nel quale si origina, ma altresì per l'indifferenza del tono cardiale, il quale invece si rilascia immancabilmente in coincidenza di ogni evento peristaltico dell'esofago.

5° Tenendo conto degli equivoci cui possono dar luogo le terminologie finora adottate per indicare l'attività motoria non peristaltica di cui si parla, e considerandone il carattere segmentale, proponiamo che essa, venga definita semplicemente come *motilità segmentale* dell'esofago, in attesa che ulteriori rilievi sperimentali ne chiariscano la natura, il meccanismo e le finalità.

Fisiologia. — *Il comportamento delle diverse frazioni dell'*N *del cuore e di alcuni altri organi del colombo bradicardico per inanizione assoluta* (*). Nota di Gaetano Livrea e Ferruccio De Stefano, presentata (**) dal Corrisp. G. Amantea.

Proseguendo nello svolgimento del piano organico di lavoro elaborato da uno di noi [1] allo scopo di precisare il fondamento nutritivo della bradicardia da inanizione e da malnutrizione orizanica del colombo, dopo aver accertato preliminarmente il comportamento ponderale e dell'acqua del cuore e di alcuni altri organi [2, 3], siamo passati ad analizzare il comportamento delle varie frazioni dell'N cardiaco e di alcuni altri organi, sempre negli stessi animali e nelle stesse condizioni di disordine nutritivo.

In questa Nota, per necessità di spazio, siamo costretti a riferire soltanto i risultati ottenuti nel colombo bradicardico per inanizione assoluta.

Se non andiamo errati, questi risultati sono i primi ad essere consegnati alla letteratura, nella quale è veramente sorprendente dover constatare che non solo è stata trascurata sin oggi l'indagine del fondamento nutritivo di determinati disordini funzionali, ma è stata molto poco studiata persino l'interessante questione della perdita di N proteico da parte dei singoli organi nel digiuno.

Materiali e metodi.

Sono stati adoperati 20 colombi (*Columba livia*), 11 di controllo e 9 sottoposti a digiuno, fino ad ottenere una perdita di peso corporeo del 20 % circa (media 22 %) ed una diminuzione media della frequenza cardiaca di circa il 50 %.

Trattandosi degli stessi animali di cui alla nostra precedente Nota [3] sul comportamento dell'acqua, rimandiamo ad essa per ogni dettaglio circa le loro condizioni generali, la dieta, l'attività cardiaca, la durata del digiuno, le modalità del sacrificio e del prelevamento dei campioni di sangue e dei frammenti di fegato, di muscolo scheletrico e di cuore, necessari alle determinazioni del contenuto in N totale, proteico, non proteico ed aminico.

Per le determinazioni si è proceduto come segue:

N *totale ed* N *non proteico.* – Sono stati determinati con micrometodo secondo Kjeldahl. L'N totale del siero di sangue è stato determinato in 1 ml di una diluizione 1 : 10 con acqua distillata; l'N non proteico su 8 ml del filtrato della stessa diluizione 1 : 10 trattata previamente con parti uguali di acido

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Scienza dell'Alimentazione dell'Università di Messina con un contributo del C.N.R.

(**) Nella seduta del 10 giugno 1958.

tricloracetico al 10 %. L'N totale dei singoli tessuti è stato determinato su 1 ml di una diluizione finale 1 : 100 dell'omogenato con acqua distillata (omogenizzazione in Potter–Elvehjem per 1–2 m'); l'N non proteico su 8 ml del filtrato della stessa diluizione trattata previamente con parti uguali di acido tricloracetico al 10 %.

La digestione è stata eseguita, su mineralizzatore elettrico per 8 ore circa, con 1 ml di acido solforico concentrato e catalizzatore di Chibnall e coll. [4], più 1–2 gocce di peridrolo al 30 % 1–2 ore prima del termine. L'ammoniaca è stata distillata con l'apparecchio di Markham [5], raccolta su 5 ml di una soluzione satura di acido borico addizionati di 3–5 gocce di indicatore secondo Tashiro [6] e titolata con H_2SO_4 N/100.

Tutte le determinazioni sono state eseguite almeno in duplicato.

N *proteico*. – È stato calcolato per differenza tra l'N totale e l'N non proteico.

N *aminico*. – È stato determinato col metodo di Bussi e Caccianotti [7] su campioni, in genere duplicati, di 2–3 ml di siero non diluito, e su campioni, sempre in duplicato, di 2–4 ml di omogenato 1 : 10 dei vari organi.

Risultati e discussione.

Tutti i valori ottenuti in condizione di nutrizione normale e di inanizione assoluta sono racchiusi nella Tabella I. Le medie dei valori, l'errore standard delle varie medie, i valori minimi e massimi ed il grado di significanza di alcune differenze si ritrovano nella Tabella II. Da essi si ricava quanto segue:

1° in condizione di nutrizione normale:

a) il contenuto in N totale e proteico del cuore è inferiore sia a quello del fegato che a quello del muscolo scheletrico; le differenze sono però statisticamente significative solo rispetto al muscolo;

b) il contenuto in N non proteico del cuore è pressocché uguale a quello del fegato e significativamente inferiore a quello del muscolo scheletrico;

c) il contenuto in N aminico del cuore è inferiore sia a quello del muscolo, che del fegato; ma tale differenza è statisticamente significativa solo per il muscolo e lo è quasi per il fegato;

2° in condizioni d'inanizione assoluta:

a) il contenuto in N totale, proteico e non proteico del cuore è inferiore sia a quello del muscolo, che a quello del fegato; tutte le differenze sono significative;

b) il contenuto in N aminico del cuore è inferiore sia a quello del fegato, che del muscolo, ma tali differenze non sono significative;

c) il comportamento delle varie frazioni dell'N cardiaco è stato, in linea di massima, indipendente dal grado di inanizione e dall'entità della bradicardia;

Tabella I.

Contenuto in N *totale* (N_t), N *proteico* (N_p), N *non proteico* (N_{np}) *e* N *aminico* (N_{am}) *siero di sangue, del fegato, muscolo scheletrico e cuore di colombi normali e digiunanti* (mg/100 g *tessuto fresco*).

Colombi	Siero di sangue				Fegato				Muscolo scheletrico				Cuore		
	N_t	N_p	N_{np}	N_{am}	N_t	N_p	N_{np}	N_{am}	N_t	N_p	N_{np}	N_{am}	N_t	N_p	N_{np}
COLOMBI NORMALI															
1	493	463	30	13	2845	—	—	132	2850	—	—	56	2732	—	—
2	494	458	36	16	2847	2481	366	149	3115	2820	295	111	2467	2186	281
3	500	469	31	13	4060	—	—	183	3397	3228	—	124	2988	2666	322
4	550	522	28	8	3066	2772	294	92	2828	2548	280	69	2576	2347	229
5	517	492	25	10	2744	2520	224	92	3528	3171	357	92	3094	2821	273
6	430	397	34	13	3178	2877	301	72	3346	2968	378	97	3052	2772	280
7	445	423	22	8	2758	2517	241	102	3598	3222	376	86	3080	2769	311
8	508	482	26	9	3360	3098	262	—	3542	3110	432	99	3108	2806	302
9	446	419	27	11	3535	3231	304	79	3640	3248	392	84	2856	2559	297
10	—	—	28	6	2975	2663	312	56	—	—	—	141	3108	2818	290
11	413	389	24	7	3304	3000	304	54	3612	3213	399	132	3164	2846	318
COLOMBI DIGIUNANTI															
1	345	308	36	12	3792	—	—	105	—	—	—	114	2960	2663	297
2	441	410	30	13	3735	—	—	122	3623	3243	380	105	2777	2524	253
3	241	215	26	15	3651	3341	310	138	3481	3129	352	99	2678	2368	310
4	—	—	26	13	3335	3011	324	138	3452	2987	465	123	2875	2551	324
5	299	271	28	10	2940	2625	315	73	3206	2800	406	90	2982	2702	280
6	382	358	24	11	3388	3052	336	65	3318	2891	427	78	3066	2765	301
7	422	393	28	11	3542	3215	327	73	3388	3012	376	87	2884	2599	285
8	420	393	27	12	3451	3152	299	36	3493	3107	386	94	2772	2480	292
9	280	248	32	12	3290	2989	301	81	3409	2981	428	101	2786	2478	308

Contenuto in N *totale* (N_t), N *proteico* (N_p), N *non proteico* (N_{np}) *e* N *aminico* (N_{am}) *del siero di sangue, del fegato, muscolo scheletrico e cuore di colombi normali e digiunanti* (mg/100 g *di tessuto fresco*).

(Valori medi ± E. S. [1])

Colombi (n)	Normali (11)				Digiunanti (9)			
Tessuto	Siero di sangue (S)	Fegato (F)	Muscolo scheletrico (M)	Cuore (C)	Siero di sangue (S)	Fegato (F)	Muscolo scheletrico (M)	Cuore (C)
N totale	479 ± 13,1 (413–550)	3152 ± 120 (2744–4060)	3345 ± 95 (2828–3640)	2929 ± 75,5 (2467–3164)	353 ± 26 (280–441)	3458 ± 87 (2940–3702)	3421 ± 44 (3206–3623)	2864 ± 40,5 (2678–3066)
N proteico	451 ± 13 (389–522)	2795 ± 91 (2481–3231)	3058 ± 79 (2548–3248)	2658 ± 72 (2186–2846)	288 ± 26,5 (215–410)	3055 ± 85 (2652–3341)	3018 ± 48 (2800–3243)	2570 ± 41,5 (2368–2702)
N non proteico . .	28 ± 1,2 (22–36)	289 ± 14 (224–366)	363 ± 17 (280–432)	290 ± 8,7 (229–332)	28,5 ± 1,2 (24–36)	316 ± 5,2 (299–336)	402 ± 12,1 (352–465)	294 ± 6,7 (253–324)
N aminico	10 ± 0,95 (6–16)	101 ± 12 (54–183)	99 ± 9,6 (56–141)	74 ± 3,8 (49–90)	12 ± 0,47 (10–15)	92 ± 11,9 (36–138)	99 ± 4,6 (78–123)	86 ± 5,6 (70–120)

Significanza di alcune differenze.

Colombi	Normali					Digiunanti						Normali/Digiunanti		
Tessuti	M/C				F/C	F/C			M/C			S		F
Frazione di N	N_t	N_p	N_{np}	N_{am}	N_{am}	N_t	N_p	N_{np}	N_t	N_p	N_{np}	N_t	N_p	N_p
Diff.	416	400	73	25	27	594	485	22	557	448	108	126	163	260
« t » (di Student) .	3,51	3,74	3,83	2,35	2,00	6,16	7,39	2,46	9,28	7,10	8,04	4,57	5,24	2,02
P <	0,01	0,01	0,01	0,05	0,1	0,01	0,01	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,1

(1) E. S. = errore standard della media $= \frac{s}{\sqrt{n}}$ dove $s = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n-1}}$.

3° nell'inanizione assoluta, rispetto alla condizione normale:

a) il contenuto in N totale diminuisce significativamente nel sangue e insignificativamente nel cuore, aumenta insignificativamente nel muscolo scheletrico e quasi significativamente nel fegato (P prossimo a 0,05);

b) il contenuto in N proteico diminuisce significativamente nel sangue e insignificativamente nel muscolo e nel cuore; aumenta quasi significativamente nel fegato;

c) il contenuto in N non proteico rimane quasi invariato nel sangue e nel cuore, aumenta insignificativamente nel fegato e nel muscolo;

d) il contenuto in N aminico rimane invariato nel muscolo, diminuisce insignificativamente nel fegato ed aumenta insignificativamente nel sangue e nel cuore.

Non potendo discutere per ora tutti i risultati ottenuti e dovendoci limitare soltanto a qualche considerazione generale circa l'N del cuore, vorremmo innanzitutto far notare che l'attività metabolica del cuore del colombo normale e del cuore bradicardico, e talvolta anche aritmico, del colombo in inanizione comporta una quantità di N totale, proteico, non proteico ed aminico, che, pur essendo differente nei due casi, è sempre inferiore a quella del muscolo scheletrico.

La differenza sta in ciò che nel cuore del colombo, che ha perso per inanizione il 22 % in media del suo peso corporeo, andando incontro ad una diminuzione della frequenza media del battito cardiaco del 48 %, è diminuita insignificativamente la percentuale dell'N totale (— 2,2) e proteico (— 3,3) ed è aumentata insignificativamente la percentuale dell'N non proteico (+1,4) ed aminico (+16,6).

Ora, se si considera che nelle anzidette condizioni d'inanizione il cuore perde circa il 20 % del suo peso, ne risulta che il cuore bradicardico, e talvolta anche aritmico, per inanizione subisce una perdita netta di N altamente significativa per le varie frazioni, eccettuato l'N aminico. In contrapposizione alla significanza statistica di questa perdita sta la statisticamente insignificante modificazione del contenuto percentuale delle varie frazioni e quindi della composizione azotata del cuore.

Secondo noi, il valore biologico della valutazione statistica dei nostri rilievi sta in ciò che essi sono chiaramente indicativi dell'involgimento delle proteine cardiache nel metabolismo protidico generale endogeno dell'inanizione, per cui il cuore, lungi dall'essere preservato a spese di altri organi, è costretto a diminuire la sua massa azotata, senza modificare però la sua composizione azotata.

Ma dobbiamo accontentarci di un'interpretazione biologica ancorata alla valutazione strettamente statistica delle modificazioni della composizione azotata percentuale o non dobbiamo vedere se della diminuzione percentuale dell'N totale e proteico e dell'aumento percentuale dell'N aminico, non si possa tentare anche una semplice interpretazione biologica, la quale, come ora vedremo, offre lo spunto per altre ricerche?

Se teniamo presente che nel digiuno il *pool* degli aminoacidi si svuota lentamente e continuamente degli aminoacidi essenziali, noi non possiamo

escludere che l'insignificante diminuzione percentuale dell'N totale e proteico, presentata dal cuore da inanizione, possa essere l'espressione dell'usura di una particolare quota proteica, quantitativamente modesta ma altamente differenziata, e forse peculiare del sistema specifico, la quale non può essere completamente compensata precisamente per il fatto della mancanza o della deficienza di determinati aminoacidi essenziali nel *pool* a disposizione del cuore; né possiamo escludere che l'aumento della quota aminica possa essere l'espressione vuoi dell'esaltata usura delle proteine, vuoi della diminuita capacità sintetica del metabolismo cardiaco, e forse anche epatico, a causa dell'anzidetta deficienza di uno o più composti essenziali, i quali, non potendo essere riversati nel *pool* a disposizione del cuore in quantità bastevoli attraverso la disassimilazione delle proteine tissulari a livello degli altri organi e tessuti, devono essere necessariamente introdotti dall'esterno.

Se così è, le ora insignificanti modificazioni del contenuto percentuale delle varie frazioni dell'N potrebbero divenire statisticamente significative eseguendone la determinazione in animali più appropriati, in zone cardiache più adatte, diverse dalla regione della punta questa volta adoperata, e soprattutto sullo stesso fascio di His.

Vogliamo chiudere, facendo notare che i fatti biochimici osservati non solo possono accordarsi perfettamente con quanto uno di noi aveva già dimostrato o sostenuto con ricerche fisiologiche e istochimiche [8, 9], ma possono costituire anche un bell'esempio di correlazione tra modificazioni biochimiche, istochimiche e funzionali: ad esempio, la perdita netta di N totale e proteico del cuore da inanizione si accorda perfettamente col fatto che la bradicardia da inanizione insorge allorquando nelle combustioni prevale l'impegno delle sostanze proteiche, e si aggrava allorquando nell'organismo, protraendosi il digiuno, si accentua il catabolismo proteico; la molto modica diminuzione percentuale della frazione proteica può accordarsi con le lesioni involutive sino alla necrosi osservabili in alcune cellule del Purkinje; infine l'aumento della frazione aminica si accorda con quanto uno di noi aveva già sostenuto e cioè che il diverso grado di PAS positività, riscontrabile nella sostanza fondamentale intorno alle fibre muscolari e nelle cellule del Purkinje, sia verosimilmente intrattenuto da aminoacidi contenenti gruppi idrossiamino attivi e quindi possa essere l'espressione istochimica del disordine nutritivo protidico del cuore.

Bibliografia.

[1] Livrea G., « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *24*, 557 (1958).
[2] Livrea G. e De Stefano F., « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *24*, 579 (1958).
[3] Livrea G. e De Stefano F., « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *24*, 749 (1958).
[4] Chibnall A. C., Rees M. W. and Williams E. F., « Biochem. J. », *37*, 354 (1943).
[5] Markham R., « Biochem. J. », *36*, 790 (1942).
[6] Tashiro J., « Am. J. Physiol. », *60*, 519 (1940).
[7] Bussi L. e Caccianotti S., « Minerva Med. », *38*, 221 (1947).
[8] Livrea G. e Craxì P., « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *16*, 508 (1954).
[9] Livrea G., « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *16*, 763 (1954).

Fisiologia. — *Sulla glicemia del colombo* (*). Nota (**) di PIETRO D'ARCANGELO, presentata dal Corrisp. G. AMANTEA.

Nel colombo normale e a digiuno da circa 24 h la glicemia, determinata con i comuni metodi basati sulla misura del potere riducente del filtrato di sangue dopo deproteinizzazione, oscilla intorno a 2 g/l, con variazioni più o meno ampie in rapporto, oltre che con il metodo impiegato, con la razza dell'animale (Riddle e Honeywell (1), Rubini (2), Riddle e Coll. (3)). È noto che i valori glicemici ottenibili con i metodi suddetti non esprimono esattamente la concentrazione del glicoso ematico, essendo questi metodi sensibili, sia pure in misura variabile, anche ad altre sostanze riducenti contenute nel sangue: glutatione, ergotioneina, acido glicuronico, acido urico, creatina, creatinina. Secondo Gulland e Peters (4) ciò varrebbe in special modo per il colombo, nel quale la concentrazione ematica delle sostanze riducenti non–glicoso sarebbe considerevolmente più elevata che nei mammiferi. In colombi a digiuno da 24 h questi Autori trovarono, con il metodo di Hagedorn e Jensen, una glicemia (sostanze riducenti totali) di 2,05 $\pm$ 0,15 g/l; sul sangue dopo glicolisi spontanea *in vitro* o prelevato durante la crisi convulsiva provocata da somministrazione di forti dosi di insulina, la concentrazione di sostanze riducenti scese a circa 0,70 g/l. La glicemia *vera*, calcolata dagli Autori per differenza tra questi due valori, sarebbe quindi di 1,35 $\pm$ 0,15 g/l. Le sostanze riducenti non–glicoso sarebbero contenute quasi esclusivamente nella parte corpuscolata del sangue. Nei filtrati ottenuti dalla deproteinizzazione con idrossido di Zn, secondo il metodo di Hagedorn e Jensen, la riduzione residua sarebbe dovuta, secondo gli Autori suddetti, all'ergotioneina (0,30, in g di glicoso °/$_{00}$) e ad altre sostanze non precisate, tra cui probabilmente un composto acido urico–riboso.

Questi risultati concordano con quelli di Irving (5), che su sangue di colombi, dopo glicolisi *in vitro* protratta fino ad ottenere valori di riduzione costanti, dosò una quantità di sostanze riducenti pari a circa 0,60 g/l. Nello stesso senso, inoltre, sembrerebbero esprimersi i dati ottenuti da vari ricercatori sulla glicemia del colombo durante la crisi convulsiva da insulina, qualora si volesse ammettere, in base a quanto sembra risultare dalle citate

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Roma nell'anno 1957.

(**) Pervenuta all'Accademia il 3 luglio 1958.

(1) O. RIDDLE e H. E. HONEYWELL, « Am. J. Physiol. », LXVII, 317 (1923–24).

(2) R. RUBINI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (Sc. fisiche, matem. e nat.), XXVII, fasc. 5 (1938).

(3) O. RIDDLE e Coll., *Studies on carbohydrate and fat metabolism* (with especial reference to the pigeon), Carnegie Instit. Publ., 569, Washington (1947).

(4) J. M. GULLAND e R. A. PETERS, « Biochem. J. », XXIV, 91 (1930).

(5) Citato da GULLAND e PETERS (loc. cit.).

ricerche di Gulland e Peters, che anche nel colombo, analogamente a quanto hanno riferito per il coniglio Hiller, Linder e Van Slyke [6], la somministrazione di dosi convulsivanti di questa sostanza, provochi, come la glicolisi *in vitro*, la completa scomparsa del glicoso dal sangue. In detta condizione Peters e Kinnersley [7] dosarono, con il metodo di Hagedorn e Jensen, una quantità di sostanze riducenti pari a 0,70 g/l; La Grutta [8], con lo stesso metodo, ottenne valori compresi tra 0,43 e 0,78 g/l (media = 0,59 g/l), su colombi con glicemia iniziale media di 1,95 g/l; Gigante [9], con il 2° micrometodo di Bang, trovò valori di 0,57 g/l su due colombi la cui glicemia di partenza era di 1,91 g/l.

In base alle osservazioni su esposte la concentrazione reale di glicoso nel sangue del colombo dovrebbe essere valutata intorno a 1,30–1,40 g/l; nettamente inferiore, quindi, al valore di circa 2 g/l fornito dai comuni metodi di riduzione. Il numero estremamente esiguo dei dati sperimentali e il valore non sufficientemente probativo di molti di questi (in particolare di quelli sulla concentrazione delle sostanze riducenti ematiche nella crisi convulsiva da insulina, durante la quale non risulta chiaramente accertata la completa scomparsa del glicoso del sangue) non consentono, però, a nostro avviso, una valutazione sicura. Abbiamo, perciò, ritenuto utile raccogliere nuovi dati che potessero contribuire alla chiarificazione di questo argomento.

Riferiamo, con la presente nota, i risultati di alcuni dosaggi da noi eseguiti su sangue di colombi al fine di discriminare l'aliquota delle sostanze riducenti ematiche identificabile con il glicoso, da quella costituita da sostanze non-glicoso.

Le esperienze sono state eseguite su 30 colombi torraioli, adulti e di ambo i sessi, alimentati con grano. Su ogni animale sono state dosate le sostanze riducenti ematiche prima e dopo aver sottoposto il sangue a fermentazione con lievito: dai valori delle concentrazioni delle sostanze riducenti *totali* e di quelle *residue* dopo fermentazione, è stata calcolata per differenza la concentrazione dello zucchero fermentescibile, che, per quanto è noto, si considera, in pratica, costituito interamente da glicoso. I dosaggi sono stati eseguiti secondo una tecnica da noi elaborata, esposta dettagliatamente in altra nota [10], consistente nel deproteinizzare il sangue con acido tungstico diluito e nel determinare, secondo il metodo di Hagedorn e Jensen, il potere riducente del deproteinizzato, prima e dopo incubazione con lievito. In 14 colombi, parallelamente al dosaggio dello zucchero fermentescibile, è stata eseguita la determinazione della glicemia secondo il metodo di Hagedorn e Jensen; in uno di questi animali, inoltre, è stato contemporaneamente

(6) A. HILLER, G. C. LINDER e D. D. VAN SLYKE, « J. Biol. Chem. », LXIV, 625 (1925).

(7) Citati da GULLAND e PETERS (loc. cit.).

(8) G. LA GRUTTA, « Boll. Soc. Ital. Biol. Sper. », XXV, fasc. 11–12 (1949).

(9) D. GIGANTE, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (Sc. fisiche, matem. e nat.), XIX, 12 (1934).

(10) P. D'ARCANGELO, « Arch. Sc. Biologiche » (in corso di stampa).

TABELLA I.

Numero dell'animale	Peso corporeo in g	Sostanze riducenti totali	Sostanze riducenti residue	Sostanze riducenti fermentescibili
		in g di glicoso/l di sangue		
1	392	1,93	0,97	0,96
2 (*)	422	2,42	0,78	1,64
3	387	2,30	0,80	1,50
4	457	2,45	0,79	1,66
5	413	2,13	0,81	1,32
6	450	2,89	1,00	1,89
7	418	2,10	0,80	1,30
8	460	2,24	0,72	1,52
9	408	2,26	0,93	1,33
10	370	2,21	0,60	1,61
11	490	2,14	0,74	1,40
12	515	2,55	0,79	1,76
13	420	2,25	0,76	1,49
14	487	2,30	0,85	1,45
15	375	2,04	0,63	1,41
16	480	2,25	0,81	1,44
17	420	2,09	0,74	1,35
18	377	2,09	0,70	1,39
19	403	2,11	0,77	1,34
20	394	2,21	0,74	1,47
21	475	2,11	0,58	1,53
22	440	2,07	0,62	1,45
23	407	2,28	0,79	1,49
24	417	2,33	0,76	1,57
25	450	2,40	0,67	1,73
26	392	2,21	0,58	1,63
27	432	2,01	0,80	1,21
28	398	2,17	0,73	1,44
29	400	2,21	0,74	1,47
30	398	2,55	0,93	1,62
Medie e scarti quadratici medi	425 ± 37	$2,24 \pm 0,19$	$0,76 \pm 0,10$	$1,48 \pm 0,18$

(*) Dosaggio eseguito su sangue reso incoagulabile per aggiunta di ossalato di K.

effettuato il dosaggio delle sostanze riducenti ematiche prima e dopo glicolisi spontanea *in vitro*. Le determinazioni sono state sempre eseguite su sangue prelevato dalla vena ascellare e ad animale digiuno da circa 24 h. Per la glicolisi il sangue è stato raccolto in un tubo da saggio e mantenuto fluido per aggiunta di ossalato di K allo 0,1 %, concentrazione che non disturba il decorso del processo glicolitico (MacLeod [11], Evans [12], Hiller, Linder e Van Slyke [6]). Il tubo, ben chiuso con tappo di gomma, è stato mantenuto in termostato a 41 °C per 24 h, tempo sufficiente per ottenere una glicolisi completa.

TABELLA II.

Numero dell'animale	Sostanze riducenti totali	Sostanze riducenti residue	Sostanze riducenti fermentescibili	Glicemia sec. Hagedorn–Jensen, in g/l
	in g di glicoso/l di sangue			
1	1,93	0,97	0,96	1,64
2 (*)	2,42	0,78	1,64	2,13
3	2,30	0,80	1,50	2,10
4	2,45	0,79	1,66	2,27
5	2,13	0,81	1,32	1,87
6	2,89	1,00	1,89	2,44
7	2,10	0,80	1,30	1,86
8	2,24	0,72	1,52	2,14
9	2,26	0,93	1,33	1,98
10	2,21	0,60	1,61	1,93
11	2,14	0,74	1,40	1,82
12	2,55	0,79	1,76	2,32
13	2,25	0,76	1,49	1,99
14	2,30	0,85	1,45	1,93
Medie e scarti quadratici medi	2,30 ± 0,23	0,81 ± 0,10	1,49 ± 0,23	2,03 ± 0,22

(*) Dosaggio eseguito su sangue reso incoagulabile per aggiunta di ossalato di K.

Riassumiamo in breve i risultati ottenuti:

a) In 30 colombi la concentrazione ematica delle sostanze riducenti *totali* e quella delle sostanze riducenti *residue* dopo fermentazione con lievito,

(11) J. J. R. MACLEOD, « Physiol. Rev. », I, 208 (1921).
(12) C. L. EVANS, « J. Physiol. », LVI, 146 (1922).

dosate secondo la tecnica da noi elaborata [10], sono risultate, rispettivamente, di 2,24 ± 0,19 e di 0,76 ± 0,10, espresse in g di glicoso/l. La concentrazione dello zucchero fermentescibile, calcolata per differenza da questi valori, è risultata di 1,48 ± 0,18 g/l (ved. Tabella I).

b) In 14 di questi animali il dosaggio della glicemia, eseguito secondo il metodo di Hagedorn e Jensen, ha dato un valore di 2,03 ± 0,22 g/l. Tale valore risulta più elevato di 0,54 g/l ($t = 6,750$; $P < 0,01$) rispetto alla concentrazione dello zucchero fermentescibile (ved. Tabella II).

TABELLA III.

(colombo n. 2)

	Sostanze riducenti totali	Sostanze riducenti residue	Sostanze riducenti fermentescibili	Glicemia sec. Hagedorn–Jensen, in g/l
	in g di glicoso/l di sangue			
Prima della glicolisi	2,42	0,78	1,64	2,13
Dopo la glicolisi	0,77	0,78	0,00	0,46
Sostanze riducenti scomparse per effetto della glicolisi	1,65	0,00	1,64	1,67

c) Nel colombo n. 2 la concentrazione ematica del glicoso, calcolata per differenza tra i valori di riduzione ottenuti prima e dopo glicolisi, è risultata esattamente corrispondente a quella dosata nello stesso animale con il metodo della fermentazione. La glicolisi si è svolta fino a totale eliminazione del glicoso, come dimostrano i risultati nulli ottenuti dal dosaggio dello zucchero fermentescibile nel campione di sangue al termine delle 24 h di permanenza in termostato (ved. Tabella III).

Come risulta dai valori riportati nella Tabella II, la concentrazione ematica delle sostanze riducenti *totali* dosata con il nostro metodo è sensibilmente più alta (in media di 0,27 g/l) di quella determinata con il metodo di Hagedorn e Jensen. Tale differenza è dovuta al fatto che i filtrati di sangue ottenuti, come nel nostro metodo, dalla deproteinizzazione con acido tungstico contengono una quantità di sostanze riducenti non-glicoso maggiore che i filtrati preparati secondo il metodo di Hagedorn e Jensen (Somogyi [13], Herber e Coll. [14], Gulland e Peters [4]).

(13) M. SOMOGYI, «J. Biol. Chem.», LXXXIII, 157 (1929).

(14) K. F. HERBERT e M. C. BOURNE, «Biochem. J.», XXIV, 299–309 (1930); K. F. HERBERT e J. GROEN, «Biochem. J.», XXIII, 339 (1929).

In conclusione, i nostri risultati concordano in linea di massima con quelli ottenuti per altra via da Gulland e Peters [4] e confermano che la vera concentrazione del glicoso nel sangue del colombo è considerevolmente inferiore ai valori ottenibili con i comuni metodi di determinazione della glicemia basati sulla misura del potere riducente del filtrato di sangue dopo deproteinizzazione. In questo animale l'elevata concentrazione ematica delle sostanze riducenti non-glicoso, sensibilmente più alta di quella del sangue dei mammiferi, invalida in speciale misura i risultati delle determinazioni glicemiche eseguibili con detti metodi.

Fisiologia. — *Aumento del tempo di un riflesso corticale provocato dall'ipocapnia* (*). Nota (**) di Emilio Agostoni, Domenico Spinelli e Paolo Cerretelli, presentata dal Socio R. Margaria.

L'ipocapnia produce un peggioramento delle prestazioni psicomotorie, come è stato dimostrato con vari tipi di prove (tempo di reazione, di discriminazione, ecc.) eseguite durante iperventilazione volontaria o provocata mediante autorespiratori a pressione positiva (Rushmer e coll., 1941; Rahn e coll., 1946; Balke e Lillehei, 1956 e Rossanigo e Strollo, 1957). In queste prove interferisce la volontà del soggetto esaminato ed inoltre, poiché spesso è richiesta una coordinazione dei movimenti, la prestazione può essere compromessa dallo stato di subtetania.

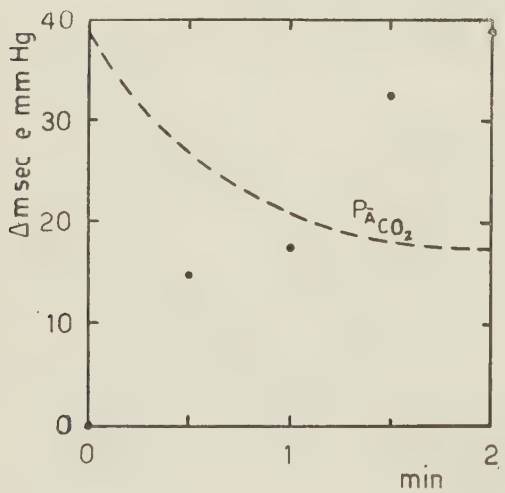


Fig. 1. – Incremento del tempo del riflesso orbicolare allo stimolo luminoso (Δ msec) e pressione parziale del CO_2 negli alveoli ($P_{\bar{A}CO_2}$ mm Hg, linea tratteggiata) in funzione del tempo nei primi due minuti di iperventilazione volontaria (circa 20 l/min).

La deviazione standard del tempo riflesso dell'orbicolare rilevato in condizioni normali era, nei soggetti esaminati, ca ± 5 msec.

Per analizzare quantitativamente nelle condizioni di ipocapnia lo stato dell'attività riflessa superiore si è misurato il tempo di un riflesso corticale, cioè del riflesso orbicolare allo stimolo luminoso, secondo la tecnica recentemente introdotta per lo studio dell'attività riflessa superiore (Spinelli, 1958). Che questo riflesso sia corticale è reso probabile dal fatto che esso scompare durante anestesia leggera con barbiturici e, nel gatto, con la decorticazione: esso inoltre non coinvolge aree di associazione ed è quindi automatico.

Lo stimolo luminoso era ottenuto con una lampada al cripton producente un flusso luminoso di 12 megalumen per 100 msec. Lo stimolo veniva ripetuto 3–5 volte ad un intervallo da 2 a 4 sec, dopo di che si interrompeva per un periodo variabile, secondo il tipo di esperimento, da 30 sec a 5 min.

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisiologia dell'Università di Milano.

(**) Pervenuta all'Accademia il 14 luglio 1958.

Il soggetto sedeva di fronte alla sorgente luminosa alla distanza di 2 metri, sistemato in modo che l'asse del riflettore parabolico coincidesse con l'asse dei bulbi oculari. Data la potenza della sorgente luminosa, il soggetto poteva stare ad occhi chiusi; erano così ridotti l'ammiccamento spontaneo e quindi l'attività elettrica di base. I potenziali d'azione dell'orbicolare, derivati per via transcutanea venivano amplificati e rilevati con un oscillografo a raggi catodici il cui asse dei tempi era sincronizzato con lo stimolo luminoso.

Gli esperimenti sono stati eseguiti in 3 soggetti in diverse sedute a distanza di giorni. Il soggetto iperventilava volontariamente.

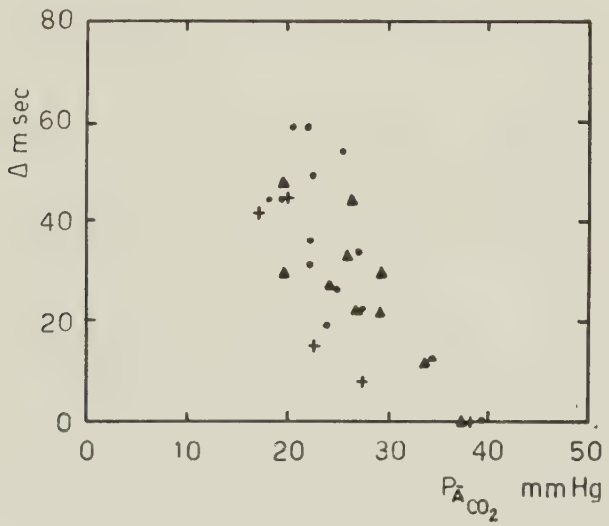


Fig. 2. – Incremento del tempo del riflesso orbicolare allo stimolo luminoso (Δ msec) in funzione della pressione parziale del CO_2 negli alveoli.

Ogni segno corrisponde ad un diverso soggetto.

La pressione di CO_2 nell'aria alveolare media ($P_{\bar{A}CO_2}$) veniva rilevata continuamente per mezzo di un analizzatore rapido all'infrarosso per tutto il tempo dell'esperimento. In alcune prove un valore di $P_{\bar{A}CO_2}$ di 25–30 mm Hg è stato mantenuto per circa 45 min.

Alla diminuzione del valore di $P_{\bar{A}CO_2}$, prodotto dall'iperventilazione, corrispondeva un aumento significativo del tempo riflesso (fig. 1); nella fig. 2 sono posti gli incrementi dei tempi riflessi rilevati nei tre soggetti a diversi valori di $P_{\bar{A}CO_2}$. L'allungamento del tempo riflesso compare in genere anche a livelli modici di ipocapnia ($P_{\bar{A}CO_2}$ = circa 30 mm Hg) pur presentando una notevole variabilità nei diversi individui. Quando il soggetto rimaneva per 45 min ad un ugual livello di ipocapnia ($P_{\bar{A}CO_2}$ = 25–30 mm Hg) il tempo riflesso tendeva progressivamente a ritornare alla norma (fig. 3).

Una condizione di ipocapnia si verifica in seguito a breve iperventilazione dovuta a varie cause (ipossia, respirazione a pressione positiva, ipertermia, stato ansioso): essa è quindi una causa delle modificazioni dell'attività riflessa superiore che si verificano in queste condizioni.

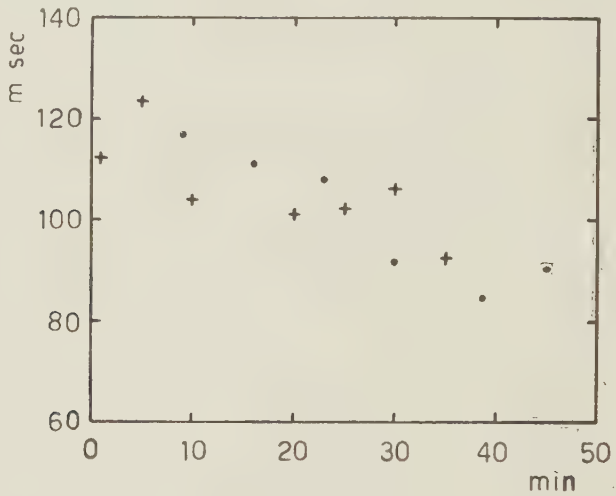


Fig. 3. – Tempo del riflesso orbicolare allo stimolo luminoso durante uno stato di ipocapnia ($P_{\bar{A}CO_2}$ = 25–30 mm Hg) protratto per oltre 30 min.

I risultati si riferiscono a due prove eseguite su uno stesso soggetto; il tempo riflesso in condizioni normali nel soggetto in esame era circa 80 msec con una deviazione standard di ± 5 msec.

L'allungamento del tempo riflesso sembra prevalentemente sostenuto da un ritardo sinaptico a livello corticale e non retinico: infatti abbiamo potuto stabilire che, rilevando i potenziali dalla corteccia visiva nel gatto, il potenziale evocato dallo stesso stimolo luminoso (12 megalumen) nella retina si manifesta in corteccia con un ritardo di 15 msec, sia in condizioni normali che in ipocapnia. Inoltre poiché nell'uomo questo tempo è dello stesso ordine di grandezza (Cobb e Dawson, 1956) le sue eventuali variazioni sarebbero trascurabili sul tempo del riflesso orbicolare (80–90 msec). Il ritorno alla norma in circa 1 ora del tempo riflesso potrebbe indicare una capacità di adattamento degli elementi corticali, almeno di quelli appartenenti alle aree sensitive e motorie.

Bibliografia.

Balke B. e Lillehei J. P., « J. Applied Physiol. », *9*, 371 (1956).

Cobb W. e Dawson G. D., 20 Intern. Physiol. Congress, Bruxelles, 182 (1956).

Rahn H., Otis A. B., Hodge A. B., Epstein M. A., Hunter S. W. e Fenn W. O., « J. Aviation Med. ». *17*, 164 (1946).

Rossanigo F. e Strollo M., « Riv. Med. Aer. », *21*, 68 (1958).

Rushmer R. F., Boothby W. M. e Hinshaw H. C., « Proc. Staff Meet. Mayo Clin. »; *16*, 80 (1941).

Spinelli D., in corso di stampa.

Fisiologia. — *Soglia cerebellare alle accelerazioni rotatorie e sommazione temporale nel piccione viaggiatore* (*). Nota (**) di TORQUATO GUALTIEROTTI e DINO PASSERINI, presentata dal Socio R. MARGARIA.

L'ipotesi che l'apprezzamento di differenze di accelerazione dovute alle forze geodetiche possa essere considerato la base del senso di direzione nelle specie migratorie è già stata avanzata da Ising [1] e ampiamente discussa in altro lavoro [2].

Queste forze agirebbero presumibilmente sul labirinto che è l'organo appropriato per ricevere stimoli cinestesici, e gli impulsi ivi originati sarebbero convogliati al cervelletto.

La differenza qualitativa nelle risposte cerebellari alle accelerazioni di piccioni viaggiatori e di piccioni normali potrebbe essere l'espressione di una speciale sensibilità di questo apparato nelle specie migratorie.

Si tratta di stabilire se la soglia di risposta alle accelerazioni nei piccioni viaggiatori sia tale da rendere accettabile l'ipotesi di Ising, e cioè inferiore agli stimoli rappresentati dalle forze geodetiche.

Riassumendo brevemente i dati riguardanti le differenze di accelerazione dovute a forze geodetiche si rileva che la differenza di accelerazione fra l'equatore e i poli, riconducibile alla forza centrifuga prodotta dalla rotazione della terra, che è nulla ai poli e massima all'equatore, è di solo 0,005 g. Inoltre, se un animale viaggia alla velocità di 70 Km/ora sulla linea dell'equatore, sarà soggetto ad una forza centrifuga più alta se vola in direzione della rotazione terrestre (ovest–est) che se vola in direzione est–ovest. La differenza di forza centrifuga in queste condizioni è però soltanto di 0,000,05 g. Per di più, se un animale vola lungo un meridiano o un parallelo alle diverse latitudini, sarà soggetto ad un'addizionale accelerazione di Coriolis quando faccia movimenti di rotazione laterale, o di flessione, o di estensione. Se ϑ è l'angolo tra i vettori delle due velocità, cioè la velocità angolare della rotazione terrestre ω e la velocità aggiunta v dovuta al movimento della testa in una direzione perpendicolare o laterale a velocità costante, l'accelerazione di Coriolis è

$$2\,\overline{\omega}\,\overline{v}\,\operatorname{sen}\vartheta\cos\lambda$$

essendo λ la latitudine.

(*) Dal Laboratorio di Fisiologia Umana dell'Università di Milano.

Questa ricerca è stata finanziata dall'Ufficio di Ricerca Scientifica dell'Air Research and Development Command, United States Air Force, tramite il suo Ufficio Europeo, secondo il Contratto AF 61(052)–23.

(**) Pervenuta all'Accademia il 2 agosto 1958.

(1) G. ISING, «Arch. Mathem. Astron. Physik», *32 A*, 1 (1946).

(2) B. SCHREIBER, T. GUALTIEROTTI e D. MAINARDI «Rendic. Ist. Lomb. Sci. Lett.», *88*, 860 (1955).

Qualora un piccione voli in direzione nord–sud, facendo un movimento laterale della testa per un'estensione di 7° alla velocità di 20 cm/sec, 2 cm essendo la distanza tra il labirinto e il centro di rotazione della testa, allora l'accelerazione di Coriolis nelle condizioni più favorevoli, cioè all'equatore, è di $3{,}21 \times 10^{-6}$ g. Al quarantacinquesimo parallelo per una distanza di 5.000 Km la variazione sarà soltanto di 1×10^{-6} g.

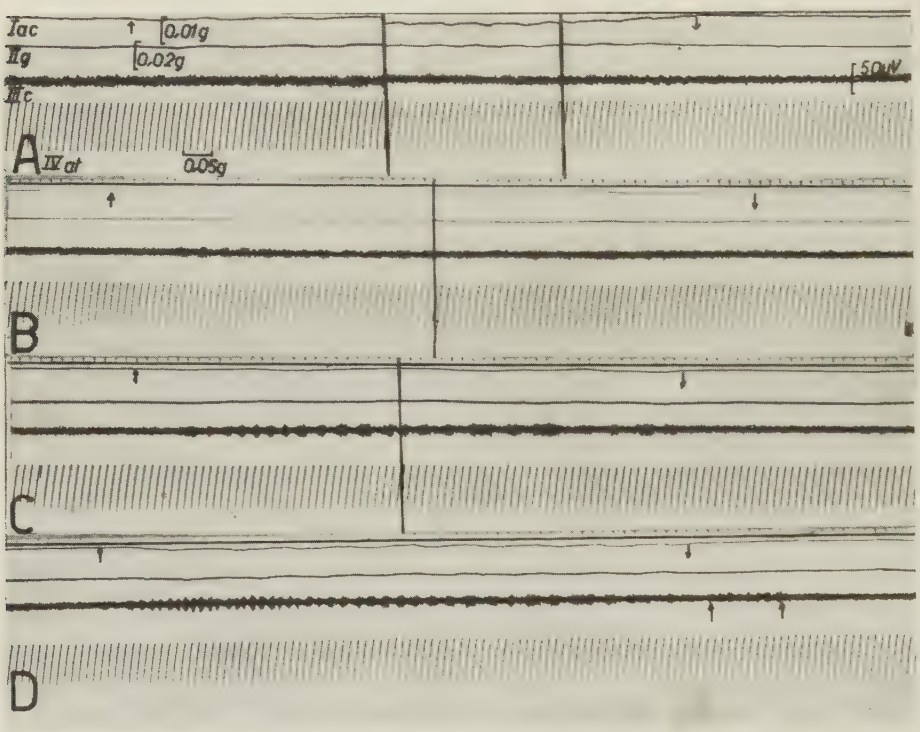


Fig. – 1. Piccione viaggiatore, rotazione orizzontale.

Elettrocerebellogramma dai flocculi (III *c*). Accelerazioni centripeta (I *ac*) tangenziale (IV *at*) e verticale (II *g*) sono state simultaneamente registrate. La taratura dei tre accelerometri è riportata nella figura.

Si determina la soglia per le risposte rotatorie e postrotatorie aumentando la velocità della centrifuga fino ad un certo valore e poi riportandola a zero lentamente dopo 10 sec di rotazione, a velocità costante. Da *A* verso *D* l'accelerazione centripeta aumenta di 1/1000 di g alla volta, partendo da 0,001 g in *A*. La soglia per risposte rotatorie è di 1–2/1000 g; quella per scariche postrotatorie un pò più alta: 3–4/1000 g. Le variazioni di gravità e di accelerazione tangenziale sono irrilevanti: $<$ 0,001 g.

Una linea dritta di riferimento è tracciata in alto di ogni tracciato per facilitare la lettura, appena sopra la linea di base dell'accelerometro centripeto. Segnatempo 1/4 sec. Inizio e fine di ogni rotazione segnata con una freccia. In *D* le scariche postume sono anche indicate da frecce all'inizio ed alla fine.

Le linee verticali nere corrispondono ad un intervallo di 1 sec.

Per quanto questi dati rendano assai poco verosimile l'ipotesi che il senso di direzione delle specie migratorie si basi sul rilievo fisiologico di tali piccole differenze di accelerazione, si è intrapresa la presente ricerca allo scopo di determinare la soglia delle modificazioni rotatorie e postrotatorie dell'attività cerebellare e di stabilire se i valori di soglia fossero dell'ordine di grandezza delle suddette forze geodetiche.

La fig. 1 mostra le risposte rotatorie e postrotatorie ad accelerazioni centripete crescenti tra 0,001 e 0,004 g. Come si vede, una risposta costituita

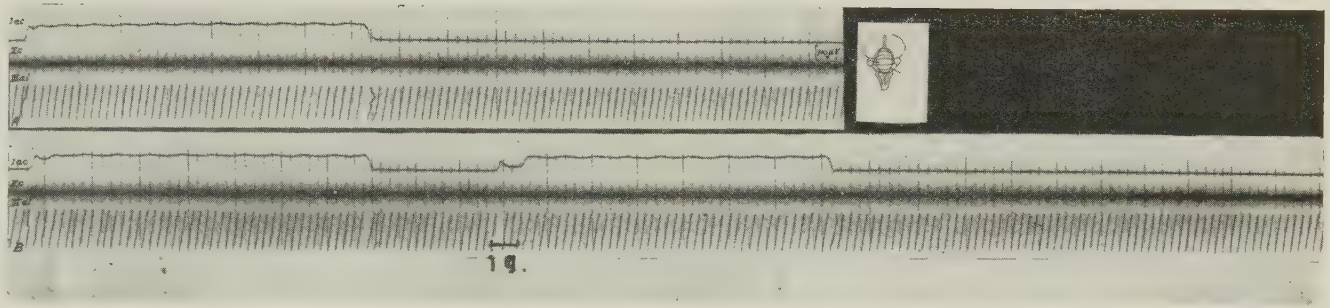


Fig. – 2. Piccione viaggiatore. Rotazione orizzontale.

I *ac*: accelerazione centripeta = 0,33 g.
II *c*: elettrocerebellogramma (nello schema a destra posizione degli elettrodi).
III *at*: accelerazione tangenziale registrata trasversalmente, asse dei tempi = 100 msec.
A: notare le scariche postume che seguono una singola rotazione.
B: notare l'aumento delle scariche postume che seguono due rotazioni, la seconda delle quali ha avuto luogo mentre ancora continuavano le scariche postume seguenti la prima rotazione.
Segnatempo 1/5 sec. Taratura degli accelerometri e amplificazione indicate nella figura.

da una o due evidenti scariche postume a forma di fuso richiede un valore di 0,003 g. Tale risposta aumenta notevolmente e diventa più evidente a 0,004 g.

È stato inoltre osservato che il comparire delle risposte postume è in relazione non soltanto con l'intensità dell'accelerazione centripeta, ma anche con la durata della medesima. Questo elemento rende particolarmente difficile un'accurata misura assoluta della soglia.

Mediante una serie di rotazioni susseguentisi a breve intervallo si produce una sommazione temporale (fig. 2). Come si vede, il numero e la frequenza delle scariche postume aumentano notevolmente se una seconda rotazione con gli stessi caratteri della prima viene applicata mentre ancora durano le scariche postume della prima rotazione.

Dall'insieme di questi dati risulta che la sensibilità alla sollecitazione rotatoria è assai elevata nel piccione viaggiatore, e che la durata della rotazione e la sommazione temporale aumentano ancora tale sensibilità. Tuttavia l'ordine di valori di soglia alla sollecitazione rotatoria è di circa 10^{-3} g, assai distante dai valori necessari per rilevare le forze geodetiche summenzionate, che sono di circa 10^{-6} g. Bisogna però tener presente che la registrazione delle risposte rotatorie e postrotatorie è stata eseguita da una larga zona del lobo posteriore e dal verme inferiore del piccione viaggiatore e non cercando determinati centri cinestesici equivalenti a quelli esistenti nel flocculo–nodulo del mammifero.

Esperimenti sono in corso allo scopo di stabilire se esistano tali centri e quale sia la loro sensibilità alle accelerazioni. Tuttavia è difficile che tale sensibilità permetta la ricezione di valori dell'ordine di quelli dovuti alle forze geodetiche. Infatti durante il volo l'animale è soggetto ad accelerazioni irregolari di almeno 5–6 g (per esempio, per cadute in vuoti d'aria o bruschi cambiamenti di direzione). I movimenti vivaci della testa possono produrre accelerazioni fino a 4–5 g. Inoltre si può facilmente calcolare come le correnti di convezione nell'endolinfa in seguito a minime variazioni di temperatura, possano provocare nei canali semicircolari eccitazioni dell'ordine di quelle delle forze geodetiche.

Ciò nonostante, a nostro parere, può avere un certo significato il rilievo di una differenza qualitativa delle risposte alle accelerazioni del piccione viaggiatore rispetto al piccione normale; e così pure il fatto che la soglia alle sollecitazioni acceleratorie sia, nel cervelletto dei piccioni viaggiatori, molto bassa.

Embriologia sperimentale. — *Ricerche sperimentali sulle correlazioni interneuroniche nello sviluppo dei centri e delle vie ottiche, nel pollo* (*). Nota (**) di GUIDO FILOGAMO ed ETTORE STRUMIA, presentata dal Socio G. LEVI.

Le ricerche sperimentali destinate a stabilire le correlazioni esistenti, nello sviluppo, tra i neuroni di un determinato sistema dei centri nervosi dell'embrione di pollo non sono molto numerose. Vanno ricordate quelle di Rita Levi Montalcini (1949) (1) sulle vie acustiche. Ricerche antecedenti di Filogamo (1950) (2) hanno dimostrato che l'estirpazione dell'abbozzo dell'organo visivo alla 48ª ora nell'embrione di pollo non ha, in un primo tempo, influenza di sorta sulla moltiplicazione e differenziazione degli elementi del lobo ottico; solamente a partire dal 12° giorno, incomincia a manifestarsi un certo grado di atrofia delle cellule tettali che procede lentamente fino al 18°; dopo tale epoca si ha la scomparsa di un certo numero di neuroni.

Attualmente ci siamo proposti di studiare il problema con il metodo di Koelle (3), della determinazione istochimica delle colinesterasi. La presenza di questi enzimi, in varie regioni del sistema nervoso centrale, è stata dimostrata sia nell'adulto che nell'embrione di vari vertebrati, con metodo biochimico ed istochimico, da molti Autori (Nachmansohn (4), Youngstrom (5), Kavaler e Kimel (6), Metzler e Humm (7), Shen, Greenfield e Boell (8), Koelle (9), Himwich e Aprison (10), Elkes e Todrick, Gerebtzoff. Secondo Koelle, l'attività colinesterasica specifica sarebbe localizzata a livello del *perikaryon* e lungo gli assoni ed i dendriti di numerosi gruppi di neuroni; attività colinesterasica non specifica fu trovata negli astrociti fibrosi ed in altri gliociti; nella parete dei capillari e nel citoplasma di certi neuroni. Secondo Gerebtzoff l'acetilcolinesterasi è in generale situata nelle superfici sinaptiche.

Scharrer e Sinden (1949) (11) furono i primi a dimostrare la presenza di colinesterasi con metodo istochimico nel tetto ottico del piccione adulto

(*) Ricerche compiute nell'Istituto anatomico di Torino, diretto da F. Loreti. Dedicate al prof. Giuseppe Levi per il suo 85° compleanno.

(**) Pervenuta all'Accademia il 19 luglio 1958.

(1) R. LEVI MONTALCINI, « J. Comp. Neurol. », *63*, 431 (1949).

(2) G. FILOGAMO, « Riv. Biol. », *42*, 73 (1950).

(3) G. B. KOELLE, « J. Pharmacol. Exp. Therap. », *100*, 158 (1950).

(4) D. NACHMANSOHN, « Comp. Rend. Soc. Biol. », *127*, 670 (1938).

(5) K. A. YOUNGSTROM, « J. Neuro–Physiol. », *4*, 473 (1941).

(6) F. KAVALER, V. M. KIMEL, « J. Comp. Neurol. », *96*, 110 (1952).

(7) C. J. METZLER, D. G. HUMM, « Science », *113*, 382 (1951).

(8) S. C. SHEN, P. GREENFIELD, E. J. BOELL, « J. Comp. Neurol. », *102*, 717 (1955).

(9) G. B. KOELLE, « J. Comp. Neurol. », *100*, 211 (1954).

(10) H. HIMWICH e M. APRISON; J. ELKES e A. TODRICK; M. A. GEREBTZOFF, *Bochemistry of developing Nervous System*. Ed. by H. Wallsch, Academy Press. Inc. Publ., New York (1955).

(11) E. SCHARRER, J. SINDEN, « J. Comp. Neurol. », *91*, 331 (1949).

(metodo Gomori). Recentemente Bonichon (1957) [12], con il metodo Koelle, ha dimostrato la presenza dello enzima nel tetto ottico dell'embrione di pollo. Le uniche ricerche sperimentali che si possono confrontare con le attuali nostre sono quelle eseguite da Boell, Greenfield e Shen (1955) su embrione di Rana pipiens [13].

Abbiamo intrapreso due ordini di esperienze.

In uova di pollo alla 48ª–52ª ora di incubazione (27–31 somiti), scoperta l'area embrionaria con l'apertura del guscio, con l'aiuto di una loupe binoculare ed a mezzo di microbisturi ho asportato la coppa ottica di destra. In 35 embrioni l'asportazione fu completa, per cui, essendo negli uccelli l'incrociamento delle vie ottiche totale, nei successivi periodi di sviluppo non si stabilì alcuna connessione tra il lobo ottico di sinistra e le cellule della retina. Il lobo ottico di destra assunse invece normale connessione con la retina di sinistra e pertanto potè servire di controllo. Gli embrioni furono fissati in periodi compresi tra l'8° ed il 21° giorno di incubazione; in due casi, al secondo giorno della vita postnatale. Le sezioni furono colorate con le tecniche comuni ed in qualche caso furono impregnate con il metodo Bodian. In ambedue i lobi l'attività colinesterasica è stata dimostrata con il metodo Koelle.

In un'altra serie di esperienze abbiamo estirpato l'occhio in pulcini di due giorni e furono esaminati i lobi ottici, con gli stessi metodi sopra indicati, dopo un periodo di 2–15 giorni.

Risultati sull'attività colinesterasica nel lobo ottico normale in periodo pre– e postnatale.

Nel lobo ottico di embrioni del 10° giorno, in uno stadio in cui il processo di differenziazione è iniziale, la reazione della colinesterasi è positiva a livello di tre strisce che occupano rispettivamente la formazione interna, quella grigia intermediaria e quella esterna o retinica (secondo Cajal) [14].

In embrioni dall'11° al 14° giorno la reazione risulta intensa soltanto a livello del 13° strato (secondo Cajal); è più debole che al 10° giorno in tutti gli altri strati. Al 15° giorno la reazione di Koelle aumenta di intensità anche negli strati soprastanti al 13°: particolarmente, al limite tra il 3° e 4° strato (secondo Cajal), vi è uno stretto nastro che reagisce intensamente con il metodo Koelle (fig. 1). A 16 giorni e più ancora a 17 giorni la reazione di Koelle è molto intensa su tutto lo spessore della parete del lobo, ove si eccettui il

(12) A. Bonichon, «Comp. Rend. Ac. Sc.», *245* 1345 (1957).

(13) E. Boell, P. Greenfield, S. Shen, «J. Exp. Zool.», *129*, 415 (1955).

(14) Pedro Ramon, distinse nella corteccia del lobo ottico degli uccelli tre formazioni (esterna, intermedia ed interna) suddividendole ancora in quindici strati complessivi. Successivamente altri Autori (Ris, Huber e Crosby, Leghissa) hanno prospettato una nomenclatura più semplice. La nomenclatura di Leghissa, il quale distingue nove strati soltanto, ci pare più rispondente ai fatti, sopratutto nell'embrione; in questa nota però ci atteniamo alla classificazione di Cajal attualmente più conosciuta. Santiago Ramon Cajal ha completato le osservazioni di suo fratello.

primo strato nel quale decorrono le fibre del nervo ottico ed uno stretto nastro immediatamente soprastante alle cellule nervose del 6° strato, nelle quali regioni è del tutto negativa. La reazione è lievissima subito al di sotto del 2° strato; altre due striscie di minore intensità sono evidenti nello spessore degli strati dall'8° al 12° (fig. 2). Tra il 19° giorno e la schiusa la distribuzione dell'enzima si fa ancora più uniforme; la reazione rimane completamente negativa nello strato delle fibre ottiche e nello spazio che sta al di sopra dei neuroni piramidali del 6° strato. Alcune delle cellule tettali presentano una intensa reazione a livello del perikaryon.

Dopo la schiusa, già nel pulcino di due giorni (fig. 3) e più nettamente in seguito, la reazione di Koelle si fa molto intensa a livello del perikaryon di tutte le cellule tettali, le quali per ciò risaltano sulla diffusa colorazione di fondo. In corrispondenza del 2°, del 4° e del 7° strato secondo Cajal, la reazione della colinesterasi si fa particolarmente marcata nel pulcino di 4 giorni (fig. 4) ed oltre.

CONSEGUENZE NEL LOBO OTTICO DELL'ESTIRPAZIONE DELL'ABBOZZO OCULARE NELL'EMBRIONE PRECOCE.

Come è già noto da ricerche precedenti (Filogamo, 1950) a partire dall'8°–9° giorno di incubazione, il lobo dal lato opposto a quello dell'abbozzo oculare estirpato, presenta manifesti segni di atrofia. All'esame istologico risulta che nello strato superficiale le fibre ottiche sono del tutto scomparse; d'altra parte le cellule di tutti gli strati appaiono integre: questi neuroni hanno proseguito adunque nella differenziazione, nonostante l'assenza delle fibre ottiche. Soltanto a partire dal 12° giorno i neuroni del tetto ottico incominciano ad atrofizzarsi molto lentamente, cosicchè al 18° ed più ancora alla schiusa il numero dei neuroni tettali risulta diminuito. La reazione di Koelle è profondamente modificata. A 14 giorni, al di sopra dello strato 13° di Cajal essa è debolissima; a 15–16 giorni si ha una lieve reazione diffusa ma non compare il nastro caratteristico per il lobo normale al confine tra il 3° ed il 4° strato (fig. 1 *a*). A 15, 16, 17, 18, 19, e 20 giorni la reazione è negativa in tutti gli strati al di sopra del 6° compreso; è modesta negli strati più profondi, tranne che a livello del 13° ove si mantiene tuttora intensa (fig. 2 *a*). A due giorni dopo la schiusa la reazione è negativa in tutti gli strati, ormai fortemente atrofici, posti al di sopra del 6°; rispetto al periodo prenatale la reazione è invece modestamente aumentata negli strati sottostanti, pur essi atrofici (fig. 3 *a*).

RISULTATI SULLA ATTIVITÀ COLINESTERASICA NEL LOBO OTTICO DOPO ESTIRPAZIONE DELL'OCCHIO NEL PULCINO NEONATO.

A due giorni dall'intervento la reazione della colinesterasi a livello del *perikaryon* delle cellule tettali è molto più debole che di norma in tutto lo spessore del tetto (fig. 4 *a*); lievemente diminuita ne è l'intensità

anche a livello dei plessi nervosi interposti tra i corpi cellulari. Quindici giorni dopo l'intervento, sembra che l'attività colinesterasica a livello del *perikaryon* delle cellule tettali ridivenga quasi normale; d'altra parte il 2° strato di Cajal, che nel normale presenta reazione molto intensa scompare completamente.

Discussione.

Vi sono oggi sufficienti dati di fatto per ritenere dimostrato che lo stabilirsi di connessioni sinaptiche alla superficie dei neuroblasti sia una condizione necessaria per il loro accrescimento ed il mantenersi della loro integrità. È poco nota invece l'influenza che lo stabilirsi di quelle connessioni esercita sullo sviluppo dell'attività colinesterasica.

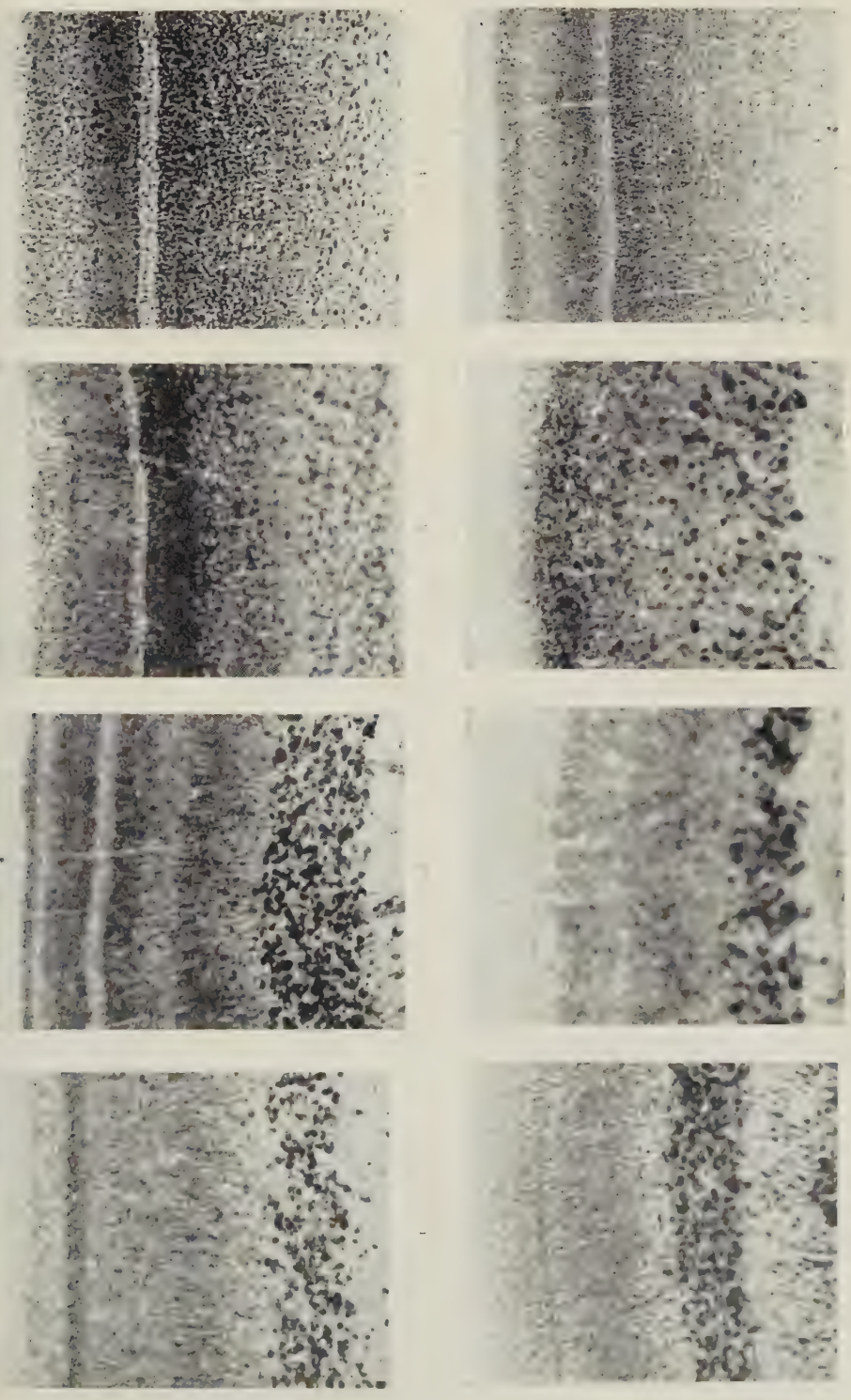
Precedenti ricerche sulla distribuzione di questa attività nel sistema nervoso centrale nell'adulto e nell'embrione fanno ritenere probabile che l'enzima sia associato alle strutture sinaptiche; seppure la distribuzione dell'enzima non si sia potuta sempre strettamente localizzare, perché i rami terminali e le collaterali degli assoni dei centri nervosi costituiscono spesso nel loro tragitto distale arborizzazioni estese e complesse le quali, oltre che in nidi pericellulari, si risolvono in plessi fittamente intrecciati con le arborizzazioni dendritiche.

Tuttavia è noto che l'attività colinesterasica nei centri embrionali è positiva molto precocemente. Kavaler e Kimel, nella corteccia motrice dell'embrione di cavia, hanno osservato che l'attività enzimatica precede il periodo critico della differenziazione delle cellule nervose. Bonichon ha trovato la stessa attività nel tetto ottico dell'embrione di pollo al 4° giorno di incubazione, nel periodo quindi di attiva moltiplicazione cellulare, in cui connessioni interneuroniche sono ben lungi dall'essersi stabilite. Abbiamo pertanto ritenuto opportuno studiare l'influenza che lo stabilirsi delle connessioni retiniche esercita sullo sviluppo dell'attività colinesterasica nei centri dei lobi ottici nell'embrione di pollo associando al metodo istochimico il metodo sperimentale. Con l'impedire, nell'embrione, mediante asportazione dell'abbozzo dell'organo visivo, che si stabiliscano le connessioni dei neuroni tettali con le fibre del nervo ottico o con l'interrompere queste connessioni nel pulcino, abbiamo potuto precisare in quali strati del tetto veniva abolita una connessione sinaptica, esaminando gli embrioni ed i pulcini operati con il metodo istochimico della colinesterasi.

In queste ricerche preliminari abbiamo studiato il problema a partire dal 10°–11° giorno di incubazione dell'embrione di pollo. Ci è noto dalle ricerche di Leghissa [15] che proprio in questo periodo ha inizio la graduale individualizzazione dei diversi tipi di neuroblasti e la definitiva sistemazione stratigrafica della corteccia tettale.

I nostri risultati hanno dimostrato che nel lobo ottico normale l'attività enzimatica, a 12–14 giorni è molto debole in tutti gli strati del tetto,

(15) S. Leghissa, «Zeit. f. Anat. u. Entw. gesch.», *120*, 247 (1958).



Figg. 1-4, 1 *a*-4 *a*. – Sezioni del tetto ottico di embrioni di pollo. Colorazione con il metodo di Koelle per la colinesterasi. Figg. 1-4. Lobi ottici normali. Figg. 1 *a*-3 *a*. – Lobi ottici di embrioni operati di estirpazione dell'organo visivo alla fine del 2° giorno d'incubazione. Fig. 4 *a*. – Lobo ottico di pulcino di 4 giorni operato di asportazione dell'occhio a 2 giorni di età. Figg. 1-1 *a*. – Embrioni al 15° giorno. Figg. 2-2 *a*. – Embrioni al 17° giorno. Figg. 3-3 *a*. – Pulcino di 2 giorni. Figg. 4-4 *a*. – Pulcino di 4 giorni.

tranne che nel 13°. A partire dal 15° giorno ed fino al 17° l'attività aumenta intensamente in tutto lo spessore del tetto, rimanendone esclusi il primo strato, una striscia subito al di sotto del secondo ed uno stretto nastro posto al di sopra delle cellule piramidali del sesto (e cioè il 5° strato sec. Cajal). Nei giorni di sviluppo successivi al 17° la reazione si mantiene intensa ed uniforme, sempre ad esclusione del 1° e del 5° strato. Nel lobo in cui mancano le fibre ottiche, in seguitoalla precoce asportazione dell'abbozzo dell'organo visivo, l'aumento critico dell'attività enzimatica, che normalmente avviene nell'embrione a 15–17 giorni, viene a mancare in tutti e sei gli strati più superficiali del tetto e risulta più debole che di norma anche in quelli profondi. Il differente comportamento degli strati superficiali e di quelli profondi si accorda con la circostanza che le fibre ottiche arrivano con le loro arborizzazioni soltanto fino al 7° strato di Cajal; al di sotto di questo strato si espandono le fibre della sensibilità profonda le quali negli embrioni operati sono rimaste integre.

È opportuno ricordare che l'aumento dell'attività enzimatica nel lobo normale si realizza proprio nel periodo in cui, secondo Leghissa, la struttura del tetto si avvia verso condizioni definitive e si istituiscono le principali articolazioni tra i neuroni dei diversi strati; ed inoltre, che il mancato sviluppo dell'attività enzimatica al 15° giorno coincide con lo svolgersi dei processi regressivi delle cellule tettali determinati dal mancato arrivo delle fibre retiniche; processi regressivi che soltanto a partire dal 18° giorno conducono all'atrofia di un certo numero di neuroni.

Il fatto che l'asportazione dell'occhio nel pulcino neonato determina una netta diminuzione dell'attività colinesterasica a livello del *perikaryon* di tutte le cellule tettali e non solo di quelle direttamente connesse con le arborizzazioni retiniche è evidentemente in rapporto al venir meno degli eccitamenti visivi; la funzione di quel complesso centro di integrazione che è il tetto ottico degli uccelli, viene ad essere perturbata. Noi abbiamo visto d'altra parte che nel pulcino a 15 giorni dall'intervento l'attività enzimatica si ristabilisce pressocché completamente. Quale sia il significato di questo fatto rimane da stabilire.

Biologia. — *Prime ricerche sperimentali sul valore morfogenetico di alcuni fattori funzionali nello sviluppo dell'apparato digerente degli anfibi Anuri* (*). Nota(**) di CARLO BONDI, presentata dal Socio G. COTRONEI.

Nell'intento di svolgere – sulla base delle più moderne acquisizioni dell'embriologia sperimentale – nuove indagini sul valore funzionale e morfogenetico della corda dorsale negli Anfibi anuri – indagini per le quali mi sono riallacciato a quelle magistrali del Giardina (1) sullo stesso argomento – avevo pensato di tentare anch'io l'asportazione della corda dorsale e di provare poi, in alcuni casi, a sostituirla o con un materiale altrettanto flessibile o con un materiale rigido. Ma nell'attuazione pratica di tale idea, mi trovai di fronte alle stesse difficoltà incontrate dal Giardina. Quest'autore, infatti, per poter valutare compiutamente l'azione della corda dorsale, aveva pensato alla sua asportazione, ma tale operazione, pur attuata nel momento più opportuno, non riuscì, in modo completo, al Giardina che in un solo embrione di *Discoglossus pictus* su alcune centinaia di tentativi condotti in embrioni di *Discoglossus*, *Rana* e *Triton*.

Di fronte a tali difficoltà, non facilmente superabili, ho pensato di poter giungere ugualmente all'immobilizzazione del girino – immobilizzazione che mi ripromettevo di ottenere sostituendo la corda con materiale rigido – introducendo longitudinalmente nel corpo dell'animale un filo di vetro in modo che esso decorresse o ventralmente alla corda stessa o, lateralmente ad essa, nello spessore dei somiti.

In altri casi ho inserito tale filo secondo l'asse perlaterale o secondo l'asse dorso–ventrale dell'embrione.

In un lavoro in esteso darò tutti i ragguagli relativi a queste operazioni e la precisa tecnica usata. In questa breve Nota mi limito a dire che il filo di vetro, nei casi in cui decorreva longitudinalmente, veniva introdotto attraverso una piccola incisione, praticata nella parte posteriore dell'embrione, fino a raggiungere il limite anteriore della corda dorsale.

Ho condotto le mie esperienze su *Bufo vulgaris*, *Bufo viridis* e *Rana esculenta*. Il filo di vetro è stato introdotto negli embrioni allo stadio di bottone codale. Queste operazioni avvengono senza gravi traumi per l'individuo e non inducono alcun rallentamento nello sviluppo, accrescendosi gli animali regolarmente come i controlli senza che tra essi possa notarsi una diversità di stadio biologico o di grandezza. Quello che unicamente si rileva è la impossibilità che essi hanno di flettersi, a destra e a sinistra, come avviene

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Biologia generale dell'Università di Perugia.

(**) Pervenuta all'Accademia il 4 agosto 1958

(1) A. GIARDINA, *Sul valore morfogenetico della corda dorsale.* (*Studio sperimentale su embrioni e larve di anfibi*), «Arch. It. anat. ed embriol.», XII, 443 (1914).

invece nei controlli, dopo l'inizio delle contrazioni. Gli individui in cui il filo è stato inserito secondo l'asse perlaterale o secondo l'asse dorso-ventrale possono flettersi invece normalmente.

Nella maggior parte dei casi il filo di vetro fuoriesce spontaneamente dopo qualche giorno, dalla parte posteriore dell'embrione, senza lasciare apprezzabili lesioni. Dopo di ciò l'animale riacquista la sua normale motilità e nuota come i controlli.

Proseguendo però nel loro sviluppo, gli embrioni che hanno avuto il filo di vetro infisso secondo l'asse longitudinale del corpo, mostrano una vistosa alterazione della morfologia dell'apparato digerente nel senso che le normali direzioni di accrescimento si mostrano decisamente deviate. La spiralizzazione dell'intestino è infatti profondamente alterata, con scomparsa, talvolta anche totale, delle spire; aumentano ed in modo molto vistoso, i diametri trasversali del canale intestinale, mentre la sua lunghezza risulta notevolmente inferiore.

Nessuna alterazione presentano gli embrioni che hanno avuto il filo di vetro infisso secondo l'asse perlaterale o dorso-ventrale e che avevano avuto una normale possibilità di flettersi.

La fig. 1 A mostra una larva controllo di *Bufo vulgaris*, in cui è stata asportata la parete addominale ed in essa appare la normale spiralizzazione propria di questi stadii. La fig. 1 B mostra una larva trattata, sempre di *Bufo vulgaris* ed allo stesso stadio della precedente, in cui è ben evidente l'alterata morfologia dell'intestino nel senso predetto.

Casi molto vistosi si sono presentati in *Bufo viridis* ugualmente trattati. La fig. 2 A mostra una larva controllo di questa specie, anch'essa priva della parete addominale per mettere in evidenza la regolare spiralizzazione intestinale.

Profonde alterazioni sono invece presenti nell'esemplare raffigurato nella fig. 2 B il quale ha subito il trattamento descritto.

Risultati analoghi si sono ripetuti in *Rana esculenta*. La fig. 3 A ne mostra un esemplare controllo e la fig. 3 B un esemplare trattato; in ambedue questi casi la parete addominale, di per sé trasparente, ha permesso la ripresa fotografica senza dover sacrificare gli animali.

In tutte e tre le specie sono state trattati numerosi esemplari con una elevatissima percentuale di risultati positivi e mai sono state riscontrate alterazioni di questo tipo negli animali controllo.

Le alterazioni descritte sono irreversibili e si conservano per il rimanente periodo della vita larvale ed anche al termine della metamorfosi nel senso che il tubo digerente resta notevolmente più corto; anche in tale momento, l'alterazione dell'apparato intestinale, sotto forma di un raccorciamento, si presenta in una elevatissima percentuale di casi.

Altra cosa che intendo segnalare è la anticipazione di diversi giorni della metamorfosi negli animali trattati rispetto ai controlli.

Poiché, come già accennato, la conseguenza più importante della introduzione del filo di vetro sembrava essere la mancanza del movimento di

flessione nel periodo in cui tale filo rimaneva interno agli animali, ho voluto comprovare, per altra via, se fosse lecito stabilire un rapporto di causa ed effetto tra questa immobilizzazione dell'embrione e le alterazioni osservate nella morfogenesi dell'intestino. A questo scopo ho pensato di immobilizzare gli embrioni con un sistema del tutto diverso, che non quello meccanico usato, e precisamente sono ricorso all'uso di narcotici che facevo agire per lo stesso periodo di tempo per il quale aveva agito il filo di vetro. Ho usato a questo scopo il cloretone e l'alcool triclorobutilico capaci di indurre la completa immobilizzazione degli embrioni per varii giorni consecutivi, ma a concentrazioni tali da non danneggiarli. Dettagli in merito saranno forniti nel lavoro in esteso. Gli animali, dopo aver soggiornato per un determinato periodo in tali anestetici, erano messi di nuovo in acqua di fonte, ove riacquistavano, in breve, il loro normale movimento.

Essi non presentavano, in un primo tempo, apprezzabili alterazioni morfologiche – beninteso quando tenuti nelle concentrazioni minime degli anestetici, ché a concentrazioni più elevate le alterazioni erano invece sensibili – ma unicamente un lieve ritardo nello sviluppo in confronto ai controlli. Ma era con il progredire dello sviluppo che si notavano, anche in questi animali, le tipiche alterazioni nella struttura del tubo digerente in precedenza descritte, ed anche esse si sono mostrate irreversibili nel rimanente periodo larvale e nella metamorfosi.

La perfetta concordanza che si ha tra i risultati ottenuti con l'uso del filo di vetro e quelli ottenuti con i narcotici autorizza, a mio avviso, a considerare, con una certa fondatezza, l'esistenza di rapporti tra il movimento – in un ben determinato periodo embrionale – e la morfogenesi del tubo digerente, in modo particolare per quanto riguarda la sua spiralizzazione e le sue dimensioni.

Sulla morfogenesi dell'intestino degli Anfibi e sull'insorgere della spiralizzazione importanti ricerche sono state fatte da varii Autori tra cui per brevità ricordo ora solamente alcuni e cioè, oltre al Giardina, Ratner [2], Reuter [3], Pressler [4], Cotronei [5], Noka [6], Joly [7], Dalcq e Halter [8] e

(2) G. RATNER, *Zur Metamorphose des Darmes bei der Froschlarve*. Dissert. Dorpat. 1892.

(3) K. REUTER, *Ueber die Rück bildungserscheinungen am Darmcanal der larve von Alytes obstricans*. I. *Theil. Aubere Veränderungen der Organe*. « Anat. Hefte », *14*, 433 (1900).

(4) K. PRESSLER, *Ueber den normalen und inversen situs viscerum et cordis bei Anurenlarven*, « Archiv. für Entw. der Org. », *32*, 1 (1911).

(5) G. COTRONEI, *L'apparato digerente degli anfibi nelle sue azioni morfogenetiche*. (*Ricerche sull'accrescimento larvale e postlarvale*).

(6) H. NOKA, *Experimentelle Untersuchungen über die Entstehung des Situs viscerum et cordis bei Anurenlarven*, « Jap. Jour. Med. Sc. Anat. », *2*, 201 (1930).

(7) P. JOLY, *Metamorphose de l'intestin chez le Discoglossus pictus*, « Trav. Stat. Biol. Roscoff », Paris, *15*, 31 (1937).

(8) A. DALCQ e S. HALTER, *Contribution à l'étude experimentale de la morphogénèse du tractus digestif chez les amphibien*, « Arch. de Biol. », *54*, 477 (1943).

A

B

Fig. 1. – Larve di *Bufo vulgaris*.

A

Fig. 2. – Larve di *Bufo viridis*.

B

A

Fig. 3. – Larve di *Rana esculenta*.

Le fig. 1 A, 2 A, 3 A mettono in evidenza la normale spiralizzazione dell'intestino.

Le fig. 1 B, 2 B, 3 B mettono in risalto la vistosa alterazione della morfologia dell'apparato digerente conseguente al fattore sperimentale usato.

B

Kemp [9]. Alcuni di questi Autori hanno fatto indagini quasi esclusivamente descrittive dei fenomeni, altri hanno invece tentato di aggredire sperimentalmente il problema da punti di vista diversi. Esula dal carattere di una Nota un esame, sia pure sommario, di queste indagini, cosa che mi riprometto di fare in seguito. Da esse comunque non risulta ancora sufficientemente chiaro il meccanismo o meglio i meccanismi che regolano lo sviluppo dell'intestino negli Anbibi anuri e credo che un qualche aspetto del problema possa giovarsi di queste mie ricerche che vedono nel movimento dell'embrione un fattore per la morfogenesi di tale apparato.

(9) N. E. KEMP, *Development of intestinal coiling in anuran larve*, « Jour. exp. zool. », *116*, 259 (1951).

Biologia. — *L'andamento dell'attività mitotica nel midollo spinale di Anfibî anuri durante lo sviluppo* (*). Nota (**) di GIORGIO M. BAFFONI e ROSALBA PINACCI, presentata dal Socio G. COTRONEI.

In precedenti osservazioni di uno di noi [1] sulla morfogenesi ed istogenesi cerebellare di un Anfibio anuro, è stato riscontrato che l'attività mitotica dello strato ventricolare (germinativo) persiste durante tutto il periodo larvale, anzi si intensifica nella porzione dorsale subito dopo la fusione delle labbra romboidali (formazione dell'abbozzo dorsale metencefalico) e raggiunge i più elevati valori al termine della metamorfosi, ma entro la prima settimana di vita terrestre precipita tornando a valori modesti. I fenomeni riscontrati nell'Anfibio anuro sono stati comparati con quelli che si verificano nella stessa regione in un Anfibio urodelo [2]; il diverso andamento delle curve ottenute ha fatto supporre che il peculiare comportamento dell'attività proliferativa nella piastra alare dell'Anfibio anuro fosse da mettersi in rapporto con la tardiva morfogenesi del cervelletto. I risultati conseguiti da queste osservazioni hanno suggerito l'estensione delle ricerche sull'andamento del ritmo mitotico ad altre regioni del neurasse.

Nella presente Nota riferiamo i risultati conseguiti dall'esame del midollo spinale di un Anfibio anuro; la scelta del midollo spinale è stata motivata dal fatto che questo non subisce notevoli modificazioni di forma e di struttura all'epoca della metamorfosi e pertanto si presta a stabilire un confronto con quanto riscontrato nel romboencefalo allo scopo di decidere se il notevole incremento dell'attività proliferativa della piastra alare negli stadi premetamorfici fosse da attribuirsi alla tardiva morfogenesi cerebellare o se invece fosse un fenomeno generale di tutto il neurasse.

Ricordiamo brevemente che dell'attività mitotica del midollo spinale per primo si è occupato Prénant (1894) [3] il quale, in embrioni di montone e di uomo, ha osservato che le mitosi sono più frequenti nella porzione dorsale che nella porzione ventrale ed ha messo in relazione il fatto con la morfogenesi del canale ependimale. Allen (1912) [4], nel topo, ha precisato che la più elevata attività mitotica del midollo spinale si verifica al 6° giorno dopo la nascita, ma cessa al 18° giorno; Agdur (1919) [5], nel cane, invece, ha osservato mitosi nel midollo spinale durante i primi mesi di sviluppo

(*) Ricerca eseguita nell'Istituto di Anatomia comparata « G. B. Grassi » dell'Università di Roma.

(**) Pervenuta il 21 agosto 1958.

(1) G. M. BAFFONI ed E. ELIA, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. VIII), *22*, p. 327 (1957).

(2) G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. VIII), *23*, p. 90 (1957).

(3) A. PRÉNANT, « Intern. Monatschr. Anat. u. Physiol. », *11*, p. 281 (1894).

(4) E. ALLEN, « Journ. Comp. Neurol. », *22*, p. 547 (1912).

(5) E. AGDUR, « Proc. Acad, Amsterdam », *21*, p. 944 (1919).

post-natale. Milone (1923) [6] nel pollo e nel piccione ha riscontrato un precoce esaurimento dell'attività mitotica del midollo spinale (al 12° giorno d'incubazione); nel pollo i risultati di Milone sono stati di recente confermati da Hamburger (1948) [7] il quale, non avendo riscontrato mitosi nel midollo spinale oltre il 16° giorno d'incubazione, conclude che l'attività proliferativa del midollo spinale scompare nel pulcino neonato. In conclusione risulta che negli Amnioti, a parte per l'osservazione non confermata di Agdur, l'attività mitotica dell'epitelio germinativo del midollo spinale si esaurisce entro il periodo fetale o poco dopo se gli animali sono a prole inetta.

Per quanto riguarda gli Anamni, le indagini sono più scarse e comunque limitate ad alcuni stadî molto precoci dello sviluppo embrionale; accenniamo alle osservazioni di Coghill (1924–33) [8] e di Burr (1936) [9] in un Anfibio urodelo, le quali hanno avuto il merito di correlare l'attività mitotica del midollo spinale con particolari stadî fisiologici dello sviluppo; ricordiamo inoltre il tentativo di indagine causale compiuto da Detwiler (1936) [10] il quale, esaminando l'attività mitotica di segmenti di midollo spinale trapiantati eterotopicamente, ha constatato che il ritmo mitotico varia a seconda della zona di origine e della sede di trapianto; l'Autore ha supposto che l'attività proliferativa di un determinato segmento di midollo spinale sia influenzata dall'attività metabolica di neuroni in differenziamento o già differenziati dei territori contigui.

A quanto ci consta, non è molto nota l'attività mitotica del neurasse di Anfibî dopo il periodo embrionale; nonostante che questi animali siano stati oggetto di numerose indagini morfologiche e sperimentali, le uniche osservazioni al riguardo sono quelle compiute da uno di noi sul romboencefalo [1,2]; probabilmente la ragione di questa lacuna va vista nella convinzione che la morfogenesi del neurasse degli Anfibî fosse completa col passaggio alla vita libera: infatti fino a poco tempo fa si riteneva che i centri nervosi funzionalmente connessi con gli organi della condizione acquatica si trasformassero direttamente in quelli degli organi della condizione terrestre; però in questi ultimi anni, da ricerche compiute nel nostro Istituto, è stato dimostrato che almeno alcuni centri nervosi si formano *ex novo* negli stadî premetamorfici (Stefanelli e Zacchei 1949) [11] e che i più tipici neuroni della condizione acquatica (cellule di Mauthner, neuroni dei centri della linea laterale [12] e cellule di Rohon-Beard [13]) degenerano e pertanto sono

(6) S. MILONE, « Arch. Ital. Anat. Embriol. », *20*, p. 417 (1923).
(7) V. HAMBURGER, « Journ. Comp. Neurol. », *88*, p. 221 (1948).
(8) G. E. COGHILL, « Journ. Comp. Neurol. », *37*, p. 71; *ivi*, *57*, p. 327 (1933).
(9) H. S. BURR, « Journ. Comp. Neurol. », *56*, p. 347 (1932).
(10) S. R. DETWILER, « Journ. Exptl. Zool. », *37*, p. 339 (1936).
(11) AL. STEFANELLI ed A. M. ZACCHEI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. VIII) *7*, p. 358 (1949).
(12) G. B. BAFFONI e G. CATTE, « Rivista di Biologia », *43*, p. 373 (1951).
(13) S. DE FILIPPIS, « La Ricerca Sci. » *28*, p. 967 (1958).

neuroni « a ciclo larvale » (ved. Stefanelli 1951–55 [14]); in base a questi dati di fatto, si sta concretando l'idea che la morfogenesi del sistema nervoso centrale degli Anfibî continui anche durante il periodo larvale per la formazione dei centri funzionalmente connessi con gli organi della condizione tetrapoda terrestre. In base a queste considerazioni, con un criterio schiettamente ecologico, le indagini sono state iniziate negli Anfibî anuri, poiché in questi animali le trasformazioni morfologiche tra condizione acquatica e terrestre sono più imponenti che negli Urodeli [15].

Tra gli Anfibî anuri nostrani è stato scelto il rospo (*Bufo bufo* L.) perché è uno dei meglio adattati alla condizione terrestre (ved. Stefanelli 1949 [16]).

Da lotti di uova provenienti da una coppia di rospi, catturata nei pressi di Roma, abbiamo scelto tre serie complete di stadî embrionali (15, 17, 19, 21, 24, secondo la seriazione di Shumway [17]), di stadî larvali (III, VI, IX, XV, XVIII, XXI, XXIV secondo la classificazione di Taylor e Kollros [18]) e di animali metamorfosati (dopo 15 e 30 giorni). Gli animali, o i loro neurassi isolati (dallo stadio XXI in poi), sono stati fissati in liquido di Sanfelice, inclusi in celloidina–paraffina e sezionati trasversalmente in serie di 7 μ di spessore; una serie è stata trattata con il reattivo di Schiff secondo la tecnica di Feulgen standardizzata da Stowell (1945) [19] e due serie sono state colorate in emallume di Mayer – eosina. Le mitosi (stadî da prometafase a telofase) sono state computate in sezioni alterne, separatamente per la porzione sensitiva (piastra alare) e per quella motoria (piastra basale); onde ottenere dati comparativi si è proceduto all'accertamento dei valori di densità con metodi già descritti altrove [1,2]; la densità, espressa nell'unità di superficie (1 $dmm^2 = 10.000\ \mu^2$), in questo caso è altrettanto valida di quella calcolata in rapporto al numero di cellule poiché il volume degli elementi dell'epitelio ventricolare non varia nelle diverse zone del neurasse allo stesso stadio, né presenta sensibili variazioni durante lo sviluppo.

I risultati sono stati riportati nella Tabella I (i valori assoluti sono rappresentati dalla media di almeno tre osservazioni); l'andamento dell'attività mitotica, espressa in valori di densità, è rappresentato dalla fig. 1.

I risultati dimostrano che:

1° tranne all'inizio del periodo embrionale (stadio 15), l'attività mitotica dell'epitelio germinativo del midollo spinale dell'Anfibio anuro da noi preso in considerazione è più elevata nella porzione sensitiva (piastra alare) che in quella motoria (piastra basale);

(14) Al. Stefanelli, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. VIII), *10*, p. 159 (1951); « La Ricerca Sci. », *25*, p. 2778 (1955).

(15) Ved.: G. Cotronei, « Rend. R. Acc. Naz. Lincei » (ser. V), *21*, p. 782 (1912); G. M. Baffoni, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. VIII), *14*, p. 138 (1953).

(16) Al. Stefanelli, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. VIII), *7*, p. 146 (1949); « Rivista di Biologia », *41*, p. 249 (1949).

(17) Ved. in: R. Rugh, *Experimental Embryology* (Minneapolis, 1952).

(18) A. C. Taylor e J. J. Kollros, « Anat. Rec. », *94*, p. 7 (1946).

(19) R. E. Stowell, « Stain Technol. », *20*, p. 45 (1945).

2° nella piastra alare si osserva un apice durante il periodo embrionale (allo stadio 24) e tre durante il periodo larvale (allo stadio VI, XVIII e XXIV); nella piastra basale, invece, si osserva un apice nel periodo embrionale (a stadio 24) e solo uno nel periodo larvale (a stadio XXIV); queste divergenze di andamento solo in parte possono attribuirsi alle più accentuate escursioni dei valori della piastra alare; pertanto esse dimostrano che il comportamento dell'attività mitotica nelle due porzioni dell'epitelio germinativo del midollo spinale diversificano sia quantitativamente che qualitativamente durante lo sviluppo dell'Anfibio anuro;

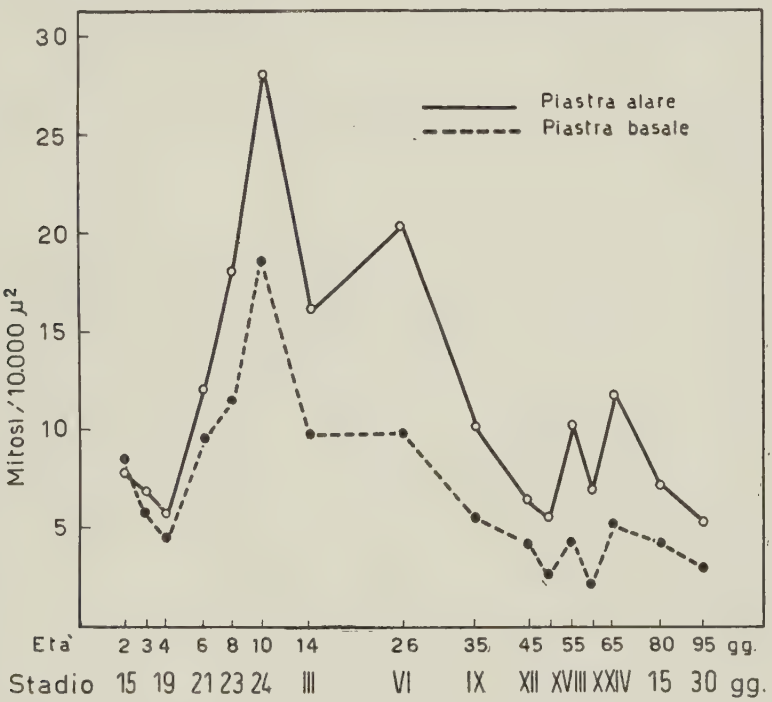


Fig. 1. – Andamento dell'attività mitotica nello strato ventricolare del midollo spinale del tronco durante lo sviluppo di un Anfibio anuro (*Bufo bufo*).

(Il tempo sulle ascisse è in scala logaritmica).

3° la massima attività proliferativa dell'epitelio germinativo del midollo spinale dell'Anfibio anuro si osserva al termine del periodo embrionale sia nella piastra alare che in quella basale. I minimi di attività mitotica nel periodo embrionale sono raggiunti dopo l'inizio dell'attività funzionale (comparsa della risposta motoria a stadio 18) e nel periodo larvale a stadî premetamorfici (a stadio XV e XXI per la piastra alare ed a stadio XXI per quella basale); inoltre va notato che i valori di densità precipitano in corrispondenza delle epoche di transizione tra periodo embrionale e larvale e tra periodo larvale ed adulto, cioè con l'esaurimento delle scorte vitelline

dell'embrione (stadio III) e con il periodo di digiuno (stadio XX–XXV) che caratterizza il passaggio di alimentazione dal tipo onnivoro (larvale) a quello carnivoro (postlarvale); già da tempo Cotronei (1919–32 [20]) ha dimostrato che quando cambia il tipo di nutrizione si hanno profondi rimaneggiamenti del chimismo dell'organismo i quali determinano « crisi metaboliche » e che tali epoche rappresentano il momento cruciale del passaggio da un ciclo di sviluppo al successivo; questi concetti sono stati avvalorati da osservazioni compiute nel nostro Istituto sull'attività respiratoria (Stefanelli e coll. [21]) ed enzimatica (Urbani [22]); la depressione dell'attività mitotica in questi due periodi, responsabile delle irregolarità della curva, indica che le condizioni energetiche di sistema chiuso si ripercuotono negativamente sull'attività riproduttiva dell'epitelio germinativo del midollo spinale, ma ciò non avviene in zone del neurasse in attiva morfogenesi (ad esempio non si notano fenomeni del genere nella piastra alare del romboencefalo prima della metamorfosi [1]);

TABELLA I.

Stadio	Età giorni	Emiarea Mid. Spinale dmm²	Mitosi		Densità mitotica	
			P. alare	P. basale	P. alare	P. basale
15	2	7,495	59	63	*7,87*	*8,40*
17	3	13,019	90	77	*6,92*	*5,92*
19	4	9,235	55	44,5	*5,96*	*4,82*
21	6	10,995	135	106	*12,28*	*9,64*
23	8	10,761	194	125	*18,03*	*11,62*
24	10	13,242	372	250	*28,09*	*18,88*
III	14	18,017	292	176	*16,21*	*9,77*
IV	26	23,041	476,5	228	*20,68*	*9,89*
IX	35	19,348	200	108,3	*10,34*	*5,60*
XII	45	21,058	140	88	*6,65*	*4,18*
XV	51	17,198	99	53	*5,76*	*3,08*
XVIII	55	15,075	155	64,5	*10,28*	*4,28*
XXI	60	11,533	84	27,5	*7,28*	*2,38*
XXIV	65	9,886	120	53	*12,14*	*5,36*
dopo 15 gg.	80	8,380	61,3	36,5	*7,34*	*4,36*
» 30 gg.	95	11,683	62,5	39	*5,35*	*3,34*

(20) G. Cotronei, «Mem. Soc. Ital. Sci. dei XL» (ser. III), *21*, p. 1 (1919); «Arch. Zool. Ital.», *10*, p. 85 (1922); «Rend. R. Acc. Naz. Lincei» (ser. VI), *24*, p. 411 (1938).

(21) Al. Stefanelli, «Journ. Exptl. Biol.», *14*, p. 171 (1937); «Rivista di Biologia», *23*, p. 3 (1937); «Arch. Sci. Biol.», *24*, p. 411 (1938); M. P. Taranta, «Rend. Acc. Naz. Lincei» (ser. VIII), *2*, p. 847 (1947).

(22) E. Urbani, «Rend. Acc. Naz. Lincei» (ser. VIII), *23*, p. 86 (1957); «Rend. Ist. Lomb. Sci. Lett.», *92*, p. 69 (1957).

4° l'analisi dell'attività mitotica lungo l'asse antero-posteriore del midollo spinale, i cui risultati saranno riportati nel lavoro per esteso, ha messo in evidenza che soltanto durante il periodo larvale l'attività proliferativa della piastra alare diviene costantemente superiore a quella della piastra basale; inoltre mentre all'inizio del periodo embrionale essa decresce gradualmente dal calamo alla porzione caudale, invece nel periodo larvale si mantiene pressappoco alla stessa quota, tranne che al livello delle intumescenze, ove si accentua; in proposito abbiamo notato che l'accentuazione appare prima (allo stadio 21) al livello dell'intumescenza lombare, ove si conserva più elevata, e solo più tardi (allo stadio III) al livello dell'intumescenza cervicale; ne segue che il differenziamento dei centri in rapporto con gli arti posteriori precede quello dei centri che innervano gli arti anteriori; ciò trova riscontro con il fatto che nei girini di Anfibî anuri gli arti posteriori si muovono prima (st. XVI) di quelli anteriori (st. XX);

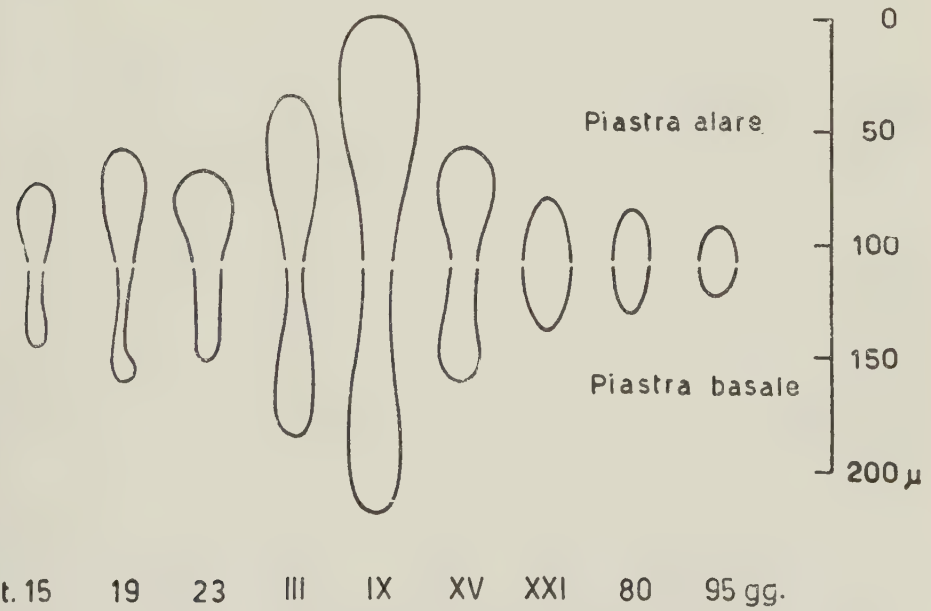


Fig. 2. – Aspetti del canale ependimale durante lo sviluppo di *Bufo bufo* al livello del restringimento dopo il calamo.

(Disegni ripresi alla camera lucida).

5° durante lo sviluppo, il midollo spinale presenta modificazioni di forma (fig. 2): allo stadio 15 il tubo neurale è costituito da un'epitelio che riveste una stretta cavità ventricolare; nei successivi stadî embrionali la cavità si presenta dilatata dorsalmente, ma assottigliata ventralmente sia perché gli elementi proliferano più attivamente nella porzione ventrale e migrano nella piastra basale ispessendola, sia perché inizia il differenziamento dei neuroni motorî; il fugace assottigliamento del ventricolo, che si osserva allo stadio 23, va messo in rapporto con il notevole allungamento

del midollo spinale che si verifica tra stadio 17 e 21 (= 100 %); nella prima metà del periodo larvale prevale l'ispessimento del midollo spinale (= 83 % in diametro), ciò si accompagna ad una maggior attività proliferativa delle cellule della porzione dorsale (sensitiva) che provoca l'ispessimento della piastra alare e pertanto il ventricolo si assottiglia dorsalmente divenendo di spessore quasi uniforme e si accresce in senso dorso–ventrale (fino allo stadio IX); nella seconda metà del periodo larvale la cavità ventricolare si riduce: ciò avviene quando l'attività mitotica è in declino e pertanto questa non può ritenersi responsabile della morfogenesi del ventricolo, come aveva supposto Prénant [3], ma tale morfogenesi va messa in rapporto con il diverso ritmo di sviluppo delle due piastre che costituiscono le pareti del ventricolo; la riduzione della cavità ventricolare al termine del periodo larvale, più che per la residua attività mitotica, avviene per il differenziamento delle corna posteriori (radici sensitive), il formarsi di vie propriocettive e per l'ispessirsi dei fasci commessurali;

6° ai fini specifici che hanno motivato la presente ricerca, stabilendo un confronto tra l'andamento dell'attività mitotica del romboencefalo [1] e quella del midollo spinale, risulta una differenza sostanziale: mentre infatti nella piastra alare del midollo spinale i valori più elevati si riscontrano al termine del periodo embrionale, in quella del romboencefalo si riscontrano invece al termine del periodo larvale; ciò va messo in rapporto con la diversa epoca in cui si compie la morfogenesi delle piastre alari nelle due diverse regioni del neurasse: infatti i centri motorî ed alcuni elementi sensitivi del midollo spinale, come pure i centri motorî del romboencefalo, devono essere pronti ad entrare in funzione col passaggio alla vita libera; pertanto l'attività proliferativa nella regione da cui essi originano è massima nel periodo embrionale; invece le funzioni di coordinazione correlate con la condizione tetrapoda si instaurano dopo il termine della metamorfosi; ciò spiega perché l'attività mitotica, che è un fondamentale processo morfogenetico, nel midollo spinale (il quale provvede alla sensibilità ed alla motilità del tronco) e nella piastra basale del romboencefalo (in rapporto con le attività motorie della regione cefalica) abbia un ritmo diverso da quello della piastra alare romboencefalica, la cui area somato–sensitiva si sviluppa notevolmente solo al termine della metamorfosi costituendo il cervelletto, che è il centro di coordinazione tra eccitamenti motorî, volontarî ed involontarî, e stimoli vestibolari e propriocettivi generali per il mantenimento della postura e dell'equilibrio, attività indispensabili per la locomozione dei Vertebrati tetrapodi.

A. Signorini e G. Cotronei.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Ferie 1958 Settembre–Ottobre

NOTE DI SOCI

(Ogni Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo o di presentazione)

Analisi matematica. — *Sull'equazione di Tomotika e Tamada.* Nota (*) del Corrisp. FRANCESCO G. TRICOMI.

1. L'equazione di Tomotika e Tamada (1):

$$(1) \qquad (1-y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

è un'equazione *di tipo misto* che può sostituirsi (col vantaggio di una maggiore aderenza alla realtà fisica) alla più semplice equazione di Tricomi:

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

nello studio dei flussi transonici bidimensionali, cioè dei moti (bidimensionali) dei fluidi compressibili, in cui le velocità sono prossime a quella del suono.

Poiché la (1) non è stata finora utilizzata (per quanto mi consta) che nel cosiddetto *metodo indiretto*, cioè nello studio dei flussi corrispondenti a determinate soluzioni (o classi di soluzioni) dell'equazione del problema (2), interessa soprattutto determinare delle classi, le più ampie possibili, di soluzioni particolari della (1). Fra queste, le più spontanee sono quelle ottenibili col classico metodo della separazione delle variabili, che, col consueto procedi-

(*) Pervenuta all'Accademia il 6 ottobre 1958.

(1) S. TOMOTIKA–K. TAMADA, *Studies on two-dimensional transonic flow of compressible fluid*, Part. III, « Quart. Applied Math. », *9*, 129–147 (1951).

(2) Ved., oltre la precedente Memoria dei due Autori giapponesi, vari recenti lavori di S. NOCILLA e particolarmente: questi « Rendiconti » (8) *18*, 55–61 (1955) e « Atti Acc. Scienze Torino » *89*, 296–333 (1944–55) e *90*, 311–331 (1955–56).

mento, conduce a delle soluzioni contenenti delle funzioni di Bessel (di ordine arbitrario ν) e delle funzioni trigonometriche, della forma

$$z = [A\, J_\nu(\nu y) + B N_\nu(\nu y)] \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (\nu x), \tag{2}$$

dove A e B sono costanti arbitrarie. Le soluzioni particolari rivelatesi più interessanti dal punto di vista applicativo non sono però proprio queste, bensì delle altre che, pur essendo molto semplici, anzi più semplici delle precedenti, sono state però finora ottenute per vie complicate e tortuose, e non sempre ineccepibili dal punto di vista matematico.

La presente breve Nota ha lo scopo di mostrare come le soluzioni ultimamente dette possono ottenersi nel modo più semplice e spontaneo sostituendo alla (1) una sua opportuna trasformata che, oltre a tutto, è anche più semplice dell'equazione di partenza, perché dotata di coefficienti linearmente dipendenti dalle variabili indipendenti.

2. Il cambiamento di variabili da operarsi (suggerito dalla forma delle soluzioni che vogliono ritrovarsi) è il seguente:

$$x = \operatorname{arctg}(\eta/\xi) - \eta + \text{cost.} \quad , \quad y = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}\,. \tag{3}$$

Tenuto conto che

$$\begin{cases} \xi_x = -\dfrac{\eta}{1-\xi} \\ \xi_y = \dfrac{\xi - y^2}{y(1-\xi)} \end{cases} \qquad \begin{cases} \eta_x = \dfrac{\xi}{1-\xi} \\ \eta_y = \dfrac{\eta}{y(1-\xi)} \end{cases}$$

con calcoli ormai standardizzati [3] si trova facilmente che l'equazione trasformata della (1) nel piano (ξ, η) è:

$$\boxed{(1-\xi)\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - 2\eta \frac{\partial^2 z}{\partial \xi\, \partial \eta} + (1+\xi)\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial z}{\partial \xi} = 0}\,. \tag{4}$$

Anche utile a tenersi presente, benché un po' meno semplice, è l'equazione ottenibile passando a coordinate polari τ, ω, cioè ponendo

$$\xi = \tau \cos\omega \quad , \quad \eta = \tau \sin\omega\,, \tag{5}$$

il che implica che le (3) verranno sostituite dalle altre

$$x = \omega - \tau \sin\omega + \text{cost.} \quad , \quad y = \tau\,, \tag{6}$$

in cui si presenta (nel passaggio dalle x, y alle τ, ω) la classica equazione di Kepler. La nuova equazione differenziale (in cui si potrebbe anche scrivere y al posto di τ) è:

$$(1+\tau\cos\omega)\frac{\partial^2 z}{\partial \omega^2} + 2\tau^2 \sin\omega \frac{\partial^2 z}{\partial \omega\, \partial \tau} + \tau^2(1-\tau\cos\omega)\frac{\partial^2 z}{\partial \tau^2} + \\ + \tau(1-\tau\cos\omega)\frac{\partial z}{\partial \tau} = 0\,. \tag{7}$$

(3) Ved. per esempio F. G. Tricomi, *Equazioni a derivate parziali*. (Roma, Cremonese, 1957), p. 70.

3. Il fatto che nella (4) manca il termine in z_η e nella (7) il termine in z_ω (oltre a quelli in z) mostra già che, a prescindere da ovvie costanti additive e moltiplicative, si hanno le soluzioni particolari

$$z = \eta \quad , \quad z = \omega \, , \tag{8}$$

così come le (1) ha l'ovvia soluzione $z = x$ e la (7) la soluzione $z = \log \tau$.

Risultati più interessanti si ottengono però ricercando le eventuali soluzioni della (4) della forma

$$z = f(\xi) + g(\eta) \, .$$

Precisamente, detta (per comodità) $6a$ una costante di separazione, si trovano le due equazioni differenziali ordinarie

$$(1 - \xi) \frac{d^2 f}{d\xi^2} - 2 \frac{df}{d\xi} + 6a(1 + \xi) = 0 \quad , \quad \frac{d^2 g}{d\eta^2} = 6a \, ,$$

la seconda delle quali s'integra immediatamente, mentre la prima si rende omogenea sottraendo da f la speciale soluzione dell'equazione:

$$f_0 = a(\xi^2 + 4\xi) \, .$$

Poiché la corrispondente equazione omogenea, e cioè

$$(1 - \xi) \frac{d^2 (f - f_0)}{d\xi^2} = 2 \frac{d(f - f_0)}{d\xi}$$

fornisce subito

$$\frac{d(f - f_0)}{d\xi} = \frac{c}{(1 - \xi)^2} \, ,$$

essendo c una costante, e successivamente

$$f - f_0 = \frac{c}{1 - \xi} + \text{cost.} \, ,$$

si perviene così alla classe ∞^4 di soluzioni particolari dell'equazione di Tomotika–Tamada:

$$\boxed{z = a(\xi^2 + 4\xi + 3\eta^2) + b\eta + \frac{c}{1 - \xi} + d} \, , \tag{9}$$

dove a, b, c, d sono quattro costanti arbitrarie.

4. Nella (9) sono contenute quasi tutte le soluzioni particolari dell'equazione in esame, finora rivelatesi di pratica importanza. Altre soluzioni possono attenersi applicando a quelle già conosciute l'operatore $\mathfrak{D}$: *derivazione rispetto ad x*, che muta in sé stessa la (1); oppure applicandolo sotto le sue due forme equivalenti

$$\mathfrak{D} \equiv \frac{1}{1 - \tau \cos \omega} \frac{\partial}{\partial \omega} \equiv \frac{1}{1 - \xi} \left(- \eta \frac{\partial}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial}{\partial \eta} \right) ,$$

se ci si riferisce alle coordinate τ, ω oppure ξ, η rispettivamente. In particolare si trova che

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathfrak{D}[\xi^2 + 4\xi + 3\eta^2] = -4\eta & , \quad \mathfrak{D}[\eta] = \frac{1}{1-\xi} - 1 , \\ \mathfrak{D}\left[\frac{1}{1-\xi}\right] = -\frac{\eta}{(1-\xi)^3} & , \quad \mathfrak{D}[\omega] = \frac{1}{1-\xi} . \end{array} \right.$$

Talvolta può però essere più conveniente servirsi invece dell'operatore inverso $\mathfrak{D}^{-1}$ (*integrazione rispetto ad x*), che ha però un'espressione un po' meno semplice di quello che potrebbe pensarsi, perché la relativa « costante arbitraria » (che è in effetti una funzione arbitraria della y) deve essere scelta in modo opportuno acciocché la funzione finale soddisfi all'equazione. Precisamente, riferendosi alle originarie coordinate x, y e ponendo

$$\mathfrak{D}^{-1}[\varphi] = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y)\, dx + \psi(y)$$

dove φ è una soluzione della (1) ed x_0 una costante arbitraria, si trova che la funzione ψ deve soddisfare all'equazione differenziale ordinaria

$$y^2 \frac{d^2\psi}{dy^2} + y\frac{d\psi}{dy} + (1 - y^2)\,\varphi_x(x_0, y) = 0$$

che, applicando la nota formula per l'integrazione delle equazioni lineari del prim'ordine, fornisce

$$\frac{d\psi}{dy} = \frac{1}{y}\int_{y_0}^{y} \left(\frac{1}{t} - t\right)\varphi_x(x_0, t)\, dt + \frac{c}{y}$$

donde, integrando ancora, si giunge, con semplici trasformazioni, alla finale formula

$$(10) \qquad \mathfrak{D}^{-1}[\varphi] = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y)\, dx + \int_{y_0}^{y} \left(t - \frac{1}{t}\right)\log\frac{y}{t}\cdot\varphi_x(x_0, t)\, dt ,$$

avendo, per semplicità, posto $c = 0$, ciò che non è sostanzialmente restrittivo a causa dell'arbitrarietà di y_0.

Per esempio, partendo dall'ovvia soluzione $\varphi = x$, si trova così l'altra

$$(11) \qquad z = 2\,\mathfrak{D}^{-1}[x] = x^2 + \frac{1}{2}y^2 - (\log y)^2 + c\log y ,$$

dove c è una costante arbitraria.

5. Naturalmente, per esprimere per mezzo delle originarie coordinate x, y una soluzione data per mezzo delle ξ, η (o, ciò che è praticamente lo stesso, per mezzo delle $\tau = y$ e ω), bisogna risolvere l'equazione di Kepler

$$\omega - \tau \sin\omega = x - x_0 ,$$

avendo indicata con x_0 la costante a secondo membro della prima delle (6).

Se $\tau \leq 1$ ciò può compiersi [4] mediante la classica serie di Kepteyn

$$\omega = x - x_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} J_n(ny) \sin n(x - x_0), \tag{12}$$

ciò che, ad esempio, conduce al seguente sviluppo in serie dell'importante soluzione $(1 - \xi)^{-1}$:

$$\frac{1}{1-\xi} = \frac{1}{1 - \tau \cos \omega} = \mathfrak{D}[\omega] = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(ny) \cos n(x - x_0).$$

Soluzioni rappresentate da sviluppi di tal genere possono anche ottenersi direttamente appoggiandosi alle soluzioni del tipo (3), com'è stato fatto dal Nocilla.

(4) Ved. per esempio G. PETIAU, *La théorie des fonctions de Bessel.* (Paris, CNRS, 1955), p. 315. La serie fornisce la radice dell'equazione che si annulla per $x = x_0$.

Meccanica — *Nuovi punti di vista sul problema dell'equilibrio elasto–plastico nel tempo.* Nota I (*) del Socio Gustavo Colonnetti.

Nello studio delle deformazioni piccolissime dei corpi naturali si presenta come fondamentale la distinzione tra deformazioni elastiche – suscettibili cioè di sparire allo sparire delle forze che le hanno prodotte – e deformazioni plastiche – che cioè permangono anche quando quelle forze hanno cessato di agire.

Ma la distinzione non è in realtà così netta come a prima vista si potrebbe credere.

Le deformazioni dei corpi naturali non sono infatti soltanto funzioni delle forze ad essi applicate, ma anche del tempo, e in particolare della durata d'azione delle stesse.

Accanto alle deformazioni che si realizzano immediatamente, all'atto stesso dell'applicazione delle forze, ve ne sono altre che intervengono solo in seguito, se le forze restano in azione per un certo tempo. E accanto alle deformazioni che scompaiono immediatamente, non appena cessata l'azione delle forze, ve ne sono altre che scompariranno solo col tempo.

Le cose si complicano poi ancora se l'applicazione e la scomparsa delle forze deformatrici non sono istantanee, ma avvengono progressivamente, impiegando un certo tempo per passare dal valore zero al loro valore finale, e rispettivamente da questo valore a zero.

La distinzione tra deformazioni elastiche e deformazioni plastiche finisce allora col ridursi ad una posizione convenzionale, spesso assai lontana dalla realtà delle cose.

Tuttavia, anche considerata soltanto come una semplice schematizzazione approssimata del fenomeno, questa distinzione si è rivelata utile. È infatti grazie ad essa che noi abbiamo potuto renderci in qualche modo conto della influenza che l'intervento delle deformazioni plastiche esercita su lo stato di equilibrio dei corpi naturali, dando origine a stati di coazione indipendenti dalle forze esterne ed a conseguenti alterazioni (spesso benefiche) nella distribuzione delle tensioni quali si verificherebbero in regime di perfetta elasticità.

Un passo innanzi verso una schematizzazione più aderente alla realtà del fenomeno fisico non si può fare se non considerando le deformazioni dei corpi naturali come dipendenti, non soltanto dai valori attuali delle forze ad essi applicate, ma da tutti i valori che li hanno preceduti nel tempo.

Così impostato il problema in termini assolutamente generali, si può dire che una qualsiasi caratteristica della deformazione, in un dato istante, potrà sempre venire espressa da una funzione

$$F\,|\,[\varepsilon_0^T(t)]\,| \tag{1}$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 19 agosto 1958.

del tipo di quella che Volterra aveva scelta, nella sua teoria dei fenomeni ereditarii [1], per rappresentare le grandezze che dipendono da tutti i valori che una funzione

$$\varepsilon(t)$$

può prendere in un intervallo di tempo (O, T).

Seguendo Volterra, noi ammetteremo che, essendo soddisfatte certe condizioni, la funzione F sia sviluppabile in una serie analoga a quella di Taylor, e che in questa serie i termini di ordine superiore al primo siano tutti trascurabili per rapporto ai termini lineari in ε.

Assunta l'origine dei tempi nell'istante in cui si è verificata la prima applicazione di forze esterne, ed ammesso – fino ad avviso contrario – che in quell'istante ciascun elemento del corpo si trovi nel suo stato naturale non deformato, una qualunque delle caratteristiche della deformazione nell'istante generico T potrà esprimersi come la somma della deformazione elastica

$$\varepsilon(T)$$

che, secondo la legge di Hooke, è proporzionale alla corrispondente caratteristica dello stato di tensione, e di una deformazione plastica

$$\bar{\varepsilon}(T) = \int_0^T \varepsilon(t) f(t)\, dt. \tag{2}$$

In questo integrale $f(t)\,dt$ misura l'incremento che la deformazione plastica subirebbe nello intervallo di tempo $(t, t + dt)$ in presenza di una deformazione elastica unitaria.

Alla funzione $f(t)$ noi daremo il nome di «coefficiente di plasticità»; essa caratterizza la suscettibilità del corpo a deformarsi plasticamente; e la sua variabilità col tempo è in immediato rapporto con quei mutamenti di caratteristiche fisiche che i corpi naturali possono subire deformandosi, e che vanno sotto il nome generico di «incrudimento».

Ora sembra ormai acquisito che i fenomeni di incrudimento sono strettamente connessi alle eterogeneità dei materiali [2]; sembra perciò lecito prescindere da essi finché ci si limita allo studio di materiali perfettamente omogenei come i metalli puri (monocristalli).

In tutti gli altri casi non v'è dubbio che l'incrudimento interviene; perciò si può prescindere da esso soltanto se ci si limita allo studio di fenomeni che si conchiudono entro limiti di tempo convenientemente ristretti.

Con tutte queste riserve – e con le conseguenti limitazioni circa l'applicabilità di quanto verremo dicendo ai fenomeni naturali – noi supporremo

$$f = \text{costante}. \tag{3}$$

(1) «Acta mathematica», 35, pp. 295–356.

(2) G. COLONNETTI, *Scienza delle Costruzioni*, vol. I, ed. Einaudi, Torino 1953, p. 430 e sg.; G. COLONNETTI, *L'équilibre des corps déformables*, ed. Dunod, Paris 1955, p. 29 e sg.

Supporremo poi anche che le forze applicate al corpo crescano (o decrescano) linearmente col tempo: è quel che cerchiamo di fare in laboratorio quando sperimentiamo su la resistenza dei materiali; è quel che cerchiamo di fare in cantiere quando sottoponiamo una struttura alle prove di carico.

Ciò equivale a porre

$$\varepsilon(t) = c\,t \qquad (c = \text{costante}). \tag{4}$$

In virtù di queste due ipotesi la funzione rappresentativa di una qualunque deformazione plastica, nell'istante T, può essere immediatamente integrata:

$$\bar{\varepsilon}(\mathrm{T}) = cf\int_0^{\mathrm{T}} t\,dt = cf\frac{\mathrm{T}^2}{2} \tag{5}$$

$$= \frac{f}{2}\,\mathrm{T}\,\varepsilon(\mathrm{T}) \tag{5'}$$

$$= \frac{f}{2c}\,\varepsilon^2(\mathrm{T}). \tag{5''}$$

Sotto quest'ultima forma essa esprime un rapporto di proporzionalità tra la deformazione plastica in un dato istante ed il quadrato della deformazione elastica alla quale essa si accompagna; rapporto che noi scriveremo d'ora innanzi semplicemente così:

$$\bar{\varepsilon} = k\varepsilon^2 \qquad \left(k = \frac{f}{2c}\right) \tag{6}$$

intendendo che ε ed $\bar{\varepsilon}$ misurano rispettivamente le deformazioni elastiche e le deformazioni plastiche che nell'istante T coesistono in un determinato punto del corpo per effetto di una sollecitazione esterna che è andata linearmente crescendo nell'intervallo di tempo (O , T).

È facile dare di tutto ciò una rappresentazione geometrica in uno spazio riferito a tre assi coordinati sui quali immagineremo rappresentate rispettivamente le sollecitazioni σ, i tempi t, e le deformazioni $\varepsilon + \bar{\varepsilon}$.

Poiché, secondo la (5'), per un valore dato T del tempo la deformazione plastica $\bar{\varepsilon}$ deve essere proporzionale alla deformazione elastica ε e quindi alla sollecitazione σ – mentre per un valore dato di σ e quindi della deformazione elastica ε la deformazione plastica $\bar{\varepsilon}$ deve riuscir proporzionale al tempo T – tra le linee rappresentative del fenomeno dovranno esserci due sistemi di rette: le une parallele al piano $\sigma\varepsilon$ ed appoggiate all'asse dei tempi (caso limite della sollecitazione identicamente nulla); le altre parallele al piano εt ed appoggiate alla retta che nel piano $\sigma\varepsilon$ rappresenta la legge di Hooke (caso limite della sollecitazione applicata istantaneamente).

La superficie rappresentativa sarà dunque un paraboloide iperbolico (fig. 1) sul quale ciascuna esperienza verrà raffigurata da una linea OP uscente dall'origine.

La proiezione di questa linea sul piano $\sigma\varepsilon$ (fig. 2) è una parabola tangente in O alla retta che rappresenta la legge di Hooke; la quale parabola si presta egregiamente ad interpretare i risultati che si ottengono sperimentando a trazione od a compressione su materiali omogenei, per esempio su monocristalli di rame o anche semplicemente su campioni di rame elettrolitico [3].

Vogliamo ora supporre che, nell'istante T, la legge di variazione della sollecitazione improvvisamente si inverta: che cioè la sollecitazione prenda a decrescere.

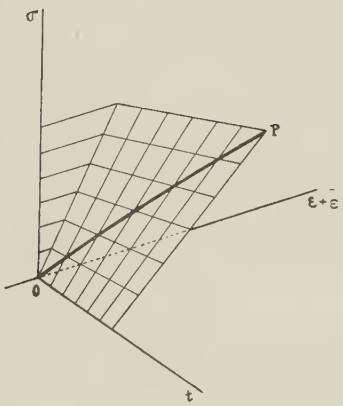


Fig. 1.

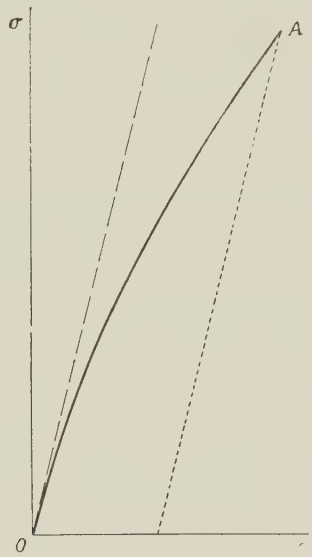


Fig. 2.

Se il ritorno allo zero avvenisse istantaneamente, dovrebbe istantaneamente annullarsi la sola deformazione elastica; il punto rappresentativo dovrebbe, nel nostro diagramma, tracciare una retta parallela alla tangente iniziale (fig. 2).

Noi vogliamo invece supporre che la sollecitazione decresca colla medesima velocità con cui andava dapprima crescendo.

L'esperienza dimostra che, in questo caso, non le sole deformazioni elastiche scompaiono, ma anche una parte delle deformazioni plastiche, e che il punto rappresentativo si scosta dalla parallela alla tangente iniziale per seguire una linea la cui curvatura, più o meno marcata, sarà in ogni caso opposta a quella della linea ascendente.

Per ottenere un andamento della linea discendente assai simile a quello che si osserva sperimentalmente basta ammettere che, a partire dall'istante

(3) G. COLONNETTI, *Esperienze sulla elasticità a trazione del rame*, « Rend. R. Accademia Lincei », Roma, 5, 23 (1914).

in cui si verifica l'inversione della sollecitazione, la deformazione elastica *negativa* che essa determina sia accompagnata da una deformazione plastica, *essa pure negativa*, la quale – per rapporto a nuovi assi coordinati convenientemente scelti: origine in A e direzioni opposte alle precedenti (fig. 3) – possa venire espressa in forma analoga a quella già adottata per le sollecitazioni crescenti:

$$\bar{\varepsilon}' = k'\varepsilon'^2 \tag{7}$$

k' essendo una nuova costante rappresentativa dell'attitudine del materiale a restituire *una parte* delle deformazioni plastiche: costante il cui valore dovrà perciò, in teoria, essere minore o tutt'al più eguale a k.

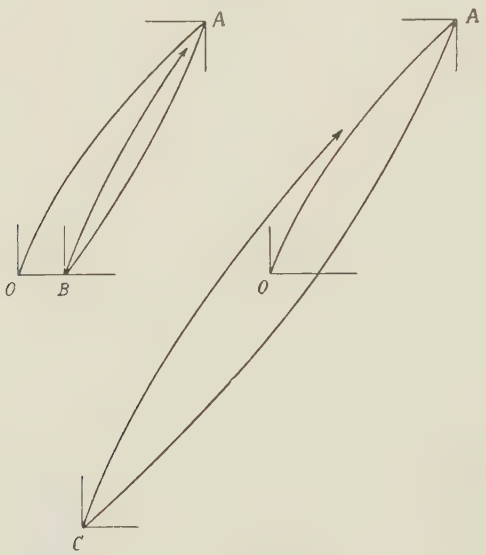


Fig. 3 e Fig. 4.

Se poi, dopo che la sollecitazione si è in questo modo annullata, essa riprende a crescere (sempre colla stessa velocità), quelle deformazioni plastiche ricompariranno. Ed è facile constatare che – previo un nuovo cambiamento di assi: origine in B e direzioni iniziali – basta attribuire al coefficiente di proporzionalità lo stesso valore k' per ottenere una linea ascendente che fa capo in A e, conseguentemente, un ciclo di isteresi (fig. 3) del tutto simile a quelli che si ottengono sperimentalmente.

Che se invece la sollecitazione, dopo di essersi annullata, continua a decrescere cioè assume valori negativi fino ad eguagliare, in valore assoluto, il massimo già raggiunto nel campo positivo, il diagramma presenterà l'andamento indicato in fig. 4.

E questa volta, nel confronto coi risultati dell'esperienza, ci veniamo a trovare di fronte non soltanto ad una generica similitudine di forma, ma ad un dato concreto: che è la simmetria, per rapporto alla origine O, dei due

vertici A e C del ciclo bilaterale, simmetria che si riscontra sperimentalmente sempre, qualunque sia il materiale su cui si opera e qualunque sia la velocità (costante) di variazione della sollecitazione.

Ora la teoria si presta senz'altro alla interpretazione di questo risultato; ponendo infatti nella (7) $\varepsilon' = 2\varepsilon$ si può ottenere $\bar{\varepsilon}' = 2\bar{\varepsilon}$ sol che si assuma

$$k' = \frac{1}{2} k. \tag{8}$$

Ciò che equivale ad ammettere che, della deformazione plastica, una metà è destinata a sparire insieme colla deformazione elastica quando la sollecitazione si annulla, mentre l'altra metà permane.

E ciò qualunque sia la velocità di variazione della sollecitazione, purché costante per tutta la durata dell'esperienza, cioè sia durante le operazioni di carico che durante quelle di scarico.

Questa conclusione concorda coi risultati sperimentali che io avevo personalmente ottenuti già molti anni or sono studiando sistematicamente l'isteresi elastica del rame elettrolitico.

In una Nota pubblicata nel 1915 nei « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei »[4] si trovano descritti e rigorosamente documentati due cicli bilaterali le cui forme e dimensioni riescono pienamente giustificate dalle considerazioni che qui siamo venuti svolgendo, sol che si ponga in un caso $k' = 0{,}51\, k$ e nell'altro $k' = 0{,}49\, k$.

(4) G. COLONNETTI, *Nuove esperienze sulla elasticità del rame*, « Rend. R. Accademia dei Lincei », Roma, 5, 24 (1915).

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Sulla rappresentazione delle funzioni analitiche di più variabili reali.* Nota II di JEAN ELIANU, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

3. – CONVERGENZA DELLA SERIE COSTRUITA.

Per dimostrare la convergenza della serie (5), noi utilizzeremo un procedimento di maggiorazione simile a quello di Hadamard per la soluzione elementare delle equazioni a derivate parziali lineari del secondo ordine di tipo non parabolico [9].

A tale scopo, scegliamo come variabili indipendenti le variabili normali di Riemann definite dalle relazioni

$$\xi^\alpha = s\left(\frac{dx^\alpha}{ds}\right)_{s=0} = x^\alpha - a^\alpha,$$

e indichiamo con σ la somma dei valori assoluti di queste variabili.

Utilizzando il segno usuale di maggiorazione, notiamo in primo luogo che, u essendo analitica e regolare in D, abbiamo

$$u \ll \frac{\lambda}{\left(1 - \frac{\sigma}{\rho}\right)^\nu}, \qquad \left(\frac{\sigma}{\rho} < 1, \nu \geq 1\right)$$

ove λ, ν, ρ sono costanti positive convenientemente scelte e risulta

$$\Delta u \ll \frac{\lambda\alpha\nu(\nu+1)}{\left(1 - \frac{\sigma}{\rho}\right)^{\nu+2}}, \quad \Delta^k u \ll \frac{\lambda\alpha^k \nu(\nu+1)\cdots(\nu+2k-1)}{\left(1 - \frac{\sigma}{\rho}\right)^{\nu+2k}}, \qquad \left(\alpha = \frac{n}{\rho^2}\right).$$

Dalla espressione (8) di φ_k°, si deduce

$$\varphi_k^\circ \ll \frac{\lambda\alpha^k \nu(\nu+1)\cdots(\nu+2k-1)}{4^k \cdot k!} \cdot \frac{1}{s^{\frac{n}{2}+k-1}} \int_0^s \cdots \int_0^s \frac{s^{\frac{n}{2}-1}\, ds \cdots ds}{\left(1 - \frac{\sigma}{\rho}\right)^{\nu+2k}}.$$

Poiché σ è proporzionale a s su ciascuna geodetica, avremo

$$\frac{1}{s^{\frac{n}{2}+k-1}} \int_0^s \cdots \int_0^s \frac{s^{\frac{n}{2}-1} ds \cdots ds}{\left(1 - \frac{\sigma}{\rho}\right)^{\nu+2k}} = \frac{1}{\sigma^{\frac{n}{2}+k-1}} \int_0^\sigma \cdots \int_0^\sigma \frac{\sigma^{\frac{n}{2}-1} d\sigma \cdots d\sigma}{\left(1 - \frac{\sigma}{\rho}\right)^{\nu+2k}}.$$

(*) Nella seduta del 10 giugno 1958.

D'altra parte, se $l > m > 0$, possiamo scrivere [9]

$$(11)\qquad \frac{1}{m}\cdot\frac{d}{d\sigma}\left[\frac{\sigma^m}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^l}\right]=\frac{\sigma^{m-1}}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{l+1}}\left[1+\left(\frac{l}{m}-1\right)\frac{\sigma}{\rho}\right]\gg\frac{\sigma^{m-1}}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{l+1}}\cdot$$

Se nella relazione precedente poniamo $l=\nu+k$ e $m=\frac{n}{2}+k-1$, avendo dunque scelto $\nu>\frac{n}{2}-1$, risulta

$$\frac{\sigma^{\frac{n}{2}+k-2}}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\nu+k+1}}\ll\frac{1}{\frac{n}{2}+k-1}\cdot\frac{d}{d\sigma}\left[\frac{\sigma^{\frac{n}{2}+k-1}}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\nu+k}}\right].$$

Applicando alla funzione maggiorata la relazione (11) e ripetendo il procedimento $k-1$ volte, deduciamo infine

$$\frac{\sigma^{\frac{n}{2}-1}}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\nu+2k}}\ll\frac{1}{\left(\frac{n}{2}+k-1\right)\left(\frac{n}{2}+k-2\right)\cdots\frac{n}{2}}\cdot$$

$$\cdot\frac{d^k}{d\sigma^k}\left[\frac{\sigma^{\frac{n}{2}+k-1}}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\nu+k}}\right]\ll\frac{1}{k!}\cdot\frac{d^k}{d\sigma^k}\left[\frac{\sigma^{\frac{n}{2}+k-1}}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\nu+k}}\right],$$

ciò che conduce alla relazione

$$\frac{1}{\sigma^{\frac{n}{2}+k-1}}\int_0^\sigma\cdots\int_0^\sigma\frac{\sigma^{\frac{n}{2}-1}\,d\sigma\cdots d\sigma}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\nu+2k}}\ll\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\nu+2k}}\cdot$$

Tenendo conto dei calcoli precedenti, risulta che possiamo scrivere

$$(12)\qquad \varphi_k^0\ll\frac{\lambda\alpha^k\,\nu(\nu+1)\cdots(\nu+2k-1)}{4^k\cdot(k!)^2}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\nu+k}},\qquad (k\geq 0)$$

relazione valida anche per $k=0$, perché allora essa diventa la relazione di maggiorazione corrispondente alla funzione u.

Dimostriamo in generale la formula

$$(13)\qquad \varphi_k^h\ll\frac{\lambda_k^h}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\nu+h+k}},\qquad (h\geq 0\,,\ k\geq 0)$$

ove il numero λ_k^h ha l'espressione

$$\lambda_k^h=\frac{\lambda\alpha^{h+k}\,\nu(\nu+1)\cdots(\nu+2k-1)\,(\nu+k+1)^2\,(\nu+k+2)^2\cdots(\nu+k+h)^2}{4^{h+k}\,(h!)^2\,(k!)^2}\cdot$$

La relazione (13) è valida per $h=0$, perché allora essa coincide con (12). In virtù della formula (10), nella quale cambiamo h in $h+1$, e della formula (13) supposta valida, possiamo scrivere

$$\varphi_k^{h+1} \leqslant \frac{\lambda_k^h \alpha (\nu+k+h)(\nu+k+h+1)}{4(h+1)\, s^{\frac{n}{2}+h}} \int_0^s \frac{s^{\frac{n}{2}+h-1}\, ds}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\nu+h+k+2}}$$

ed essendo σ proporzionale a s su ciascuna geodetica, avremo

$$\frac{1}{s^{\frac{n}{2}+h}} \int_0^s \frac{s^{\frac{n}{2}+h-1}\, ds}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\nu+h+k+2}} = \frac{1}{\sigma^{\frac{n}{2}+h}} \int_0^\sigma \frac{\sigma^{\frac{n}{2}+h-1}\, d\sigma}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\nu+h+k+2}}.$$

Se nella relazione (11) poniamo $l=\nu+k+h+1$ e $m=\frac{n}{2}+h$, deduciamo che

$$\frac{\sigma^{\frac{n}{2}+h-1}}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\nu+h+k+2}} \leqslant \frac{1}{\frac{n}{2}+h} \cdot \frac{d}{d\sigma}\left[\frac{\sigma^{\frac{n}{2}+h}}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\nu+h+k+1}}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{h+1} \cdot \frac{d}{d\sigma}\left[\frac{\sigma^{\frac{n}{2}+h}}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\nu+h+k+1}}\right],$$

onde risulta

$$\frac{1}{\sigma^{\frac{n}{2}+h}} \int_0^\sigma \frac{\sigma^{\frac{n}{2}+h-1}\, d\sigma}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\nu+h+k+2}} \leqslant \frac{1}{h+1} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\nu+h+k+1}}$$

e possiamo scrivere

$$\varphi_k^{h+1} \leqslant \frac{\lambda_h^k \alpha (\nu+k+h+1)^2}{4(h+1)^2} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\nu+h+k+1}} = \frac{\lambda_k^{h+1}}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\nu+h+k+1}},$$

relazione che ha la stessa forma della relazione (13), onde segue che questa ultima è generale.

Dimostriamo ora che le serie

$$(14) \qquad \begin{cases} \varphi_k^0 + \varphi_k^1 \Gamma + \cdots + \varphi_k^h \Gamma^h + \cdots & (k=0,1,2,\cdots) \\ \varphi_0 + \varphi_1 \Gamma + \cdots + \varphi_k \Gamma^k + \cdots \end{cases}$$

sono assolutamente e uniformemente convergenti nell'intorno di P. A tale scopo, considereremo la serie doppia

$$(15) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \varphi_k^h \Gamma^{h+k},$$

la quale è maggiorata dalla serie doppia con termini positivi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\lambda_k^h \Gamma^{h+k}}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\nu+h+k}}.$$

Per mostrare che questa ultima serie è convergente, conviene utilizzare il procedimento di sommazione triangolare, con che otteniamo la serie semplice

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma^m}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{m+\nu}} \sum_{j=0}^{m} \lambda_j^{m-j}.$$

Tenendo conto che

$$\sum_{j=0}^{m} \lambda_j^{m-j} = \frac{\lambda\alpha^m}{4^m} \cdot \sum_{j=0}^{m} \frac{\nu(\nu+1)\cdots(\nu+2j-1)(\nu+j+1)^2(\nu+j+2)^2\cdots(\nu+m)^2}{[j!(m-j)!]^2} <$$

$$< \frac{\lambda\alpha^m}{4^m} \cdot \frac{(2m)!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+2m)}{(m!)^4},$$

la serie precedente sarà maggiorata dalla serie

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda\alpha^m}{4^m} \cdot \frac{(2m)!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+2m)}{(m!)^4} \cdot \frac{\Gamma^m}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{m+\nu}}.$$

Indicando con t_m, il termine generale di questa serie, avremo

$$\lim_{m\to\infty} \frac{t_{m+1}}{t_m} = \frac{4\alpha\Gamma}{1-\frac{\sigma}{\rho}}$$

e quindi la serie doppia (15) sarà assolutamente convergente se $\Gamma < \frac{1}{4\alpha}\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)$. Se il punto P varia in un dominio qualunque incluso in D, il numero ρ avrà un minimo, dunque α avrà un massimo, e conseguentemente la convergenza della serie (15) sarà uniforme.

Con la stessa condizione, facendo la sommazione della serie (15) per linee, risulta che le serie (14) sono anche assolutamente e uniformemente convergenti.

Tenendo conto dei risultati precedenti, si può mostrare facilmente che la convergenza uniforme sussiste anche per le serie ottenute dalle (14) per derivazioni parziali termine a termine rispetto alle variabili indipendenti (per esempio, rispetto alle variabili normali).

4. – RAPPRESENTAZIONE DELLA FUNZIONE DATA PER LA SERIE COSTRUITA.

Rimane da dimostrare che la serie (5) rappresenta la funzione u, la quale ha servito alla sua costruzione. Per questo, dimostriamo anzitutto il lemma seguente:

LEMMA. – *Se esiste una funzione analitica* u, *regolare nel dominio* D *che contiene nell'interno il punto fisso* P, *tale che*

$$u, \Delta u, \cdots, \Delta^k u, \cdots$$

prendono, sul cono caratteristico $\Gamma = 0$, *con il vertice in* P, *rispettivamente gli stessi valori delle funzioni date*

$$u_0, u_1, \cdots, u_k, \cdots$$

analitiche e regolari in D, *allora la funzione* u *è determinata.*

La funzione u avrà una espressione della forma

$$u = \psi_0 + \psi_1 \Gamma + \cdots + \psi_k \Gamma^k + \cdots$$

dove le funzioni ψ_k sono analitiche e regolari nell'intorno di P, e tenendo conto della formula (4) e dell'ipotesi fatta, deduciamo che su $\Gamma = 0$, sussistono le relazioni

$$(16) \qquad \begin{cases} \psi_0 = u_0 \\ E_{1,1}\,\psi_1 = u_1 - \Delta\psi_0 \\ E_{2,2}\,\psi_2 = \frac{1}{2!}(u_2 - \Delta^2\psi_0 - \Phi^1_{2,1}\,\psi_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

$$E_{k,k}\,\psi_k = \frac{1}{k!}(u_k - \Delta^k\psi_0 - \Phi^{k-1}_{k,1}\,\psi_1 - 2!\,\Phi^{k-2}_{k,2}\,\psi_2 - \cdots - (k-1)!\,\Phi^1_{k,k-1}\,\psi_{k-1})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

che determinano per ricorrenza, su $\Gamma = 0$, le funzioni ψ_k.

Queste relazioni, eccetto evidentemente la prima, diventano sulle bicaratteristiche che passono per P delle equazioni differenziali dello stesso tipo delle equazioni (7) e così ciascuna di esse ha un solo integrale analitico e regolare nell'intorno di P.

Supposto che le funzioni ψ_k abbiano le espressioni dedotte con l'integrazione delle relazioni precedenti, non solo su $\Gamma = 0$, ma in tutto il dominio D, allora esse saranno analitiche e regolari rispetto alle variabili indipendenti x^α, nell'intorno di P. È importante il fatto che le funzioni ψ_k riescono determinate, cioè che se la funzione u esiste, essa è unica. Il lemma enunciato è dunque dimostrato.

Dimostriamo ora che la serie (5), costruita partendo dalla funzione u, rappresenta questa funzione. A tale scopo, sia u^* la somma della serie (5) nella quale le φ_k hanno le espressioni (9), i coefficienti φ^k_k essendo dati dalle formule (8) e (10).

La funzione u^* è analitica e regolare nell'intorno di P e le funzioni

$$u^*, \Delta u^*, \cdots, \Delta^k u^*, \cdots$$

prendono su $\Gamma = 0$ gli stessi valori delle funzioni analitiche e regolari

$$\varphi_0, E_{1,1}\,\varphi_1, \cdots, k!\,E_{k,k}\,\varphi_k, \cdots$$

Ma secondo le formule (7), la funzione u ha anche le proprietà della u^* e tenendo conto del lemma precedente, risulta che $u^* = u$, cioè che la serie (5) rappresenta nell'intorno di P, la funzione u.

Se la funzione u è poliarmonica, la serie (5) diventa una delle decomposizioni di Almansi [1], per la quale noi abbiamo dato, in altra occasione, la costruzione effettiva, utilizzando anche il metodo precedente [7].

Osservazioni. – I) Tutti i risultati precedenti rimangono validi se si sostituisce l'operatore Δ con un operatore qualunque F del secondo ordine, lineare, con coefficienti costanti e di tipo non parabolico, a condizione che le funzioni φ_k siano integrali analitici e regolari nell'intorno di P dell'equazione $F\varphi = 0$.

I ragionamenti ed i calcoli precedenti non mutano. Si deve solamente considerare che le $\delta^{\alpha\beta}$ sono costanti qualsivogliano soddisfacenti la suddetta condizione.

II) In un lavoro recentissimo, M. Nicolesco [11] nomina le funzioni di classe C^∞, che ammettono uno sviluppo in serie di forma (5) in un dominio D, funzioni armonicamente analitiche in D. Egli ha dato anche una condizione sufficiente affinché una funzione sia armonicamente analitica in D.

Utilizzando questa nomenclatura, ogni funzione analitica e regolare in D, è armonicamente analitica in D.

M. Nicolesco ha anche considerato il problema d'analiticità riguardo ad un operatore lineare qualunque nel caso generale di una algebra di Banach [12].

BIBLIOGRAFIA.

[1] ALMANSI E., *Sull'integrazione dell'equazione differenziale* $\Delta^{2n} u = 0$, « Annali di Matematica », ser. III, t. II, 1–51 (1899).

[2] CIORANESCO N., *Sur la représentation des fonctions analytiques de plusieurs variables réelles*, « Bull. de la Soc. Math. de France », t. LXV, 41–52 (1937).

[3] CIORANESCO N., *Sur les fonctions analytiques de deux variables réelles*, « Bull. Math. de la Soc. Roum. des Sciences », t. 38 (2), 63–70 (1937).

[4] CIORANESCO N., *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables réelles*, « Analele Academiei Romîne », seria III, t. XIX, mem. 10, 1–40.

[5] ELIANU J., *Les opérateurs différentiels et la construction de la solution élémentaire des équations polyhyperboliques*, « Comptes rendus de l'Ac. des Sciences de Paris », t. 228, 1095–96, 1186–88 (1949).

[6] ELIANU J., *Le problème de Cauchy pour les équations aux dérivées partielles polyhyperboliques normales* (en roumain) Thèse, « Studii și cercetări matematice », t. III, Nr. 3–4, 367–474 (1952).

[7] ELIANU J., *Sur le développement d'Almansi relativement aux fonctions polyharmoniques* (en roumain), Les travaux de la Session générale de l'Académie de la R.P.R., 290–298 (1950).

[8] GOURSAT E., *Sur l'équation* $\Delta\Delta u = 0$, « Bull. de la Soc. Math. de France », t. 26, 236–237 (1898).

[9] HADAMARD J., *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles hyperboliques*, Paris, Hermann (1932).

[10] NICOLESCO M., *Sur l'unicité de la représentation des fonctions harmoniques d'ordre p au moyen des fonctions harmoniques d'ordre un*, « Bull. Math. de la Soc. Roumaine des Sciences », t. 37 (1), 83–87 (1936).

[11] NICOLESCO M., *Le problème de l'analyticité des fonctions réelles*, « Revue de Mathématyques pures et appliquées », t. II, 53–59 (1957).

[12] NICOLESCO M., *Problème de l'analyticité par rapport à un opérateur linéaire*, « Studia mathematica », t. XVI, 353–363 (1958).

[13] PICONE M. *Nuovi indirizzi di ricerca nella teoria e nel calcolo delle soluzioni di talune equazioni lineari alle derivate parziali della Fisica Matematica*, « Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa », ser. II, vol. V, 213–288 (1936).

Analisi matematica. — *Sulla decomposizione del prolungamento di un sistema differenziale.* Nota (*) di MENDEL HAIMOVICI, presentata dal Socio B. SEGRE.

Questa Nota fa seguito a due Note precedenti, nelle quali abbiamo definito le decomposizioni regolari dei sistemi differenziali e studiato alcune proprietà generali di tali decomposizioni (1).

§ 1. – Richiami sul prolungamento di un sistema differenziale. Prolungamento di un elemento piano integrale.

1. Supponiamo che il sistema differenziale (S) sia di genere $p \geq \beta$ e che, su di una varietà integrale regolare generica β–dimensionale, le forme di Pfaff $\omega_1, \cdots, \omega_\beta$ che lo definiscono rimangano indipendenti. Chiamando $\tilde{\omega}_1, \cdots, \tilde{\omega}_{n-\beta}$ un sistema di $n - \beta$ forme di Pfaff indipendenti fra loro e dalle ω, un elemento piano integrale regolare generico di (S) sarà dato da un sistema di equazioni della forma

$$\varphi_\lambda = \tilde{\omega}_\lambda - l_{\lambda j}\,\omega_j = 0 \qquad (j = 1, \cdots, \beta\,;\ \lambda = 1, \cdots, n - \beta). \tag{1.1}$$

Fra le $l_{\lambda j}$ intercedono delle relazioni algebriche, con coefficienti funzioni delle variabili x figuranti nel sistema S, le quali verranno così simboleggiate:

$$\mathrm{F}_a(x, l) = 0 \qquad (a = 1, 2, \cdots). \tag{A}$$

Oltre alle (1.1) e alle (A), bisogna considerare anche le relazioni finite del sistema (S), siano le:

$$\Phi_b(x) = 0 \qquad (b = 1, 2, \cdots). \tag{B}$$

Il sistema di equazioni (1.1), (A) e (B) si chiude, ove gli si aggreghino le equazioni

$$d\tilde{\omega}_\lambda - l_{\lambda i}\,d\omega_i - [dl_{\lambda i}\,\omega_i] = 0, \tag{1.2}$$

$$d\mathrm{F}_a = 0\ ,\ d\Phi_b = 0. \tag{1.3}$$

Il sistema chiuso, formato (così dalle equazioni (1.1), (A), (B), (1.2), (1,3), è il β–*prolungamento* di S o il sistema β–*prolungato di* S, e lo denotiamo con $\mathrm{S}^{(1)}(\beta)$ o semplicemente con $\mathrm{S}^{(1)}$ (2).

(*) Pervenuta all'Accademia il 16 luglio 1958.

(1) M. HAIMOVICI, *Sulla decomposizione dei sistemi differenziali*, « Rend. Lincei » (VIII), vol. XXIII, pp. 379–386 (1957); *Alcune proprietà delle decomposizioni dei sistemi differenziali*, « Rend. Lincei » (VIII), vol. XXIV, pp. 646–652 (1958). Queste Note saranno citate rispettivamente con N_1 e N_2.

(2) E. CARTAN, *Sur la structure des graupes infinis de transformations*, « Ann. Ec. Norm. Sup. » (3), XXI, pp. 153–206 (1904); *Les Systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*, Paris, Hermann, 1945, Chap. IV, p. 112.

2. Sia un sistema chiuso, contenente soltanto equazioni finite, equazioni di Pfaff ed equazioni di secondo grado, scritto sotto la forma:

$$\Phi_b = 0\,,\ \theta_\alpha = 0\,,\ A_{\lambda\sigma\tau}\,[\tilde\omega_\sigma\tilde\omega_\tau] + B_{\lambda\sigma i}\,[\tilde\omega_\sigma\,\omega_i] + C_{\lambda ij}\,[\omega_i\,\omega_j] = 0 \tag{1.4}$$

$$(i\,,j = 1\,,\cdots,\beta\ ;\ \sigma\,,\tau = s_0 + 1\,,\cdots,n-\beta\ ;\ \alpha = 1\,,\cdots,s_0),$$

e supponiamo ch'esso sia di genere $p \geq \beta$ e che, su di una varietà integrale regolare generica, le forme ω_i rimangano indipendenti. Consideriamo, per ogni punto, una tale varietà, $\mathcal{V}_\beta$, e su di essa sia,

$$\tilde\omega_\sigma - h_{\sigma i}\,\omega_i = 0\ ;$$

allora possiamo sostituire alle $\tilde\omega_\sigma$ le forme

$$\tilde\omega^*_\sigma = \tilde\omega_\sigma - h_{\sigma i}\,\omega_i = 0 \tag{1.5}$$

ed il sistema (1.4) conserva la stessa forma con gli stessi $A_{\lambda\sigma\tau}$. Quando questi coefficienti sono tutti nulli, diremo che il sistema è sotto *forma normale*; la trasformazione (1.5) conserva dunque la forma normale.

Sulle varietà $\mathcal{V}_\beta$ abbiamo $\tilde\omega^*_\sigma = 0$, e, (1.4) dovendo esser verificato con ω_i indipendenti, risulta che i termini in $[\omega_i\,\omega_j]$ vengono a mancare a sostituzione effettuata.

Ponendo

$$B_{\lambda\sigma i}\,\tilde\omega_\sigma = \tilde\omega_{\lambda i}\,,$$

le equazioni di un sistema normale possono essere scritte, con una sostituzione (1.5), sotto la forma

$$[\tilde\omega_{\lambda i}\,\omega_i] = 0 \tag{1.6}$$

e fra le $\tilde\omega_{\lambda i}$ non intercede alcuna relazione identica della forma $A_{\lambda i}\,\tilde\omega_{\lambda i} + B_i\,\omega_i$ che non abbia tutti i B_i nulli.

Secondo quando abbiamo stabilito sopra, il prolungamento di un sistema differenziale è un sistema normale, e può dunque essere posto sotto la forma (1.6), con la proprietà descritta per $\tilde\omega_{\lambda i}$, essendo $\tilde\omega_{\lambda i} = -dl_{\lambda i}\cdot + \cdots$ ed i punti designando termini nelle ω_i.

3. Sia $E_1\,(d)$ un elemento lineare integrale S. Introducendo le sue componenti $\omega_i\,(d)$, $\tilde\omega_\lambda\,(d)$ in (1.1) troviamo un sistema di equazioni per $l_{\lambda i}$, compatibile colle relazioni (A). Prendendo poi, per $dl_{\lambda i}$, un sistema di valori arbitrari, abbiamo un elemento lineare $\overset{(1)}{E}_1$, integrale di $\overset{(1)}{S}$, che sarà chiamato *prolungamento di* E_1. Viceversa, dato un $\overset{(1)}{E}_1$ integrale di $\overset{(1)}{S}$, le sue componenti ω_i, $\tilde\omega_\lambda$, verificano S, cioè determinano un E_1 integrale di S. Diciamo che E_1 *è la proiezione di* $\overset{(1)}{E}_1$.

Più generalmente, sia un E_γ $(\gamma \leq \beta)$ integrale regolare di S. Su E_γ rimangono indipendenti γ delle forme ω_i. Siano $E_1^{(1)},\cdots,E_1^{(\gamma)}$, γ elementi lineari indipendenti contenuti in E_γ. Se introduciamo successivamente le componenti di $E_1^{(1)},\cdots$ in (1.1) troviamo delle equazioni nelle $l_{\lambda i}$ evidentemente com-

patibili colle (A). Cerchiamo poi γ sistemi di valori per $dl_{\lambda i}$, verificando a due a due (insieme coi valori di ω, $\tilde{\omega}$, componenti di $E_1^{(1)}, \cdots$) le equazioni (1.2). È evidente che tali sistemi esistono. Infatti, per E_γ passa una varietà integrale $\mathfrak{V}_\gamma$, sulla quale γ delle forme ω rimangono indipendenti; su tale $\mathfrak{V}_\gamma$ possiamo prendere per $l_{\lambda i}$ delle funzioni del punto; i differenziali di $l_{\lambda i}$ nelle direzioni di $E_1^{(1)}, \cdots$ ci dànno i sistemi cercati. Troviamo così γ elementi lineari $\underset{(1)}{E_1^{(1)}}, \underset{(1)}{E_1^{(2)}}, \cdots$ integrali di $\underset{(1)}{S}$, che formano un $\underset{(1)}{E_\gamma}$ integrale di $\underset{(1)}{S}$: il β–*prolungamento* di E_γ.

Viceversa, dato un $\underset{(1)}{E_\gamma}$ integrale di $\underset{(1)}{S}$, che lasci γ delle forme ω_i indipendenti, le proiezioni di γ sui elementi lineari indipendenti formano un E_γ integrale di S. E_γ è la *proiezione di* $\underset{(1)}{E_\gamma}$.

4. *Il sistema* $\underset{(1)}{S}$ *è di genere* β. Supponiamo che, per un certo $\gamma < \beta$, $\underset{(1)}{S}$ abbia elementi piani integrali regolari $\underset{(1)}{E_\gamma}$ e che l'elemento piano E_γ, proiezione di un $\underset{(1)}{E_\gamma}$ sia regolare per S. Dimostriamo che lo stesso accade per $\underset{(1)}{E_{\gamma+1}}$. Infatti esiste un $E_{\gamma+1}$, integrale regolare di S, contenente E_γ. Esiste dunque un $\underset{(1)}{E_{\gamma+1}}$ integrale di $\underset{(1)}{S}$. Il fatto che $E_{\gamma+1}$ è funzione continua di $\underset{(1)}{E_{\gamma+1}}$, ha per conseguenza che gli $\underset{(1)}{E_{\gamma+1}}$ formati come sopra sono regolari.

Se $\gamma = \beta$, risulta dalle equazioni (1.2), visto che, come si sa, queste possono essere messe sotto la forma (1.6), che, se le ω_i sono indipendenti, tutti i $dl_{\lambda i}$ sono funzioni lineari di esse; dunque non esistono varietà integrali regolari a più di β dimensioni. E così l'affermazione è dimostrata.

Partendo da un punto regolare di S, col suo β–prolungamento, si vede che il β–*prolungamento di un elemento piano* E_γ ($\gamma \leq \beta$), *integrale regolare di* S, *è un elemento piano integrale regolare di* $\underset{(1)}{S}$ [3].

§ 2. – Elementi piani caratteristici e loro prolungamento.

1. Chiamiamo elemento piano caratteristico di S un elemento piano integrale singolare, situato su di un elemento piano integrale p-dimensionale regolare.

Sia E_ε ($\varepsilon < \beta \leq p$) un elemento piano integrale caratteristico di prima specie (ved. N_2), e supponiamo che per E_ε passi un E_β integrale regolare generico di S. Allora l'E_ε sarà dato da $\beta - \varepsilon$ relazioni lineari fra le ω_i – aggiunte alle relazioni (1). Siano

$$\omega_{\varepsilon+1} = 0, \cdots, \omega_\beta = 0 \tag{2.1}$$

queste relazioni.

(3) Ved. Yozô Matsushima, *On a theorem concerning the prolongation of a differential system*, «Nagoya Math. Journ.», vol. 6, pp. 1–17 (1953).

2. Siano

$$A_{\sigma\lambda}\,\tilde{\omega}_\lambda(\delta) + B_{\sigma i}\,\omega_i(\delta) = 0 \tag{2.2}$$

le equazioni cui debbono soddisfare le componenti di un $E_1(\delta)$ associato ad un E_ε integrale di S, essendo $A_{\sigma\lambda}$, $B_{\sigma i}$ funzioni di E_ε. Fra le (2.2) ve ne sono – se E_ε è regolare – $\nu_\varepsilon = s_0 + s_1 + \cdots + s_\varepsilon$ di indipendenti e possiamo supporre che siano quelle per cui $\sigma = 1, \cdots, \nu_\varepsilon$.

Supponiamo ora che un E_ε sia situato sulla varietà piana $[n - (\beta - \varepsilon)]$–dimensionale data dalle (2.1), e che lasci indipendenti $\omega_1, \cdots, \omega_\varepsilon$. Se, qualunque sia E_ε soddisfacente a queste condizioni, esso è singolare, esistono delle quantità K^0_σ (dipendenti da E_ε), tali che

$$K^0_\sigma A_{\sigma\lambda} = 0 \quad , \quad K^0_\sigma B_{\sigma i} = 0, \tag{2.3}$$

le somme essendo estese ai valori di σ da 1 a ν_ε.

Supponiamo ora che all'E_ε sostituiamo, negli $A_{\sigma\lambda}$ e $B_{\sigma i}$, un altro elemento piano integrale F_ε, avente con E_ε un'intersezione $(\varepsilon - 1)$–dimensionale (soddisfacente alle (2.1)), mentre un ε–esimo è un elemento lineare integrale generico, associato ai precedenti, $E^*_1(\tilde{\omega}^*_\lambda, \omega^*_i)$. Se i coefficienti K^0_σ rimangono gli stessi che compaiono nelle (2.3) (mentre in A, B abbiamo introdotto F_ε invece di E_ε), abbiamo

$$K^0_\sigma A_{\sigma\lambda} = L^0_{\lambda m}\,\omega^*_m \;,\; K^0_\sigma B_{\sigma i} = M^0_{im}\,\omega^*_m \qquad (m > \varepsilon),$$

dove i coefficienti L, M dipendono solo da $E_{\varepsilon-1}$. Così dalle (2.3) otteniamo

$$K^0_\sigma(A_{\sigma\lambda}\,\tilde{\omega}_\lambda(\delta) + B_{\sigma i}\,\omega_i(\delta)) = L^0_{\lambda m}\,\omega^*_m\tilde{\omega}_\lambda(\delta) + M^0_{im}\,\omega^*_m\omega_i(\delta).$$

Quest'espressione può però dipendere da $E_1(\delta)$ soltanto mediante i binomi

$$\tilde{\omega}(\delta)\,\tilde{\omega}^*_\mu - \tilde{\omega}^*_\lambda\,\tilde{\omega}_\mu(\delta) \;,\; \tilde{\omega}_\lambda(\delta)\,\omega^*_i - \tilde{\omega}^*_\lambda\,\omega_i(\delta) \;,\; \omega^*_i\,\omega_j(\delta) - \omega_i(\delta)\,\omega^*_j \;,$$

essendo identicamente nulla se $\tilde{\omega}_\lambda(\delta) = \tilde{\omega}^*_\lambda$, $\omega_i(\delta) = \omega^*_i$, onde risulta

$$L^0_{\lambda m} = 0 \;,\; M^0_{im} = 0\,(i \leq \varepsilon) \;,\; M^0_{im} + M^0_{mi} = 0 \qquad (i > \varepsilon);$$

e siccome le (2.2) lasciando indipendenti le ω_i, segue $M^0_{im} = 0$ e abbiamo identicamente

$$K^0_\sigma(A_{\sigma\lambda}\,\tilde{\omega}_\lambda(\delta) + B_{\sigma i}\,\omega_i(\delta)) = 0 \tag{2.4}$$

anche se, invece di E_ε, abbiamo sostituito l'elemento F_ε.

Possiamo quindi procedere allo stesso modo, e sostituire un altro elemento piano integrale, F'_γ, avente in comune con F_γ l'elemento E^*_1 ed altri $\varepsilon - 2$ elementi piani soddisfacenti alle (2.1), mentre un altro elemento lineare $E^{*\prime}_1(\tilde{\omega}^{*\prime}_\lambda, \omega^{*\prime}_i)$ è generico ed associato ai precedenti.

Giungiamo così finalmente al risultato che le (2.4) hanno luogo identicamente, qualunque sia l'elemento piano E_ε integrale dal quale dipendono $A_{\sigma\lambda}$, $B_{\sigma i}$; cioè il rango del sistema (2.2) non diminuisce in virtù del fatto che l'elemento piano integrale E_ε è situato sulla varietà (2.1), ciò che è impossibile.

Dunque, oltre alla condizione di essere situato sul piano (2.1), per essere singolare, un E_ε deve verificare anche altre condizioni.

3. È possibile che, qualunque sia l'E_ε (situato su (2.1)), si abbia un numero di relazioni identiche

$$K_\sigma^0 A_{\sigma\lambda} = 0 \tag{2.5}$$

(con K_σ^0 dipendenti da E_ε). Perché l'elemento piano sia situato su di un E_β, con $\omega_1, \cdots, \omega_\beta$ indipendenti, bisogna che

$$K_\sigma^0 B_{\sigma i} = 0; \tag{2.6}$$

come segue dal n. 2, queste relazioni non discendono identicamente dalle (2.1).

Possono inoltre sussistere relazioni

$$K_\sigma^{0'} A_{\sigma\lambda} = 0, \tag{2.7}$$

indipendenti fra loro e non identiche in forza delle (2.1), e di conseguenza relazioni

$$K_\sigma^{0'} B_{\sigma i} = 0 \tag{2.8}$$

non necessariamente identiche in virtù delle (2.7).

4. Supponiamo che non esista alcuna identità (2.5). Sia poi l'elemento E_ε dato da (2.1) e (1.1), colle relazioni per $l_{\lambda i}$ ($i = 1, \cdots, \varepsilon$) che si ottengono sostituendo in (S) le (2.1) con le (1.1) e scrivendo che il sistema è verificato con $\omega_1, \cdots, \omega_\varepsilon$ indipendenti. Queste relazioni fanno parte dalle (A). Se E_ε è singolare, dalle (2.7) seguono, per i coefficienti $l_{\lambda i}$ ($i = 1, \cdots, \varepsilon$), un certo numero di relazioni, siano $H_\tau = 0$, non deducibili dalle (A). Queste relazioni non sono identiche, e le relazioni

$$dH_\tau = 0 \tag{2.9}$$

non sono necessariamente verificate; cosicché nel sistema prolungato, che, come abbiamo detto, è della forma (1.4) (coi coefficienti A nulli), le forme $\tilde{\omega}$ non sono sottoposte ad alcuna condizione risultante dalle (2.9). L'elemento piano E_ε non è necessariamente singolare.

(1)

Se invece siamo nel primo caso, dalle (2.5) risultano (sostituendo in (S) le (1.1) e le (2.1), e notando che si verifica con le $\omega_1, \cdots, \omega_\varepsilon$ indipendenti) delle relazioni per le $l_{\lambda i}$. Queste sono conseguenze delle (A) e sono verificate identicamente. Se consideriamo l'elemento E_ε in (2.2), possiamo supporre che le (2.6) non siano verificate. Ne risulta che E_ε non è singolare di prima specie. Ma allora non esiste per esso un E_β integrale con $\omega_1, \cdots, \omega_\beta$ indipendenti, e così un E_β integrale per E_ε non può venire espresso con le (1.1). Possiamo rappresentare soltanto l'E_ε con le equazioni (1.1) e (2.1), e fra le $l_{\lambda i}$ ($i = 1, \cdots, \varepsilon$) intercedono quelle relazioni che si deducono dalle (A) (e dalle (2.7)) e che esprimono che E_ε è integrale. Le relazioni fra le forme ω del sistema prolungato sono in numero di $N_\varepsilon = (\varepsilon - 1)s_1 + (\varepsilon - 2)s_2 + \cdots + s_{\varepsilon-1}$

Se, inoltre, sono verificate le (2.6), le relazioni che ne deduciamo, pure deducibili dalle (A), esprimono che esiste per E_ε un integrale regolare con $\omega_1, \cdots, \omega_\beta$ indipendenti; esse si aggiungono a N_ε. Sia M_ε il loro numero. Queste M_ε relazioni (facendo anch'esse parte delle (A)) saranno designate con (A').

Se adesso consideriamo il sistema $\overset{(1)}{S}$, si vede subito che il sistema lineare esprimente il fatto che un $\overset{(1)}{E}_1$ integrale è associato ad un $\overset{(1)}{E}_\varepsilon$ integrale regolare è di rango $\varepsilon(n-\beta) - \overset{(1)}{N}_\varepsilon$. Se $\overset{(1)}{E}_\varepsilon$ è situato nella varietà (2.1), questo sistema determina le $\tilde{\omega}_{\lambda i}$ $(i = 1, 2, \cdots, \varepsilon)$. Nel nostro caso, però, questo numero diminuisce riducendosi a $\varepsilon(n-\beta) - (N_\varepsilon + M_\varepsilon)$, ciò che esprime che il dato elemento è caratteristico. Dunque:

In questo caso il prolungamento di un elemento piano E_ε *caratteristico risulta anch'esso caratteristico.*

§ 3. – Decomposizione del prolungamento di un sistema differenziale.

1. Supponiamo che (S) sia regolarmente decomponibile, con β variabili indipendenti, in $S^{(1)}$ ed $S^{(2)}$.

Sia r il genere di $S^{(1)}$. Abbiamo $r \geq \beta$ e, su di una $\mathfrak{V}_r$ integrale regolare generica di $S^{(1)}$, le forme $\omega_1, \cdots, \omega_\beta$ siano indipendenti fra loro. Supponiamo che anche le $\tilde{\omega}_{\beta+1}, \cdots, \tilde{\omega}_r$ vi siano indipendenti. Allora, prolungando $S^{(1)}$, otteniamo

$$\tilde{\omega}_v - m_{vi}\,\omega_i - m_{vf}\,\tilde{\omega}_f = 0 \quad (v = r+1, \cdots, n \;\; ; \;\; f = \beta+1, \cdots, r), \tag{3.1}$$

con un sistema di relazioni fra le m ed x – sia (A') – analogo ad (A):

$$\psi_c(m, x) = 0 \qquad (c = 1, 2, \cdots). \tag{A'}$$

Sia $\overset{(1)}{S}{}^{(1)}$ il prolungamento di $S^{(1)}$ ed anche la sua chiusura.

Perché l'elemento piano integrale E_r di $S^{(1)}$, dato delle (3.1), contenga l'elemento E_β, dato dalle (1.1), bisogna che, fra le l e le m, intercedano (oltre i sistemi (A) ed (A')) le relazioni:

$$m_{vi} + m_{vf}\,l_{fi} = l_{vi}. \tag{3.2}$$

Dato che S è regolarmente decomponibile, con β variabili indipendenti, risulta che, ad un sistema di valori delle m (verificante (A')) deve corrispondere un sistema di valori delle l soddisfacenti alle (3.2), e viceversa.

2. In virtù delle (3.2), le (3.1) diventano

$$\omega_v - l_{vi}\,\omega_i - m_{vf}(\tilde{\omega}_f - l_{fi}\,\omega_i) = 0, \tag{3.3}$$

il che vuol dire che le equazioni (3.1) sono combinazioni lineari delle (1.1). Nelle (3.3) le l_{vi}, l_{vf} soddisfano al sistema (A), mentre le m_{vf} e le l soddisfano ad un sistema di relazioni che risulta dalle (3.2) ed (A'), sia

$$\chi_e(m_{vf}, l, x) = 0 \qquad (e = 1, 2, \cdots). \tag{$\overset{(1)}{A}{}^{(1)}$}$$

Aggreghiamo alle (3.3) le relazioni finite $(A^{(1)}_{(1)})$, i sistemi (A) e (B) e la chiusura del sistema ottenuto:

$$(3.4) \qquad d(\tilde{\omega}_v - l_{vi}\,\omega_i) - [dm_{vf}(\tilde{\omega}_f - l_{fi}\,\omega_i)] - m_{vf}\,d(\tilde{\omega}_f - l_{fi}\,\omega_i) = 0,$$

$$(3.5) \qquad d\mathrm{F}_a = 0 \quad , \quad d\chi_e = 0 \quad , \quad d\Phi_b = 0 .$$

Il sistema chiuso a cui così perveniamo non è altro che il sistema $S^{(1)}_{(1)}$. Infatti le (3.3) coincidono con le (3.1), in base alle (3.2). D'altra parte, siccome un E_β integrale regolare generico di (S) è situato sopra un E_r integrale regolare di $S^{(1)}$, così dalle (3.3), (B), (A) ed $(A^{(1)}_{(1)})$ seguono le (A').

È chiaro che i primi membri delle (3.3) fanno parte dell'ideale definito da $S_{(1)}$. Si vede poi subito che la stessa proprietà ha luogo per i primi membri delle (3.4).

Le equazioni $d\Phi_b = 0$ fanno parte del sistema $S^{(1)}$ e le equazioni $d\chi_e = 0$ sono (in base a (3.2) ed alle equazioni ottenute differenziando queste) combinazioni lineari delle (A) ed (A').

Dunque i primi membri delle $S^{(1)}_{(1)}$ fanno parte dall'ideale definito da $S_{(1)}$. Abbiamo il seguente

TEOREMA. – *Dato un sistema* S *regolarmente decomponibile, con* β *variabili indipendenti, in* $S^{(1)}$ *ed* $S^{(2)}$, *il prolungamento* $S^{(1)}_{(1)}$ *di* $S^{(1)}$ *fa parte del* β*–prolungamento* $S_{(1)}$ *di* S, *ed esiste un sistema di k equazioni di Pfaff che, aggregate ad* $S_{(1)}$, *forma con esso un sistema* $S^*_{(1)}$ *regolarmente decomponibile, con* β *variabili indipendenti, in* $S^{(1)}_{(1)}$ *ed un altro sistema* $S^{(2)}_{(1)}$. *Se le* $\mathfrak{V}_\beta$ *integrali regolari di* S *sono regolari per* $S^{(1)}$ *allora* $k = 0$.

La prima parte del teorema è stata stabilita sopra. Vogliamo dimostrare la seconda.

A questo scopo, dimostriamo dapprima che *su di una* $\mathfrak{V}_r$ *integrale generica di* $S^{(1)}_{(1)}$ *il sistema* $S^{(2)'}_{(1)}$ *è in involuzione, con le forme* $\omega_1, \cdots, \omega_\beta$ *indipendenti.*

La $\mathfrak{V}_r$ contiene una $\mathfrak{V}_r$ sulla quale il sistema $S^{(2)'}$ è in involuzione, con $\omega_1, \cdots, \omega_\beta$ indipendenti. Il prolungamento di $S^{(1)}$ è $S^{(1)}_{(1)}$, ed il prolungamento di $\mathfrak{V}_r$ è $\mathfrak{V}_r$. Una varietà integrale $\mathfrak{V}_h$ $(h \leq \beta)$ regolare, situata sulla $\mathfrak{V}_r$, induce una $\mathfrak{V}_h$ regolare, situata su $\mathfrak{V}_r$. La $\mathfrak{V}_h$ è regolare per $S^{(2)'}$, perché $S^{(2)'}_{(1)}$ è il prolungamento di $S^{(2)'}$ e $\mathfrak{V}_h$ è il prolungamento di $\mathfrak{V}_h$; e ciò dimostra l'asserto.

D'altra parte, sia una varietà integrale generica $\mathfrak{V}_\beta$ di S. Questa contiene una $\mathfrak{V}_\beta$ integrale generica di S e, per quest'ultima varietà, passa una $\mathfrak{V}_r$ integrale regolare di $S^{(1)}$, sulla quale $\mathfrak{V}_\beta$ è regolare per $S^{(2)'}$. La $\mathfrak{V}_r$ induce in $S^{(1)}_{(1)}$ una $\mathfrak{V}_r$. La $\mathfrak{V}_\beta$ è situata sulla $\mathfrak{V}_r$, ed è regolare su questa per il sistema $S^{(2)'}_{(1)}$..

Assegnata $\mathfrak{V}_\beta$ la $\mathfrak{V}_r$ può non essere determinata in modo univoco. Questo accade quando le m_{vf} non sono determinata dalle (A'), (3.2), cioè, quando le soluzioni di queste equazioni dipendono da un certo numero h (positivo) di parametri $\mu_1, \cdots, \mu_h$, che possono essere h delle m_{vf}. Il sistema (3.3), come del resto il sistema (S), può considerarsi nelle variabili x, l e nelle variabili supplementari $\mu_1, \cdots, \mu_h$ (le quali non entrano effettivamente in (S)).

Supponiamo che gli elementi piani $E_\beta^{(1)}$, integrali regolari a destra di $S^{(1)}$, siano regolari per $S^{(1)}$. In questo caso, dati ad arbitrio lungo una varietà integrale $\mathfrak{V}_\beta^{(1)}$ regolare di $S^{(1)}$ i valori dei parametri $\mu_1, \cdots, \mu_h$, quali funzioni regolari del punto, esisterà per $\mathfrak{V}_\beta^{(1)}$ una varietà $\mathfrak{V}_r^{(1)}$ integrale, sulla quale $\mathfrak{V}_\beta^{(1)}$ è regolare per $S^{(1)}$.

Se gli $E_\beta^{(1)}$ integrali generici di $S^{(1)}$ sono caratteristici – singolari di prima specie – per $S^{(1)}$, vuol dire che, quando sono verificate le equazioni $\tilde{\omega}_f - l_{fi}\,\omega_i = 0$, l'elemento piano integrale $E_\beta^{(1)}$ è singolare di prima specie per $S^{(1)}$.

Allora, a norma di quanto è stato stabilito nel § 2, esisterà una combinazione lineare fra le (3.4) nella quale non entrino i dl_{vi} dl_{ji}. Si vede così che le (3.4) dànno luogo ad equazioni della forma $[\pi_{vf}(\tilde{\omega}_f - l_{fi}\,\omega_i)] = 0$, dove le π_{vf} sono della forma $\pi_{vf} = -dm_{vf} + K_{vfi}\,w_i$. Ne risulta che, su di una varietà integrale di $S^{(1)}$, ogni π_{vf} viene a dipendere linearmente dalle $\tilde{\omega}_f - l_{fi}\,\omega_i$. In particolare, per i valori di m_{vf} rimasti, presi come parametri μ, abbiamo altrettante forme π_{vf} linearmente indipendenti dalle dl_{vi}, dl_{fi}, ω_i, $\tilde{\omega}_v$, $\tilde{\omega}_f$ che debbono annullarsi per $\tilde{\omega}_f - l_{fi}\,\omega_i = 0$ e cioè sulla varietà integrale di S. Perché il sistema $S^{(1)}$ sia decomponibile, secondo il teorema I di N_1, bisogna dunque aggregare a $S^{(1)}$ ed a $S^{(2)}$ le rispettive equazioni $\pi_{vf} = 0$, e ciò è anche sufficiente per la regolarità della decomposizione.

Se gli $E_\beta^{(1)}$ integrali generici di $S^{(1)}$ sono caratteristici – singolari di terza specie di $S^{(1)}$, allora per certi valori di $\eta \geq \beta$, un $E_\eta^{(1)}$ integrale di $S^{(1)}$ per cui $\tilde{\omega}_f - l_{fi}\,\omega_i = p_{fg}(\tilde{\omega}_g - l_{gi}\,\omega_i)$ $(f > \eta\,,\ \beta < g \leq \eta)$ (cioè un $E_\eta^{(1)}$ contenente un $E_\beta^{(1)}$ integrale generico di $S^{(1)}$) è singolare di prima specie per $S^{(1)}$. Ne risulta dal § 2 che, nelle (3.4), potremo dare delle combinazioni lineari nelle quali non entrino più i dl_{vi}, dl_{fi} e dm_{vf} $(f < \eta)$ e dimostreremo, come sopra, che i dm_{vg} $(g > \eta)$ dovranno verificare su di una $\mathfrak{V}_r^{(1)}$ certe equazioni di Pfaff che debbono essere aggregate $S^{(1)}$ ed a $S^{(2)}$ affinché il sistema risulti decomponibile.

Sempre a norma del teorema I di N_1, risulta poi che l'aggregare queste equazioni di Pfaff è anche sufficiente per la decomponibilità.

Geometria. — *Una dimostrazione algebrico-geometrica del teorema di Riemann–Roch relativo alle varietà algebriche classiche.* Nota (*) di ERMANNO MARCHIONNA, presentata dal Socio O. CHISINI.

1. In uno spazio proiettivo complesso S_r ad r dimensioni si consideri una varietà algebrica V_d, a $d \geq 2$ dimensioni, la quale sia *irriducibile* e *priva di punti multipli*.

Sia $|D|$ un sistema lineare completo, virtualmente privo di punti base, individuato sopra V_d da una ipersuperficie virtuale $D \equiv M - N$ (M, N ipersuperficie *pure* effettive di V_d; in particolare D potrà risultare effettiva ed eventualmente riducibile, ma per semplicità la supporremo priva di componenti multiple).

La *dimensione effettiva* del sistema $|D|$ è data dalla relazione

$$(1_1) \qquad \dim |D| = \delta(D) + (-1)^{d+1} j|D| + s|D|,$$

ove $\delta(D)$ è la *dimensione virtuale* dell'ipersuperficie D (1) e $j|D|$ ed $s|D|$ sono rispettivamente l'*indice di specialità* (2) e la cosiddetta *sovrabbondanza* del sistema $|D|$.

La relazione (1_1) non è altro che la definizione formale della sovrabbondanza $s|D|$, ed è ovvio che la determinazione di quest'ultima in funzione di altri caratteri del sistema $|D|$ – diversi dai precedenti – equivale alla valutazione della dimensione effettiva del sistema stesso (valutazione che costituisce l'oggetto del Teorema di Riemann–Roch, così come lo si intende nella Geometria algebrica classica).

Il problema è stato affrontato e risolto per via topologico–trascendente da Spencer [10], Kodaira [4], Serre, ed in modo più esauriente da Hirzebruch (3);

(*) Pervenuta all'Accademia il 4 agosto 1958.

(1) Precisamente si ha

$$\delta(D) = d + (-1)^d p_a(V_d) + \sum_{\alpha=1}^{d} (-1)^{d-\alpha} p_a(D^\alpha),$$

ove $p_a(V_d)$ è il genere aritmetico virtuale di V_d, e $p_a(D^\alpha)$ è il genere aritmetico virtuale della varietà D^α, intersezione virtuale di α ipersuperficie generiche linearmente equivalenti a D.

L'importante concetto di dimensione virtuale è stato introdotto da SEVERI in [8], n. 19; i generi aritmetici $p_a(V_d)$ e $p_a(D^\alpha)$ vengono ivi indicati rispettivamente con p_d e $g(D^\alpha)$.

La dimensione effettiva del sistema completo $|D|$ è notoriamente il numero – diminuito di un'unità – delle ipersuperficie *effettive* di V_d equivalenti all'ipersuperficie virtuale D e linearmente indipendenti. Se è $\dim |D| > -1$, il sistema $|D|$ si dice effettivo (tra i sistemi effettivi s'include anche quello formato dallo *zero* $Z \equiv M - M$ dell'equivalenza ipersuperficiale; e si ha $\dim |Z| = 0$). Se invece $\dim |D| = -1$ il sistema viene detto virtuale.

(2) Cioè la dimensione effettiva del sistema $|K - D|$ (residuo di $|D|$ rispetto al sistema canonico $|K|$ di V_d) aumentata di un'unità.

(3) A tale proposito il lettore può trovare ampie informazioni nella monografia [2] di HIRZEBRUCH. Cfr. anche SERRE, Proc. Int. Congress of Math. Amsterdam 1954, Vol. III, p. 515.

alcuni risultati degli Autori predetti sono stati successivamente tradotti nel linguaggio della Geometria algebrica classica da Hodge [3]. In un recente lavoro ([6], Nota I) abbiamo mostrato che la questione poteva essere affrontata, almeno parzialmente, con dei metodi che si accostano a quelli seguiti da Severi ed Enriques nel caso delle superficie [4]; qui completiamo lo studio intrapreso presentando una dimostrazione intieramente algebrica del Teorema di Riemann-Roch.

2. Per comodità del lettore richiamiamo in questo paragrafo le proposizioni su cui è basata la nostra trattazione.

I. *Sia* E *l'ipersuperficie tagliata sopra* V_d *da un iperpiano generico e sia* C *una qualsiasi prefissata ipersuperficie virtuale* (in particolare effettiva) *di* V_d. *Per l sufficientemente grande il sistema* $|lE+C|$ *risulta effettivo, non speciale* $(j|lE+C|=0)$, *e regolare* $(s|lE+C|=0)$; *in altri termini si ha*

$$\dim |lE+C| = \delta(lE+C)\ [5].$$

Indichiamo ora con $|X|\cdot Y$ il sistema lineare (eventualmente incompleto) segato sopra una varietà irriducibile Y, appartenente a V_d, da un sistema lineare completo $|X|$ d'ipersuperficie tracciate sopra V_d; con $||X|\cdot Y|$ il sistema $|X|\cdot Y$ reso competo; con $\operatorname{def}|X|\cdot Y$ la deficienza del sistema $|X|\cdot Y$, cioè il numero

$$\operatorname{def}|X|\cdot Y = \dim_{\cdot\cdot}||X|\cdot Y| - \dim|X|\cdot Y.$$

Ciò posto, ricordiamo un secondo classico risultato, molto utile per il seguito.

II. LEMMA DI ENRIQUES-SEVERI-ZARISKI. — *Siano:* $|T|$ *un sistema lineare completo arbitrario tracciato su* V_d, *ed* E_m *l'intersezione di* V_d *con una generica forma d'ordine m dello spazio ambiente* S_r. *Esiste un intero* $m(T)$, *dipendente da* $|T|$, *tale che per* $m \geq m(T)$ *si ha*

$$\operatorname{def}|T|\cdot E_m = 0;$$

in altre parole, per $m \geq m(T)$ *il sistema* $|T|$ *taglia su* E_m *un sistema lineare completo* [6].

Passiamo ora alla terza proposizione preliminare:

III. *Sopra* V_d *si considerino: un'ipersuperficie* B *irriducibile e priva di punti multipli, un sistema lineare completo* $|C|$ (effettivo o virtuale), *ed il sistema* $|A| = |C - B|$.

Sussiste la relazione:

$$(I_2)\quad (-1)^{d+1}(j|C|-j|A|+j_1|C|\cdot B|)-s|A|-s|C|+s_1|C|\cdot B|=\operatorname{def}|C|\cdot B\ [7].$$

(4) Cfr. ad esempio ENRIQUES [1], p. 132.

(5) Cfr. ad esempio SEVERI [9], p. 78. Severi definisce *regolare* un sistema $|D|$ per cui sia $\dim|D| = \delta(D)$, mentre noi – d'accordo con la nomenclatura adottata da ENRIQUES per le superficie ([1], p. 133) – diciamo che $|D|$ è regolare quando $s|D| = 0$. Nel caso in esame, essendo l molto elevato, il sistema $|D| = |lE+C|$ risulta certo non speciale $(j|D| = 0)$, e le due definizioni coincidono.

(6) Tale lemma estende note proprietà delle superficie algebriche dovute a SEVERI ed ENRIQUES (cfr. ad esempio [1], p. 128); esso è stato dimostrato in [11] da ZARISKI per varietà assolutamente normali sopra un campo di caratteristica qualsiasi.

(7) Cfr. E. MARCHIONNA [6]. Nota I, n. 2. Per $d = 2$, qualora la serie lineare $|C|\cdot B$ sia effettiva, si ha $s||C|\cdot B| = 0$, e la (I_2) si riduce ad una nota relazione di Enriques. Se invece la serie $|C|\cdot B$ fosse virtuale, potrebbe essere $s||C|\cdot B| \neq 0$, e la (I_2) dovrebbe essere adoperata senza semplificazioni di sorta.

Introducendo il sistema canonico $|K|$ di V_d, la (1_2) può scriversi nella forma più semplice

$$(2_2) \qquad (-1)^{d+1} \operatorname{def}|K-A|\cdot B = s|A|-s|C|+s||C\cdot B|-\operatorname{def}|C|\cdot B \ (8).$$

È ovvio che la (1_2) perde significato quando il sistema completo $|C|$ contiene come *parte fissa* l'ipersuperficie B; infatti allora non ha senso parlare del sistema $|C|\cdot B$ tagliato su B da $|C|$, e di conseguenza perde significato il termine $\operatorname{def}|C|\cdot B$ che indica la deficienza di detto sistema (9).

Cosippure la (2_2) non ha significato quando B sia una componente fissa di uno dei sistemi $C|$ e $|K-A|$ (10).

Naturalmente tutte le volte che abbiamo usato la (1_2) o la (2_2) abbiamo sempre implicitamente escluso questi casi eccezionali (11), e così continueremo a fare nel seguito.

(8) Cfr. E. Marchionna [6], Nota III, n. 10.

(9) Introducendo opportune convenzioni (suggerite del resto dalla trattazione eseguita in [6], Nota I, n. 2) si può estendere la validità della (1_2) anche a questo caso eccezionale.

Innanzitutto si può ancora parlare del sistema completo $||C|\cdot B|$: esso risulta individuato su B da una varietà virtuale $C\cdot B = (D-E)\cdot B$, intersezione virtuale di B con un'ipersuperficie $D-E$ tracciata su V_d e linearmente equivalente ad una ipersuperficie totale di $C|$: ed è lecito supporre le ipersuperficie D ed E irriducibili, prive di punti multipli, non contenenti B, ed appartenenti a sistemi $|D|$ ed $|E|$ molto grandi. (Cfr. ad esempio Severi [8], n. 17). Più precisamente si avrà:

$$C\cdot B = (D-E)\cdot B = D\cdot B - E\cdot B,$$

e come al solito la dimensione effettiva $\dim||C|\cdot B|$ del sistema completo $||C|\cdot B|$ sarà data dal numero, diminuito di un'unità, delle ipersuperficie effettive di B equivalenti ad una varietà virtuale $C\cdot B$.

Dopodiché, volendo conservare la validità delle due note relazioni

$$\dim|C|\cdot B = \dim|C| - \dim|A| - 1. \qquad (A = C - B),$$

$$\operatorname{def}|C|\cdot B = \dim||C|\cdot B| - \dim|C|\cdot B,$$

(usate in [6] nella dimostrazione della (1_2)), basta definire *formalmente* i due simboli $\dim|C|\cdot B$, $\operatorname{def}|C|\cdot B$ – limitatamente al caso che B sia una componente fissa di $|C|$ – con le seguenti uguaglianze:

$$\dim|C|\cdot B = -1.$$

$$\operatorname{def}|C|\cdot B = \dim||C|\cdot B| + 1;$$

e fra queste, l'ultima va tenuta presente per l'applicazione della (1_2) nel caso eccezionale in esame.

(10) Ad esempio, ponendo nella (2_2)

$$B \equiv D \quad , \quad |C| = |D| \quad , \quad |A| = |C - B| = |Z|$$

(Z è lo *zero* dell'equivalenza ipersuperficiale), e ricordando che $s|Z| = (-1)^d q_d$, (q_d: irregolarità d-dimensionale di V_d), si riottiene una relazione determinata in [6] (Nota II, n. 5):

$$(3_2) \qquad (-1)^{d+1} \operatorname{def}|K|\cdot D = (-1)^d q_d - s|D| + s||D|\cdot D| - \operatorname{def}|D|\cdot D.$$

Naturalmente questa relazione perde significato quando D è una componente fissa del sistema canonico $|K|$, oppure quando D è un'ipersuperficie isolata di V_d (cioè quando il sistema lineare $|D|$ ha dimensione effettiva uguale a zero); tuttavia introducendo convenzioni analoghe a quelle indicate nella precedente nota a piè di pagina, si può estendere la validità della (2_2) e della (3_2) anche a questi casi eccezionali.

(11) Il che del resto è d'accordo con la convenzione – abituale nella geometria algebrica classica – di considerare i sistemi lineari depurati delle loro componenti fisse.

Terminiamo questi richiami avvertendo il lettore che le proposizioni I e III sono state dimostrate con i metodi della Geometria algebrica classica, mentre la II, nella forma in cui l'abbiamo enunciata, è stata ottenuta da Zariski con i metodi dell'Algebra astratta; tuttavia nel n. 5 ne daremo una nuova semplice dimostrazione limitatamente alle varietà algebriche classiche (cioè alle varietà immerse in spazi proiettivi complessi), le quali sono le sole che interessino il presente lavoro.

3. Sopra la varietà V_d $(d \geq 2)$ consideriamo $d-1$ ipersuperficie

$$X_1, X_2, \cdots, X_i, \cdots, X_{d-1},$$

le quali siano rispettivamente intersezioni complete di V_d con $d-1$ forme generiche $F_1, F_2, \cdots, F_i, \cdots, F_{d-1}$ aventi ordini abbastanza elevati $m_1, m_2, \cdots, m_i, \cdots, m_{d-1}$ (sia cioè $X_i = V_d \cap F_i$).
Si ha ovviamente

$$(1_3) \qquad X_i \equiv m_i E.$$

Per comodità di nomenclatura, poniamo

$$\begin{aligned} V_{d-1} &= X_1 \\ V_{d-2} &= X_1 \cap X_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ V_{d-i} &= X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_i \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ V_1 &= X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_{d-1}, \end{aligned}$$

cioè indichiamo con V_{d-i} la varietà a $d-i$ dimensioni – tracciata sopra V_d – che si ottiene intersecando le i ipersuperficie $X_1, X_2, \cdots, X_i$. Evidentemente si ha

$$V_{d-i} = V_{d-i+1} \cap X_i.$$

Dalle ipotesi fatte risulta che V_{d-i} è irriducibile e priva di punti multipli. Detti $|K|$ e $|K(V_{d-i})|$ i sistemi lineari canonici appartenenti alle varietà V_d e V_{d-i}, si ha (per una classica proprietà dell'aggiunzione):

$$\begin{aligned} |K(V_{d-1})| &= \|K + X_1\| \cdot X_1| = \|K + X_1\| \cdot V_{d-1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ |K(V_{d-i})| &= \|K + X_1 + X_2 + \cdots + X_i\| \cdot V_{d-i}|. \end{aligned}$$

In altre parole, le ipersuperficie del sistema lineare $|K + X_1 + X_2 + \cdots + X_i|$, tracciato su V_d, tagliano sopra V_{d-i} ipersuperficie del suo sistema canonico.

Consideriamo ora sopra V_d un sistema lineare completo $|D|$, virtualmente privo di punti base, individuato da un'ipersuperficie D virtuale (in particolare effettiva ed anche riducibile, ma priva di componenti multiple). Poniamo inoltre

$$(2_3) \qquad C_i = D + X_1 + X_2 + \cdots + X_i.$$

In virtù delle proposizioni preliminari I e II *è possibile scegliere gli ordini* m_h delle forme F_h *così elevati che le ipersuperficie* X_h *godano delle seguenti proprietà*:

a) *Per* $\lambda > 0$, $\mu \geq 0$, *il sistema*

$$|(D + X_1 + X_2 + \cdots + X_i) + X_{i+\lambda} + \mu E| \cdot V_{d-i} = |C_i + (m_{i+\lambda} + \mu) E| \cdot V_{d-i},$$

tagliato sopra V_{d-i} $(i \geq 0)$ dal sistema lineare $|C_i + (m_{i+\lambda} + \mu) E|$ di V_d, *risulti effettivo, non speciale, e regolare* [12]; in altre parole si abbia

$$j\,||C_i + (m_{i+\lambda} + \mu) E| \cdot V_{d-i}| = s\,||C_i + (m_{i+\lambda} + \mu) E| \cdot V_{d-i}| = 0.$$

b) *Per ogni* $i \leq d - 1$ *il sistema completo* $|K - D|$ *di* V_d *tagli un sistema completo sopra* V_{d-i} [13], *e non esista nessuna ipersuperficie di* $|K - D|$ *che contenga* V_{d-i}.

Sotto queste condizioni dimostreremo che

$$(3_3) \qquad s\,|D| = \sum_{i=1}^{d-1} (-1)^{i+1} \operatorname{def} |D + X_1 + X_2 + \cdots + X_i| \cdot V_{d-i};$$

cioè che

$$\dim |D| = \delta(D) + (-1)^{d+1} j\,|D| + \sum_{i=1}^{d-1} (-1)^{i+1} \operatorname{def} |D + X_1 + X_2 + \cdots + X_i| \cdot V_{d-i}$$

(*teorema di Riemann–Roch per le varietà algebriche classiche*).

La dimostrazione seguirà agevolmente dalle seguenti proprietà.

Lemma 1. – Il sistema lineare $|\Gamma| \cdot V_{d-h}$, segato sopra V_{d-h} dal sistema completo di V_d

$$|\Gamma| = |D + X_1 + \cdots + X_{h-1} + X_h + \cdots + X_{i+1}|,$$

è certamente completo per ogni $h \leq i$ (cioè si ha $\operatorname{def} |\Gamma| \cdot V_{d-h} = 0$).

Il Lemma è vero per $h = 0$ (poiché in tal caso V_{d-h} coincide con V_d ed il sistema $|\Gamma| \cdot V_{d-h}$ coincide con $|\Gamma|$); ammesso quindi per V_{d-h+1} lo si dimostrerà per V_{d-h}.

Per ipotesi è dunque $||\Gamma| \cdot V_{d-h+1}| = |\Gamma| \cdot V_{d-h+1}$.

(12) Si noti che è applicabile la proprietà preliminare I del n. 2, in quanto sopra V_{d-i} l'ipersuperficie che individua il sistema considerato è somma di una certa ipersuperficie virtuale $C_i \cdot V_{d-i}$ con un multiplo abbastanza elevato, $(m_{i+\lambda} + \mu) E \cdot V_{d-i}$, della generica sezione iperpiana di V_{d-i}. Naturalmente la proprietà *a*) è valida anche per $i = 0$; in tal caso il sistema $|C_0 + (m_\lambda + \mu) E| \cdot V_d$ coincide col sistema lineare $|D + X_\lambda + \mu E|$ tracciato su V_d. Per comodità i sistemi convenientemente grandi $X_1, X_2, \cdots, X_{d-1}$ possono essere scelti in modo che ciascuno di essi sia contenuto nel successivo.

(13) Per questo si osservi che nella successione $V_d, V_{d-1}, \cdots, V_1$ ciascuna V_{d-i} è segata sulla varietà precedente V_{d-i+1} dall'ipersuperficie X_i di V_d; cioè ciascuna V_{d-i} è segata sopra V_{d-i+1} da una forma F_i dello spazio ambiente, avente ordine m_i abbastanza elevato. Basta quindi applicare il Lemma di Enriques–Severi–Zariski successivamente a $V_d, V_{d-1}, \cdots, V_2$ assumendo sopra ciascuna di esse: come sistema $|T|$ il sistema segato da $|K - D|$, e come ipersuperficie E_m rispettivamente le varietà $V_{d-1}, V_{d-2}, \cdots, V_1$.

Sopra V_{d-h+1} consideriamo i tre sistemi lineari completi

$$|C| = |\Gamma| \cdot V_{d-h+1} \quad , \quad |B| = \|X_h| \cdot V_{d-h+1}| \quad , \quad |A| = |C - B|.$$

Ricordando le (1_3), (2_3), e posto

$$\mu = m_h + m_{h+1} + \cdots + m_i$$

$$\mu' = \mu - m_h$$

si può scrivere

$$|C| = |C_{h-1} + X_{i+1} + \mu E| \cdot V_{d-h+1} = |C_h + X_{i+1} + \mu' E| \cdot V_{d-h+1},$$

$$|A| = \|C_{h-1} + X_{i+1} + \mu' E| \cdot V_{d-h+1}|.$$

Nel sistema $|B|$ consideriamo ora la particolare ipersuperficie

$$B = X_h \cap V_{d-h+1} = V_{d-h}.$$

Si ha:

$$|C| \cdot B = |\Gamma| \cdot V_{d-h} = |C_h + X_{i+1} + \mu' E| \cdot V_{d-h},$$

e per l'ipotesi *a*)

$$j|C| = s|C| = 0 \quad ; \quad j|A| = s|A| = 0 \quad ; \quad j\|C| \cdot B| = s\|C| \cdot B| = 0.$$

Applicando la (1_2) del n. 2 ai sistemi $|C|, |A|, |B|$ della V_{d-h+1} si ottiene:

$$(-1)^{d-h+1}(j|C| - j|A| + j\|C| \cdot B|) = s|A| - s|C| + s\|C| \cdot B - \mathrm{def}|C| \cdot B;$$

e tenendo conto delle relazioni soprascritte si deduce appunto

$$\mathrm{def}\,|C| \cdot B = \mathrm{def}\,|\Gamma| \cdot V_{d-h} = 0.$$

LEMMA 2. – Per ogni $i \leq d - 1$ si ha

$$j\|D + X_1 + X_2 + \cdots + X_i| \cdot V_{d-i}| = j|D|.$$

Infatti

$$j|D| = \dim|K - D| + 1,$$

e poiché

$$|K(V_{d-i})| = \|K + X_1 + X_2 + \cdots + X_i| \cdot V_{d-i}|,$$

risulta

$$j\|D + X_1 + X_2 + \cdots + X_i| \cdot V_{d-i}| = \dim\|K - D| \cdot V_{d-i}| + 1.$$

Per l'ipotesi *b*) si ha

$$\dim|K - D| = \dim\|K - D| \cdot V_{d-i}|,$$

il che prova l'asserto.

LEMMA 3. – Sussiste l'uguaglianza

$$(4_3) \qquad s|D| = \mathrm{def}|D + X_1| \cdot V_{d-1} - s\|D + X_1| \cdot V_{d-1}|.$$

Per la dimostrazione, consideriamo sopra V_d i sistemi lineari

$$|C| = |D + X_1| \quad ; \quad |B| = |X_1| \quad (B = V_{d-1}) \quad ; \quad |A| = |C - B| = |D|.$$

Si ha

$$|C| \cdot B = |D + X_1| \cdot V_{d-1},$$

$$s|C| = j|C| = 0 \quad \text{(ipotesi } a\text{)},$$

$$j|A| = j\|C| \cdot B| \quad \text{(Lemma 2)}.$$

Applicando la (1_2) del n. 2 si deduce la (4_3).

Lemma 4. – Analogamente si verifica che, per $i > 1$, sussiste l'uguaglianza

$$(5_3) \qquad s\|D + X_1 + X_2 + \cdots + X_{i-1}| \cdot V_{d-i+1}| =$$

$$= \text{def}|D + X_1 + X_2 + \cdots + X_i| \cdot V_{d-i} - s\|D + X_1 + X_2 + \cdots + X_i| \cdot V_{d-i}|.$$

Per questo si considerino sopra V_{d-i+1} i sistemi lineari

$$|C| = \|D + X_1 + X_2 + \cdots + X_{i-1} + X_i| \cdot V_{d-i+1}|$$

$$|B| = \|X_i| \cdot V_{d-i+1}|$$

$$|A| = |C - B| = \|D + X_1 + X_2 + \cdots + X_{i-1}| \cdot V_{d-i+1}|,$$

e nel sistema $|B|$ si scelga la particolare ipersuperficie

$$B = X_i \cap V_{d-i+1} = V_{d-i}.$$

Per il Lemma 1 si ha

$$|C| = |D + X_1 + X_2 + \cdots + X_{i-1} + X_i| \cdot V_{d-i+1},$$

quindi

$$|C| \cdot B = |D + X_1 + X_2 + \cdots + X_{i-1} + X_i| \cdot V_{d-i}.$$

D'altra parte

$$j|C| = s|C| = 0 \qquad \text{(ipotesi } a\text{)}$$

ed inoltre

$$j|A| = j\|C| \cdot B|$$

(infatti per il Lemma 2 questi due ultimi indici di specialità sono entrambi uguali a $j|D|$); per cui sostituendo il tutto nella (1_2) del n. 2 – applicata a V_{d-i+1} – si ottiene

$$s|A| + s\|C| \cdot B| - \text{def}|C| \cdot B = 0,$$

cioè la (5_3).

A questo punto siamo finalmente in grado di dimostrare la (3_3).

Insieme alla (4_3), consideriamo le $d-2$ relazioni che si ottengono dalla (5_3) ponendo successivamente $i = 2, 3, \cdots, d-1$. Abbiamo:

$$s|D| = \text{def}|D + X_1|\cdot V_{d-1} - s||D + X_1|\cdot V_{d-1}|,$$

$$s||D + X_1|\cdot V_{d-1}| = \text{def}|D + X_1 + X_2|\cdot V_{d-2} - s||D + X_1 + X_2|\cdot V_{d-2}|,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s||D + X_1 + X_2 + \cdots + X_{d-2}|\cdot V_2| = \text{def}|D + X_1 + X_2 + \cdots + X_{d-1}|\cdot V_1 -$$
$$- s||D + X_1 + X_2 + \cdots + X_{d-1}|\cdot V_1|.$$

Tenuto presente che la sovrabbondanza $s||D + X_1 + X_2 + \cdots + X_{d-1}|\cdot V_1|$, (relativa ad una serie lineare *effettiva* tracciata sopra una curva V_1) è uguale a zero, si deduce dalle relazioni soprascritte che

$$(3_3) \qquad s|D| = \sum_{i=1}^{d-1} (-1)^{i+1} \text{def}|D + X_1 + X_2 + \cdots + X_i|\cdot V_{d-i}\ ^{(14)}.$$

Abbiamo espresso la sovrabbondanza di un arbitrario sistema lineare $|D|$ – tracciato sopra una varietà V_d avente dimensione $d \geq 2$ – in funzione di deficienze legate a $|D|$ ed a sistemi ausiliari $|X_1|, |X_2|, \cdots, |X_{d-1}|$ costituiti da multipli abbastanza elevati del sistema $|E|$ delle sezioni iperpiane; si è così ottenuto uno dei possibili enunciati del Teorema di Riemann–Roch.

Volendo, i suddetti multipli di $|E|$ potrebbero essere sostituiti con altrettanti sistemi abbastanza «grandi», i quali abbiano nella intera questione il loro stesso ruolo; si arriverebbe con ciò ad un enunciato completamente invariantivo (ma soltanto in apparenza più significativo).

Notiamo inoltre che i sistemi $|X_1|, |X_2|, \cdots, |X_{d-1}|$ da noi adoperati sono particolari sistemi «ampi» nel senso di Kodaira [15] e che l'enunciato del Teorema di Riemann–Roch che compare nella nostra trattazione è analogo (sebbene non del tutto identico) a quello assegnato da Hodge in [3] [16].

4. *Osservazioni sulle sovrabbondanze delle serie lineari appartenenti ad una curva algebrica irriducibile e priva di punti multipli.*

Supponiamo che V_d sia una curva V_1, e sopra di essa consideriamo la serie lineare completa $|D|$ individuata da un suo gruppo D di punti (effettivo o virtuale).

Essendo ora $d = 1$, la (1_1) del n. 1 assume la forma

$$(1_4) \qquad \dim|D| = \delta(D) + j|D| + s|D|.$$

(14) Per $d = 2$ si ha

$$s|D| = \text{def}|D + X_1|\cdot V_1,$$

ove $\text{def}|D + X_1|\cdot V_1$ indica la deficienza di una serie lineare effettiva sopra una curva V_1, ed è per sua natura non negativa. Si ricava così $s|D| \geq 0$, e si ritrova il classico teorema di Riemann–Roch relativo ad una superficie. Com'è noto per $d > 2$ la sovrabbondanza $s|D|$ può essere anche negativa.

(15) Cfr. ad esempio [4], p. 89; oppure [6], Nota I, n. 1.

(16) I due enunciati coincidono, qualora i $d-1$ sistemi ausiliari $|X_1|, |X_2|, \cdots, X_{d-1}|$ che figurano in entrambi vengano assunti abbastanza grandi.

La dimensione virtuale del gruppo D è data da

$$\delta(D) = p_a(D) - p_a(V_1) + 1 \quad (24). \tag{24}$$

Il genere aritmetico $p_a(V_1)$ è l'ordinario genere della curva (che indicheremo con p) mentre il genere aritmetico del gruppo D, nel caso che questo gruppo sia effettivo e risulti composto di $n(D)$ punti, è dato da

$$p_a(D) = n(D) - 1 \quad (25). \tag{34}$$

Supponiamo ora che il gruppo D sia virtuale (non effettivo); esso può sempre rappresentarsi come differenza di due gruppi effettivi A e B, ($D = A - B$) privi di punti comuni, ed il suo genere aritmetico virtuale è definito *formalmente* dalla relazione

$$p_a(D) = p_a(A) - p_a(B) - 1 \quad (26) \tag{44}$$

quindi

$$p_a(D) = n(A) - n(B) - 1.$$

Se definiamo ora *formalmente* l'ordine di un gruppo *virtuale* D con la relazione

$$n(D) = p_a(D) + 1$$

(che sappiamo già valida quanto D è effettivo) possiamo dire che l'ordine di un gruppo D differenza di due gruppi effettivi A e B ($D = A - B$), è dato in ogni caso dalla relazione

$$n(D) = n(A) - n(B).$$

E si noti che questa relazione lega gli ordini di tre gruppi A, B, $D = A - B$, indipendentemente dal fatto che A e B siano effettivi, perché i rispettivi generi aritmetici virtuali soddisfano sempre la (4_4).

Dopodiché, riprendiamo in esame le relazioni (1_4), (2_4), (3_4).

Si ha ovviamente

$$\delta(D) = n(D) - p$$

$$\dim|D| = n(D) - p + j|D| + s|D|.$$

Se la serie lineare $|D|$ è *effettiva* si ha

$$\dim|D| = n(D) - p + j|D|$$

(Teorema di Riemann–Roch relativo alle curve), e di conseguenza

$$s|D| = 0,$$

cioè *la sovrabbondanza di una serie lineare effettiva è sempre nulla* (proprietà, questa, da ritenersi nota e da noi usata – oltre che al termine del paragrafo precedente – anche nel lavoro [6]).

Se invece

$$\dim|D| = -1$$

la serie $|D|$ è *virtuale* e *la sovrabbondanza* $s|D|$ *potrebbe essere diversa da zero.*

(17) Si tenga presente la definizione di dimensione virtuale (secondo Severi), ricordata nel n. 1, precisamente nella nota (1) a piè di pagina.

(18) Cfr. ad esempio SEVERI [8], n. 15 e seguenti.

(19) Vedi ancora SEVERI [8], n. 15 e seguenti.

Si vede facilmente che *le sovrabbondanze di due serie lineari* $|D|$ e $|K-D|$ (effettive o virtuali), *residue l'una dell'altra rispetto alla serie canonica* $|K|$, *risultano sempre opposte fra di loro* [20].

Infatti, poiché

$$j|D| = \dim|K-D| + 1,$$

$$j|K-D| = \dim|D| + 1,$$

$$n(K-D) = n(K) - n(D) = (2p-2) - n(D),$$

si ha

$$\dim|D| = n(D) - p + (\dim|K-D| + 1) + s|D|, \tag{5_4}$$

$$\dim|K-D| = (2p-2-n(D)) - p + (\dim|D| + 1) + s|K-D|,$$

e sommando membro a membro si deduce appunto che

$$s|D| = -s|K-D|.$$

In particolare, *se è nulla la sovrabbondanza di una delle due serie* residue $|D|$ e $|K-D|$ (e ciò succede ad esempio quando una delle due serie è effettiva) *allora è nulla anche la sovrabbondanza dell'altra serie* (indipendentemente dal fatto che questa sia effettiva o no).

Se le due serie $|D|$ e $|K-D|$ sono entrambe virtuali, si ha

$$\dim|D| = \dim|K-D| = -1$$

e dalla (5_4) si ricava

$$s|D| = p - n(D) - 1.$$

5. Diamo ora, con i metodi della Geometria algebrica classica, una breve dimostrazione del Lemma di Enriques-Severi-Zariski.

Conduciamo per una V_d, irriducibile e priva di punti multipli, $r-d$ forme *generiche* $F_1, F_2, \cdots, F_{r-d}$ dello spazio ambiente S_r $(2 \leq d < r-1)$, aventi ordini così elevati che la loro ulteriore intersezione V'_d risulti irriducibile ed intersechi V_d secondo una varietà D, a $d-1$ dimensioni, pure irriducibile.

Un noto Restsatz di Severi assicura che, se anche V_d è priva di punti multipli, *le forme* A^l *di un medesimo ordine l passanti per* V'_d *e non per* V_d (che Severi chiama subaggiunte d'ordine l di V_d) *tagliano su* V_d fuori di D *il sistema completo* $|lE-D|$ (ove come al solito E indica la sezione di V_d con un generico iperpiano S_{r-1}) [21]. Viceversa – come abbiamo osservato in un precedente lavoro – *se il sistema* $|lE-D|$ *è effettivo esso può essere segato su* V_d *dalle sue subaggiunte d'ordine* l [22]; *di conseguenza, se* U *è un'ipersu-*

(20) Questa proprietà rientra nella relazione più generale

$$s|D| = (-1)^d s|K-D|$$

che lega due sistemi lineari di una V_d (di dimensione qualsiasi) residui l'uno dell'altro rispetto al sistema canonico $|K|$ di V_d. Cfr. [6], Nota II, nn. 4, 5.

(21) Cfr. SEVERI [7], n. 6, 11. In verità ivi si trova soltanto la dimostrazione relativa al caso che V_d e V'_d siano due curve, ma – come lo stesso Severi ha osservato più volte – la dimostrazione si estende alle varietà di dimensione superiore con semplici cambiamenti di linguaggio.

(22) Cfr. [5], p. 27.

perficie pura ed effettiva (priva di componenti multiple) tracciata su V_d *ed il sistema* $|lE - D - U|$ *esiste effettivo, il sistema stesso può essere segato su* V_d *dalle sue subaggiunte d'ordine* l *passanti per* U.

Vale la pena di notare che il Restsatz di Severi rimane valido anche lasciando cadere l'ipotesi che V'_d sia irriducibile e priva di punti multipli: *basta che* V'_d *sia pura e priva di parti multiple* [23]; lo stesso dicasi per l'osservazione che inverte il Restsatz [24].

Consideriamo ora su V_d un sistema lineare completo $|T|$ individuato da un'ipersuperficie T virtuale (in particolare effettiva ed eventualmente riducibile, ma priva di componenti multiple; tra le ipersuperficie effettive ammettiamo, come al solito, anche lo *zero* dell'equivalenza ipersuperficiale).

Sia $|lE|$ un multiplo delle sezioni iperpiane di V_d così elevato che la generica ipersuperficie U del sistema

$$|U| = |lE - D - T|$$

risulti effettiva ed irriducibile [25]. Si avrà

$$|T| = |lE - D - U|.$$

Sia E_m l'ipersuperficie segata su V_d da una generica forma d'ordine m dello spazio ambiente S_r, forma che indichiamo con F_{r-d+1}.

Il lemma di Enriques–Severi–Zariski afferma che *esiste un intero* $m(T)$ dipendente da $|T|$, tale che per $m \geq m(T)$ *il sistema* $|T|$ *taglia sopra* E_m *un sistema lineare completo.*

Noi proveremo che questo numero $m(T)$ può essere scelto uguale ad $l + 1$; in altre parole verificheremo che per $l < m$ il sistema

$$|T| \cdot E_m = |lE - D - U| \cdot E_m,$$

tagliato su E_m dal sistema $|T|$ di V_d, è certamente completo.

A tale scopo consideriamo insieme ad E_m l'ipersuperficie E'_m che la forma F_{r-d+1} sega sopra V'_d.

E_m ed E'_m sono complementari, nel senso che formano complessivamente l'intersezione completa di $r - d + 1$ forme di S_r (precisamente di $F_1, F_2, \cdots, F_{r-d}, F_{r-d+1}$); la varietà comune ad E_m ed E'_m è quella che F_{r-d+1} stacca su D, cioè la varietà $D \cdot E_m$. Pertanto le forme d'ordine l passanti per E'_m e non per E_m, se esistono, tagliano su E_m il sistema effettivo completo

(23) Infatti, generalizzando la dimostrazione data in [7] da SEVERI nel caso che le varietà V_d e V'_d siano due curve C e C', ci si accorge che la varietà V'_d interviene soltanto quando si vuol provare che una certa forma H_0 (passante per la varietà Γ_{d-1} segata su $V_d + V'_d$ da una forma f_0 generica rispetto a V'_d) si può esprimere come combinazione lineare di f_0 e delle $r - d$ forme $F_1, \cdots, F_{r-d}$ che s'intersecano lungo $V_d + V'_d$. Ora la cosa risulta ancora possibile se Γ_{d-1} è pura e priva di parti multiple; basta pertanto supporre che sia tale anche V'_d.

(24) Infatti la dimostrazione data in [5] regge, senza modifiche di sorta, anche introducendo le predette ipotesi più ampie di quelle originali.

(25) Tale scelta è possibile; cfr. ad esempio SEVERI [9], p. 78.

$\| lE - D | \cdot E_m |$. Viceversa, applicando ad E_m l'osservazione che inverte il Restsatz di Severi, si può affermare che, qualora il sistema

$$\| lE - D - U | \cdot E_m | = \| lE - D | \cdot E_m - | U | \cdot E_m |$$

esista *effettivo*, esso può ritenersi segato su E_m da un sistema di forme Φ^l d'ordine l passanti per E'_m e per la varietà $U \cdot E_m$ (intersezione di U con E_m).

Ora si noti che E'_m ed $U \cdot E_m$ sono tagliate rispettivamente sulle varietà *irriducibili* V'_d ed U dalla forma F_{r-d+1} d'ordine m che stacca E_m su V_d; laonde le suindicate forme Φ^l, dovendo passare per E'_m e per $U \cdot E_m$, ed avendo ordine $l < m$, sono obbligate a contenere V'_d ed U, cioè tagliano su V_d il sistema completo $| T | = | lE - D - U |$. Resta così provato che per $l < m$ il sistema completo $\| T | \cdot E_m |$ tracciato su E_m, qualora esista effettivo, viene tagliato dal sistema completo $| T |$ di V_d. Naturalmente se $\| T | \cdot E_m |$ non è effettivo non può esserlo nemmeno il sistema $| T |$ [26].

Si conclude così che, per $l < m$, il sistema completo $| T |$ (effettivo o virtuale) taglia su E_m un sistema lineare completo [27].

BIBLIOGRAFIA.

[1] F. ENRIQUES, *Le superficie algebriche*, Zanichelli, Bologna, 1948.

[2] F. HIRZEBRUCH, *Neue Topologische Methoden in der Algebraischen Geometrie*, « Ergebnisse der Mathematik, Neue Folge », *9* (1956).

[3] W. V. D. HODGE, *A note on the Riemann-Roch theorem*, « Journal London Math. Soc. », *30* (1955).

[4] K. KODAIRA, *Some results in the trascendental theory of algebraic varieties*, « Annals of Mathem. », *59* (1954).

[5] E. MARCHIONNA, *Sulle superficie aritmeticamente regolari ed aritmeticamente normali*. « Rend. Acc. Lincei », vol. XXIV, fasc. 1, p. 24 (1958).

[6] E. MARCHIONNA, *Sul teorema di Riemann-Roch relativo alle varietà algebriche* (3 Note), « Rend. Acc. Lincei », vol. XXIV, fasc. 4, p. 396; fasc. 5, p. 500; fasc. 6, p. 672 (1958).

[7] F. SEVERI, *Su alcune questioni di postulazione*, « Rend. Circ. Matem. di Palermo », t. XVII (1903).

[8] F. SEVERI, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche* (2ª memoria), « Annali di Matematica » (4), *32* (1951).

[9] F. SEVERI, *Il teorema di Riemann-Roch per le curve, superficie e varietà. Questioni collegate*, « Ergebnisse der Mathematik, Neue Folge », *17* (1958).

[10] D. C. SPENCER, *Cohomologie and the Riemann-Roch theorem*, « Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. », *39* (1953).

[11] O. ZARISKI, *Complete linear systems on normal varieties and a generalization of a lemma of Enriques-Severi*, « Annals of Mathem. », *55* (1952).

(26) Lasciando cadere l'ipotesi $l < m$, può accadere che – pur ammettendo virtuale il sistema $| T |$ di V_d – il sistema lineare completo $\| T | \cdot E_m |$, individuato su E_m dalla varietà virtuale $T \cdot E_m$, risulti effettivo.

(27) Nella dimostrazione abbiamo supposto V_d immersa in uno spazio S_r, di dimensione $r > d + 1$, e la cosa appare del tutto lecita, perché se V_d è una forma di S_{d+1}, basta pensarla immersa in uno spazio S_r più ampio contenente S_{d+1} (senza che per questo il nostro ragionamento perda validità). Tuttavia in questo caso il risultato potrebbe ottenersi molto più rapidamente, tenendo conto che tanto V_d quanto E_m sono aritmeticamente normali.

Geometria. — *Isomorfismo tra piani di traslazione di Marshall Hall.* Nota (*) di GIANFRANCO PANELLA, presentata dal Socio E. BOMPIANI.

In lavori recenti (1) mi sono occupato dell'isomorfismo tra piani di traslazione sopra un quasicorpo di M. Hall.

Nell'approfondire ulteriormente questo problema ho stabilito, tra l'altro, due nuovi teoremi che enuncio in questa Nota e che mi riservo di dimostrare in un lavoro di prossima pubblicazione.

Per l'esatta interpretazione di essi richiamo, al n. 1, alcune nozioni essenziali.

1. Si dice quasicorpo di Hall J (F , b , c), relativo al campo F e al polinomio $x^2 - bx - c$ con coefficienti in F e irriducibile su F, l'insieme i cui elementi sono le coppie ordinate (x_1 , x_2) di elementi di F, sulle quali si operi mediante le seguenti regole di somma e di prodotto:

α) *definizione di somma*

$$(x_1 , x_2) + (y_1 , y_2) = (x_1 + y_1 , x_2 + y_2);$$

β) *definizione di prodotto*

$$(x_1 , x_2)\ (y_1 , 0) = (x_1 y_1 , x_2 y_1)$$

$$(x_1 , x_2)(y_1 , y_2) = \{ y_1 x_1 - (y_1^2 - by_1 - c)\, y_2^{-1} x_2 , y_2 x_1 + (b - y_1) x_2 \} , \quad (y_2 \neq 0).$$

A un quasicorpo di Hall J (F , b , c) rimane associato un piano di traslazione S (F , b , c), ossia un piano grafico affine irriducibile nel quale esistono tutte le omologie speciali aventi per asse la retta impropria (traslazioni).

Due quasicorpi di Hall J (F , b , c) e J (F , b', c') si dicono geometricamente isomorfi se, e solamente se, in S (F , b , c) si può determinare un riferimento che generi un quasicorpo isomorfo a J (F , b', c').

Si consideri, infine, il campo F e i due polinomi $f(x) = x^2 - bx - c$ e $g(x) = x^2 - b' x - c'$ aventi coefficienti in F e irriducibili su F: siano $\overline{F}$ [$\overline{F}'$] il campo estensione algebrica di F mediante il polinomio $f(x)$ [$g(x)$] e $S_3(F)$, $S_3(\overline{F})$, $S_3(\overline{F}')$ gli spazi lineari tridimensionali sopra i campi F , $\overline{F}$, $\overline{F}'$ rispettivamente. Dette (x_1 , x_2 , x_3 , x_4) le coordinate proiettive omogenee di un punto di $S_3(F)$, sia Q la quadrica di $S_3(F)$ di equazione $x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0$ e siano K e K′ le congruenze lineari ellittiche di rette di $S_3(F)$ che hanno per

(*) Pervenuta all'Accademia l'1 ottobre 1958.

(1) *Lo* S_4 *lineare affine come piano sopra un quasicorpo, in relazione alla proposizione configurazionale* T_2', « Rivista Mat. Univ. Parma », *8* (1957); *Un insieme di piani di traslazione isomorfi*, Convegno Internazionale Reticoli e Geometrie Proiettive, Palermo–Messina (1957).

assi, rispettivamente, le rette $r_1 \equiv x_3 - k_1 x_1 = x_4 - k_1 x_2 = 0$, $r_2 \equiv x_3 - k_2 x_1 = x_4 - k_2 x_2 = 0$ $[f(k_i) = 0 \ , \ i = 1, 2]$ di $S_3(\bar{F})$ e $r'_1 \equiv x_3 - h_1 x_1 = x_4 - h_1 x_2 = 0$, $r'_2 = x_3 - h_2 x_1 = x_4 - h_2 x_2 = 0$ $[g(h_i) = 0 \ , \ i = 1, 2]$ di $S_3(\bar{F}')$. Ebbene:

I polinomi $f(x)$ e $g(x)$ si dicono proiettivamente equivalenti se, e solamente se, esiste una collineazione di $S_3(F)$ in sé la quale, mantenendo fissa la quadrica Q, trasforma la congruenza K nella congruenza K'.

2. Un primo problema che si presenta, considerando l'insieme che ha per elementi i quasicorpi di Hall, consiste nella determinazione delle classi in cui tale insieme è suddiviso dalla relazione di equivalenza di isomorfismo geometrico: la totalità dei quasicorpi di Hall appartenenti a una classe individua lo stesso piano di traslazione. In questo ordine di idee ho stabilito [2] che:

Se il campo F *è isomorfo a un campo di Galois di caratteristica diversa da due, oppure se* F *è isomorfo al campo reale, due qualsiansi quasicorpi di Hall relativi al campo* F *sono geometricamente isomorfi.*

Mi sono posto, successivamente, il problema di determinare condizioni necessarie e sufficienti per l'isomorfismo geometrico di due quasicorpi di Hall. A questo riguardo ho recentemente dimostrato il seguente:

TEOREMA I. – *Condizione sufficiente perché due quasicorpi di Hall* $J(F, b, c)$ *e* $J(F, b', c')$ *siano geometricamente isomorfi è che i polinomi* $x^2 - bx - c$ *e* $x^2 - b'x - c'$ *che li definiscono siano proiettivamente equivalenti; anzi, la condizione precedente è anche necessaria se il campo* F *ha caratteristica diversa da due.*

Un secondo interessante problema riguarda la determinazione del gruppo $G(F, b, c)$ degli automorfismi affini (collineazioni in sé che lasciano fissa la retta impropria) del piano di Hall $S(F, b, c)$; il gruppo $G(F, b, c)$ contiene come sottogruppo il gruppo delle omologie speciali aventi per asse la retta impropria, ma tale sottogruppo risulta proprio. Infatti ho dimostrato il

TEOREMA II. – *Il gruppo degli automorfismi affini* $G(F, b, c)$, *del piano di Hall* $S(F, b, c)$ *contiene un sottogruppo* $G'(F, b, c)$ *isomorfo al gruppo, delle collineazioni dello* $S_4(F)$ (*spazio a quattro dimensioni lineare sopra il campo* F) *che lasciano fissa una determinata congruenza lineare ellittica di rette appartenente a un iperpiano di* $S_4(F)$ *e una quadrica rigata un cui regolo appartiene alla congruenza; anzi, se* F *ha caratteristica diversa da due,* $G'(F, b, c)$ *coincide con* $G(F, b, c)$.

(2) Si confronti il secondo dei lavori citati nella nota (1).

Meccanica. — *Sul comportamento critico degli alberi rotanti aventi massa ed elasticità distribuite.* Nota (*) di Ario Romiti, presentata dal Corrisp. C. Ferrari.

1. – Introduzione.

Lo studio delle velocità critiche degli alberi rotanti – cui diede inizio Rankine nel 1869 - è stato per lungo tempo condotto nell'ipotesi che la deformata ruotasse attorno all'asse dei sopporti con la velocità angolare (costante) dell'estremo collegato al motore.

In tal modo ogni elemento risultava sottoposto ad una forza rotante proporzionale – secondo una costante – alla freccia elastica.

Questa ipotesi, che in sostanza trascurava gli effetti dell'accelerazione complementare, non spiegava tra l'altro come un albero potesse ruotare senza rompersi a velocità superiori alla prima critica.

Fu A. Foeppl, studiando il caso di un disco rotante collegato eccentricamente ad un albero, di cui venivano considerate concentrate sia la massa che l'elasticità, ad introdurre l'idea che l'asse di istantanea rotazione del disco non potesse essere ritenuto sempre coincidente con l'asse dei sopporti, ma dovesse essere invece determinato dalle equazioni del moto.

In questo modo, sparivano naturalmente anche le contraddizioni con l'esperienza precedentemente emergenti.

Tutte le successive applicazioni del metodo di Foeppl sono state fatte ancora per il caso del disco con parametri concentrati; mentre coloro che hanno affrontato i problemi relativi agli alberi con massa ed elasticità distribuita, hanno continuato a seguire – almeno formalmente – la vecchia via, con risultati che, per quello che riguarda il valore delle velocità critiche principali, sono in buon accordo con l'esperienza.

Ciò in quanto le equazioni che vengono scritte coincidono con quelle delle frequenze proprie di vibrazione dell'albero e si può dimostrare che tali frequenze coincidono sempre con quelle corrispondenti alle velocità critiche principali dell'albero, quando esistano.

Poiché però il moto perturbato degli alberi risulta avvenire in modo diverso da quello che si desume dall'ipotesi di Rankine, e questa porta a considerare delle velocità critiche secondarie inesistenti (Chree, Brunelli), sembra opportuno affrontare, anche per l'albero a parametri distribuiti, il calcolo delle velocità critiche in assenza di ipotesi arbitrarie. Si potrà così riconoscerne le vere cause ed i diversi modi di manifestarsi.

L'impostazione rigorosa del problema porta subito ad osservare come, per un albero ideale privo di qualsiasi dissimmetria elastica o di massa, non esista alcuna velocità « critica ».

(*) Pervenuta all'Accademia il 2 agosto 1958.

Si sono quindi esaminati gli effetti degli scostamenti – in genere piccoli – dalle condizioni ideali, che possono aversi per ragioni costruttive.

Sono state così determinate – senza tener conto di azioni smorzanti, che non alterano sensibilmente questi risultati, e trascurando pure gli effetti della torsione dell'albero – le velocità angolari per cui ha luogo un fenomeno di risonanza, cioè la configurazione di regime presenta freccie infinite, e le velocità per cui si ha instabilità, ossia impossibilità di raggiungere un regime.

Le espressioni che si sono ricavate descrivono pure il transitorio nell'intervallo d'instabilità.

I calcoli sono stati fatti prendendo in esame un albero su due sopporti, avente massa uniformemente distribuita e rotante a velocità tenuta costante dal motore ad un estremo, ed in assenza di azioni eccitatrici esterne.

2. – COMPORTAMENTO DELL'ALBERO IDEALE.

Sia m la massa per unità di lunghezza dell'albero, $EJ = k$ la sua rigidezza flessionale, x l'ascissa misurata lungo l'asse dei sopporti coincidente con l'asse indeformato, u la freccia elastica. Le vibrazioni di un albero ideale (così come sopra definito), sono descritte dalla:

$$(1) \qquad -m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

valida sia per albero fermo, che in rotazione, quando si trascuri l'effetto delle coppie giroscopiche.

Tenendo conto di queste ultime, la frequenza della vibrazione non è più esattamente corrispondente alla frequenza propria dell'albero fermo, ma viene a dipendere, sia pure in piccola misura, anche dalla velocità angolare ω della rotazione; non sussistono però ugualmente velocità critiche.

Si chiami $\rho^2 m$ il momento d'inerzia assiale di massa, di un tronco di lunghezza unitaria dell'albero. Siano y e z le coordinate, misurate lungo due assi fissi normali ad x, del centro di una generica sezione.

Le variazioni del momento delle quantità di moto rispetto agli assi fissi y e z valgono rispettivamente:

$$(2) \qquad \begin{cases} m\rho^2\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\omega\dfrac{\partial y}{\partial x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial M_y}{\partial x} \\ m\rho^2\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\omega\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial y}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial M_z}{\partial x} \end{cases}$$

ove a secondo membro sono indicate le componenti dei momenti giroscopici per unità di lunghezza.

Si ha pertanto:

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{k}{m}\dfrac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \rho^2\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}\left[\omega\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial y}{\partial x}\right] \\ \dfrac{k}{m}\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^4} = -\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \rho^2\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}\left[\omega\dfrac{\partial y}{\partial x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial z}{\partial x}\right] \end{cases}$$

da cui, chiamando $z + iy = u$, e sommando la prima delle (3), moltiplicata per l'operatore i, con la seconda:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(u + \frac{1}{2}\rho^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + i\rho^2 \omega \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{k}{m} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0. \tag{4}$$

Si può osservare che è possibile costruire una soluzione soddisfacente alle condizioni iniziali ed al contorno mediante funzioni del tipo:

$$u = Ce^{ipt} e^{qx}.$$

Sostituendo nella (4) si ricava:

$$q = \pm p\rho \sqrt{\frac{m}{k}} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{\omega}{p} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{\omega}{p}\right)^2 + \frac{k}{mp^2\rho^4}}} \tag{5}$$

ove $q = \pm \sqrt{a \pm b}$, con $b > a$, ha sempre due radici reali e due immaginarie coniugate.

Dalle condizioni ai limiti si ricava il valore di q, da cui si ha immediatamente p.

Ad esempio, per un albero di lunghezza l appoggiato agli estremi, si ha: $l\sqrt{b - a} = n\pi$, da cui:

$$p = \frac{-\omega \pm \sqrt{\omega^2 - 2\frac{k}{m}\frac{n^2\pi^2}{\rho^2 l^2}\left(1 - \frac{2l^2}{n^2\pi^2\rho^2}\right)}}{1 - \frac{2l^2}{\rho^2 n^2 \pi^2}} \tag{6}$$

essendo n un intero qualsiasi.

Poiché è $\rho \ll l$, p è sempre reale, e di conseguenza non esistono valori di ω per cui si verifichi instabilità.

Daltra parte, non essendovi azioni eccitatrici, non vi è neppure risonanza.

3. – Comportamento dell'albero reale.

Nel caso più generale l'albero presenta, in ogni sezione, rigidezza flessionale non uniforme e baricentro non coincidente con il centro dell'ellisse centrale d'inerzia geometrica.

In fig. 1 è rappresentata, proiettata su un piano normale all'asse x, la sezione dell'albero ottenuta in corrispondenza ad una ascissa generica con un piano perpendicolare alla tangente alla linea d'asse deformata.

A meno di termini di grado superiore al primo nei coseni direttori della deformata secondo y e z, possiamo ritenere coincidenti le linee tracciate sulla sezione e le loro proiezioni.

Se ora ω è la velocità angolare di cui l'albero è dotato in una sua sezione d'estremità, tale è la velocità con cui ruota il piano osculatore alla linea di asse in corrispondenza ad essa.

In ogni altra sezione, la velocità di rotazione del piano osculatore deve essere la stessa, se è nulla o costante la torsione tra le due sezioni; se vi fosse

interposta una coppia torcente pulsante tale velocità sarebbe costante in media per ogni giro.

La velocità di rotazione del piano osculatore coincide d'altronde, nella nostra approssimazione, con la velocità angolare assoluta della sezione proiettata sul piano yz; ed è appunto questa velocità che possiamo ritenere costante.

Il moto della sezione in definitiva può ritenersi composto di una rotazione con velocità angolare ω attorno ad un suo punto, ad esempio il suo centro geometrico, più una traslazione con velocità pari a quella, variabile in generale da istante a istante, del punto stesso. Velocità e traiettoria di questo punto sono oggetto del calcolo che segue.

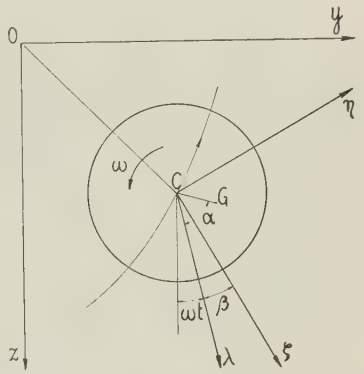


Fig. 1.

Sia (ved. fig. 1) λ un asse solidale con la sezione di figura, ed ωt l'angolo da esso formato con l'asse fisso z.

Siano η ed ζ gli assi dell'ellisse centrale d'inerzia geometrica, e G il centro di gravità del tronco elementare che si considera, avente eccentricità ε, rispetto al centro dell'ellisse.

Se M_η ed M_ζ sono le componenti dei momenti delle forze d'inerzia cui è soggetto tale tronco, e k_η, k_ζ le rigidezze flessionali secondo i due assi, si ha:

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{M_\eta}{k_\zeta}\cos(\omega t+\beta) + \dfrac{M_\zeta}{k_\eta}\operatorname{sen}(\omega t+\beta) \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{M_\eta}{k_\zeta}\operatorname{sen}(\omega t+\beta) - \dfrac{M_\zeta}{k_\eta}\cos(\omega t+\beta). \end{cases}$$

Sostituendo ad M_η, M_ζ le loro espressioni in funzione delle componenti M_y, M_z dei momenti rispetto agli assi fissi, e risolvendo rispetto a queste ultime, si ottiene:

$$(8)\qquad \begin{cases} M_z = -\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\left[\dfrac{k_\eta+k_\zeta}{2} + \dfrac{k_\eta-k_\zeta}{2}\cos 2(\omega t+\beta)\right] + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\dfrac{k_\eta-k_\zeta}{2}\operatorname{sen} 2(\omega t+\beta) \\ M_y = -\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left[\dfrac{k_\eta+k_\zeta}{2} - \dfrac{k_\eta-k_\zeta}{2}\cos 2(\omega t+\beta)\right] - \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,\dfrac{k_\eta-k_\zeta}{2}\operatorname{sen} 2(\omega t+\beta). \end{cases}$$

Se si trascura l'azione delle coppie giroscopiche, le equazioni dell'equilibrio dinamico per un tronco elementare dell'albero possono così scriversi:

$$(9)\qquad \begin{cases} m\left[\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \omega^2\varepsilon\operatorname{sen}(\omega t+\alpha)\right] = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left[-k\,\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \right. \\ \left. - \Delta k\,\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cos 2(\omega t+\beta) + \Delta k\,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\operatorname{sen} 2(\omega t+\beta)\right] \\ m\left[\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \omega^2\varepsilon\cos(\omega t+\alpha)\right] - mg = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left[-k\,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + \Delta k\,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos 2(\omega t+\beta) + \Delta k\,\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\operatorname{sen} 2(\omega t+\beta)\right] \end{cases}$$

avendo supposto l'asse z verticale, e chiamato $k = \frac{k_\eta + k_\zeta}{2}$ e $\Delta k = \frac{k_\eta - k_\zeta}{2}$.

Nel caso generale, i fattori $\varepsilon, k, \Delta k, \alpha, \beta$ saranno tutti funzioni dell'ascissa x.

Il sistema (9) può esser scritto in forma più compatta ponendo:

$$u = z + iy \; ; \; v = z - iy \; ; \; \tau = i\omega t \; ; \; \gamma = g/\omega^2 \; ; \; \chi = k/m\omega^2 \; ; \; \Delta\chi = \Delta k/m\omega^2.$$

Si ricava:

$$(10) \qquad \begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\chi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Delta\chi \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} e^{2(\tau+i\beta)}\right] = \gamma + \varepsilon e^{\tau+i\alpha} \\ -\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\chi \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \Delta\chi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-2(\tau+i\beta)}\right] = \gamma + \varepsilon e^{-(\tau+i\alpha)}. \end{cases}$$

4. – Albero con dissimmetria elastica costante.

Esaminiamo il caso in cui $\chi, \Delta\chi, \beta$ sono costanti; β può porsi allora addirittura uguale a zero.

La (10) può scriversi:

$$(11) \qquad \begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \chi \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \Delta\chi \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} e^{2\tau} = \gamma + \varepsilon e^{\tau+i\alpha} \\ -\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + \chi \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \Delta\chi \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} e^{-2\tau} = \gamma + \varepsilon e^{-(\tau+i\alpha)}. \end{cases}$$

Studiamo per ora il sistema (11) reso omogeneo, ciò che corrisponde al caso in cui siano trascurabili le azioni della gravità e della eccentricità di massa.

Eliminando la v tra le due equazioni, si ha:

$$(12) \qquad -\frac{\partial^4 u}{\partial \tau^4} + \chi \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\left[-4u + 2\chi \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right] - 4\chi \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - [\chi^2 - \Delta\chi^2] \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} = 0.$$

Si può verificare che una soluzione ottenuta per separazione di variabili può sempre soddisfare alle condizioni iniziali ed al contorno.

Chiamando $u = \varphi(\tau) \cdot \psi(x)$, la (12) può risolversi ponendo:

$$(13) \qquad \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} = \nu\psi \qquad (\nu = \text{costante}),$$

da cui:

$$(14) \qquad \varphi^{IV} - 4\varphi''' + (4 - 2\chi\nu)\varphi'' + 4\chi\nu\varphi' + [\chi^2 - \Delta\chi^2]\nu^2\varphi = 0.$$

Le radici dell'equazione caratteristica della (12) valgono:

$$(15) \qquad r = 1 \pm \sqrt{1 + \chi\nu \pm \sqrt{4\chi\nu + \Delta\chi^2\nu^2}}$$

$$(r = 1 \pm p_1 \quad ; \quad 1 \pm p_2).$$

Analoga espressione può essere ricavata per la funzione $v = \bar{\varphi}(\tau) \cdot \psi(x)$, ove $\bar{\varphi}(\tau)$ è il coniugato di $\varphi(\tau)$.

Sostituendo nelle (11) rese omogenee i valori trovati, si ricava una relazione tra le costanti d'integrazione, che ne riduce a due il numero.

Precisamente, essendo:

$$(16) \qquad \varphi(\tau) = A_1 e^{(1+p_1)\tau} + A_2 e^{(1-p_1)\tau} + A_3 e^{(1+p_2)\tau} A_4 e^{(1-p_2)\tau}$$

si ricava:

$$(17) \qquad \frac{A_1}{A_2} = \frac{\Delta\chi\,\nu}{-(1+p_1)^2+\chi\nu} \qquad \frac{A_3}{A_4} = \frac{\Delta\chi\,\nu}{-(1+p_2)^2+\chi\nu}\,.$$

La funzione $\psi(x)$ può a sua volta ottenersi risolvendo la (13):

$$(18) \qquad \psi(x) = B_1 \operatorname{sen} \sqrt[4]{\nu}\,x + B_2 \cos \sqrt[4]{\nu}\,x + B_3 \operatorname{senh} \sqrt[4]{\nu}\,x + B_4 \cosh \sqrt[4]{\nu}\,x$$

$$(B_1 = 1).$$

Le quattro condizioni ai limiti, date dall'annullarsi della funzione e della sua derivata prima (o seconda, in dipendenza delle condizioni di vincolo), in corrispondenza ai sopporti, forniscono quattro equazioni omogenee, soddisfatte per un infinito numero di radici reali e distinte di ν, per ognuna delle quali rimangono determinate le relative costanti B.

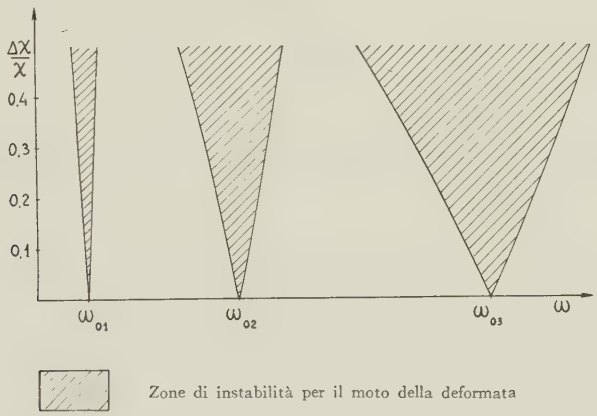


Fig. 2.

L'espressione della freccia u può pertanto scriversi, indicando con s_j le radici quarte di ν:

$$(19) \qquad u = \Sigma_\nu \sum_1^4{}_i\, A_i\, e^{r_i \tau} \sum_1^4{}_j\, B_j\, e^{s_j x}\,.$$

essendo le A funzioni di ν obbedienti alle (17).

Si dispone così di due serie di costanti A (ν), necessarie e sufficienti a definire posizione e velocità iniziali dei punti della linea d'asse dell'albero.

La soluzione ottenuta risulta instabile se non tutte le r sono reali, e perciò, dalla (15), se: $|1-\chi\nu| < |\Delta\chi|\,\nu$, ossia anche:

$$(20) \qquad \begin{cases} \omega^2 > \dfrac{\nu}{m} k_\zeta = \omega_{o\zeta}^2 \\ \omega^2 < \dfrac{\nu}{m} k_\eta = \omega_{o\eta}^2\,. \end{cases}$$

Avendo chiamato $\omega_{o\zeta}$, $\omega_{o\eta}$ le pulsazioni proprie corrispondenti a rigidezze uniformi pari a k_ζ e k_η rispettivamente ($k_\zeta < k_\eta$).

In fig. 2 sono rappresentati – tratteggiati – i campi di instabilità nel diagramma $\Delta k/k$, ω, nel caso di albero appoggiato.

5. – Effetto della gravità.

Tenendo conto dell'effetto della gravità sopra un albero con dissimmetria elastica uniforme, si può osservare che le (11) ammettono gli integrali particolari:

$$(21) \qquad \begin{cases} u = a(x) + b(x)\, e^{2\tau} \\ v = a(x) + b(x)\, e^{-2\tau} \end{cases}$$

ove le funzioni $a(x)$ e $b(x)$ devono soddisfare le:

$$(22) \qquad \begin{cases} -4b + \chi b^{IV} - \Delta\chi\, a^{IV} = 0 \\ \chi a^{IV} - \Delta\chi\, b^{IV} = \gamma \end{cases}$$

da cui:

$$(23) \qquad b = -\frac{1}{4}\frac{\Delta\chi}{\chi}\gamma + \sum_1^4{}_i A_i\, e^{m_i x}$$

$$(24) \qquad a = \frac{1}{24}\frac{\gamma}{\chi}x^4 + \frac{1}{6}B_1 x^3 + \frac{1}{2}B_2 x^2 + B_3 x + B_4 + \frac{\Delta\chi}{\chi}\sum_1^4{}_i A_i\, e^{m_i x}$$

ove

$$m^4 = -\frac{4\chi}{\chi^2 - \Delta\chi^2}\,.$$

Le otto costanti sono determinate mediante le condizioni ai limiti, che devono essere soddisfatte separatamente dalle funzioni $a(x)$ e $b(x)$. Si hanno così due sistemi non omogenei di quattro equazioni ciascuno.

Si ha risonanza allorché si annulla il determinante dei coefficienti delle A_i, ottenuto scrivendo le condizioni cui deve soddisfare la $b(x)$.

L'annullarsi di questo determinante fornirebbe, per $m = \sqrt[4]{1/\chi}$, le pulsazioni proprie dell'albero con rigidezza uniforme; le velocità angolari per cui si verifica risonanza sono perciò poco minori della metà delle corrispondenti pulsazioni proprie.

Ad esempio, per albero appoggiato ai due estremi si ha risonanza «gravitazionale» per:

$$(25) \qquad \omega = \frac{1}{2}\frac{n^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{(\Delta k/m)^2}{k/m}} \qquad (n \text{ intero qualsiasi}).$$

6. – Effetto dell'eccentricità di massa con valore e fase costante.

Consideriamo dapprima, sempre per albero con dissimmetria elastica uniforme, l'effetto di una eccentricità di massa di valore ε e fase α costanti.

Le (11) ammettono allora gli integrali particolari:

$$(26) \qquad \begin{cases} u = a(x)\, e^{\tau + i\alpha} + b(x)\, e^{\tau - i\alpha} \\ v = a(x)\, e^{-(\tau + i\alpha)} + b(x)\, e^{-(\tau - i\alpha)} \end{cases}$$

ove

$$(27)\qquad \begin{cases} -a + \chi a^{IV} - \Delta\chi\, b^{IV} = \varepsilon \\ -b + \chi b^{IV} - \Delta\chi\, a^{IV} = 0 . \end{cases}$$

Dal sistema (27) si ricava:

$$(28)\qquad b = \sum_1^4{}_i \left(A_i\, e^{p_i x} + B_i\, e^{q_i x}\right)$$

$$(29)\qquad a = -\varepsilon + \sum_1^4{}_i \left(A_i\, e^{p_i x} - B_i\, e^{q_i x}\right)$$

essendo $p^4 = 1/(\chi - \Delta\chi)$; $q^4 = 1/(\chi + \Delta\chi)$.

La soluzione vale pertanto:

$$(30)\qquad \begin{cases} u = e^{\tau}\left[-\varepsilon\, e^{i\alpha} + \cos\alpha \sum_1^4{}_i A'_i\, e^{p_i x} + \operatorname{sen}\alpha \sum_1^4{}_i B'_i\, e^{q_i x}\right] \\ v = e^{-\tau}\left[-\varepsilon\, e^{-i\alpha} + \cos\alpha \sum_1^4{}_i A'_i\, e^{p_i x} - \operatorname{sen}\alpha \sum_1^4{}_i B'_i\, e^{q_i x}\right] . \end{cases}$$

Le otto costanti d'integrazione possono essere subito calcolate imponendo che siano in ogni istante soddisfatte le condizioni ai limiti per le funzioni $ue^{-\tau} + ve^{\tau}$; $ue^{-\tau} - ve^{\tau}$.

I due sistemi che si ottengono, ciascuno di quattro equazioni non omogenee rispettivamente nelle incognite A_i e B_i, hanno sempre soluzioni finite eccetto che nel caso in cui il determinante dei coefficienti si annulla. Si ha allora risonanza: questo caso si verifica allorché la velocità angolare di rotazione dell'albero è uguale ad una delle pulsazioni proprie di cui l'albero stesso sarebbe dotato, se avesse rigidezza elastica uniforme pari alla massima k_η od alla minima k_ζ.

Qualora fosse $\alpha = 0$, od $\alpha = \pi/2$, ossia se l'eccentricità di massa avesse, rispetto ad assi solidali alla sezione, la stessa fase di uno degli assi dell'ellisse centrale geometrica d'inerzia, la risonanza potrebbe verificarsi solo in coincidenza con le pulsazioni proprie corrispondenti alla rigidezza secondo tale asse.

7. – Raffronto fra le diverse velocità critiche.

La soluzione generale delle equazioni (11), per esempio per la funzione u, è rappresentata dalla somma delle sue espressioni (19), (21) e (30). Si può subito rilevare come, per albero rotante a velocità costante, la velocità critica «gravitazionale» esista soltanto in presenza di dissimmetria elastica, e le ampiezze di vibrazione imputabili a tale causa siano proporzionali al termine $\gamma\,\Delta\chi/\chi$; mentre l'eccentricità di massa dà luogo a freccie proporzionali

ad ε, e le velocità critiche che origina sono indipendenti dalla dissimmetria elastica.

Paragonando le ampiezze, si può riconoscere come l'effetto dell'eccentricità sia assai superiore a quello della gravità, nella generalità dei casi.

Nella trattazione è stata trascurata la presenza degli attriti, anche in considerazione della scarsa conoscenza che si ha del modo secondo il quale si estrinsecano; si può comunque notare che, ammettendo l'esistenza di forze di attrito, di tipo viscoso, agenti su ogni elemento dell'albero, mentre le ampiezze teoricamente infinite dovute ai fenomeni di risonanza verrebbero smorzate, sussisterebbe sempre l'instabilità dovuta alla dissimmetria elastica.

Per dimostrare questo basta scrivere, in luogo delle equazioni (11), le:

$$(31)\qquad \begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{2ih}{\omega m}\frac{\partial u}{\partial \tau} + \chi\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \Delta\chi\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}e^{2\tau} = \gamma + \varepsilon e^{\tau + i\alpha} \\ -\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + \frac{2ih}{\omega m}\frac{\partial v}{\partial \tau} + \chi\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \Delta\chi\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}e^{-2\tau} = \gamma + \varepsilon e^{-(\tau + i\alpha)} \end{cases}$$

avendo chiamato $2h\frac{\partial y}{\partial t}$, $2h\frac{\partial z}{\partial t}$ le componenti secondo gli assi della forza smorzante per unità di lunghezza.

Con ragionamenti analoghi a quelli già svolti in assenza di attrito, e con gli stessi simboli delle (20), si ricava che si ha instabilità per:

$$(32)\qquad \begin{cases} \omega^2 > \sqrt{\frac{\nu}{m}k_\zeta - \frac{h^2}{m^2}} = \omega'_{o\zeta} \\ \omega^2 < \sqrt{\frac{\nu}{m}k_\eta - \frac{h^2}{m^2}} = \omega'_{o\eta} \end{cases}$$

ove $\omega'_{o\zeta}$, $\omega'_{o\eta}$ sono le pulsazioni proprie, calcolate tenendo conto dell'attrito, corrispondenti a rigidezze uniformi pari a k_ζ , k_η.

8. – Effetto di una distribuzione casuale di eccentricità di massa.

Ammettiamo ora per semplicità che l'albero sia dotato di rigidezza elastica uniforme.

ε ed α sono ora generiche funzioni di x (con le limitazioni $\varepsilon \ll l$, $0 < \alpha < 2\pi$).

Potremo allora scrivere, sviluppando in integrale di Fourier:

$$(33)\qquad \varepsilon e^{i\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda,$$

ove

$$(34)\qquad f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_0^l \varepsilon e^{i\alpha} e^{-i\lambda x'}\, dx' .$$

Il sistema (10) si riduce all'equazione:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \chi \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = e^{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda. \tag{35}$$

Un integrale particolare può ottenersi nella forma (36): $\psi(x)\, e^{\tau}$, da cui, sostituendo nella (35) e risolvendo, si ottiene:

$$\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\lambda)}{\chi\lambda^4 - 1}\, e^{i\lambda x}\, d\lambda\,. \tag{37}$$

Le freccie elastiche di regime si ricavano sommando alla (36) la soluzione dello stesso tipo ottenuta dalla (35) resa omogenea, ed imponendo che il risultato soddisfi alle condizioni ai limiti.

$$u = e^{\tau}\left[\sum_1^4{}_i A_i\, e^{m_i x} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\lambda)}{\chi\lambda^4 - 1}\, e^{i\lambda x}\, d\lambda\right] \tag{38}$$

ove $m^4 = 1/\chi$.

Si ottiene un sistema non omogeneo nelle A_i, ove almeno una delle costanti diviene infinita se la velocità angolare dell'albero coincide con una delle frequenze proprie.

È da notare che la singolarità della funzione sotto integrale non è, di per se, causa di divergenza dell'integrale stesso, perché

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\sqrt[4]{\frac{1}{\chi}} - \delta}^{\sqrt[4]{\frac{1}{\chi}} + \delta} \frac{f(\lambda)}{\chi\lambda^4 - 1}\, e^{i\lambda x}\, d\lambda = 0.$$

BIBLIOGRAFIA.

1. RANKINE W. J. M., *On the centrifugal force of rotating shafts*, 1869, The Engineer, London.
2. STODOLA A., *Dampf-und Gas-Turbinen*, 1924, Springer, Berlin.
3. ROBERTSON D., *Whirling of a shaft with skew stiffness*, 1933, The Engineer, London.
4. ROBERTSON D., *The whirling of shafts*, 1934, The Engineer, London.
5. TIMOSHENKO S., *Théorie des vibrations*, 1947, Béranger, Paris.
6. DEN HARTOG J. P., *Mechanical Vibrations*, 1947, Mc Graw-Hill, New York.
7. BRUNELLI P. E., *Velocità critiche degli alberi*, 1948, Giorgio, Torino.
8. SCHULTE C. A. e RIESTER R. A., *Effects of mass distribution on critical speeds*, « Proc. 2nd. Nat. Cong. Appl. Mech. », 1954, ASME, New York.

Fisica matematica. — *Un teorema di unicità dello stato superconduttivo.* Nota (*) di MARZIANO MARZIANI, presentata dal Corrisp. D. GRAFFI.

1. È noto (1) che nella teoria matematica della superconduttività dovuta a H. e F. London, le equazioni

$$c \operatorname{rot} \lambda \boldsymbol{j}_s + \mathbf{H} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \lambda \boldsymbol{j}_s}{\partial t} - \mathbf{E} = 0 \tag{2}$$

dove λ è un parametro, c la velocità della luce nel vuoto e t il tempo, esprimono nel superconduttore il legame tra il campo elettromagnetico $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ e la densità di supercorrente $\boldsymbol{j}_s$. Tali vettori soddisfano inoltre alle ordinarie equazioni di Maxwell

$$c \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \boldsymbol{j} \tag{3}$$

$$c \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{4}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \tag{5}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \text{ (2)} \tag{6}$$

dove il vettore

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_s + \gamma \mathbf{E}, \tag{7}$$

solenoidale in conseguenza della (3) e della (6), rappresenta la densità totale di corrente, somma della densità di supercorrente $\boldsymbol{j}_s$ e della densità di corrente normale, γ essendo la conduttività ohmica (3).

Esternamente al superconduttore, dove ammettiamo sia il vuoto, valgono per il campo elettromagnetico le equazioni di Maxwell (3), ···, (6) ove si ponga $\boldsymbol{j} = 0$.

(*) Pervenuta all'Accademia il 30 settembre 1958.

(1) Cfr. F. LONDON, *Superfluids*, vol. I, New York, Wiley (1950).

(2) Si ammette (cfr. F. LONDON, loc. cit., p. 31) che il superconduttore agisca sul mezzo circostante come se la densità di carica nel suo interno fosse $\rho = \operatorname{div} \mathbf{E} = 0$.

(3) Sulla superficie σ del superconduttore si deve poi ritenere $\boldsymbol{j}_s \times \boldsymbol{n} = 0$ e continue le componenti tangenziali di $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ e ciò in conseguenza delle equazioni differenziali cui soddisfano i vettori, supposti questi limitati (assieme alle loro derivate prime) nel passaggio da un mezzo a un altro (cfr. F. LONDON, loc. cit., p. 33).

Supposto il superconduttore ciclico $(n+1)$ volte connesso, indichiamo con $i_r\ (r = 1, 2, \cdots, n)$ le intensità di supercorrente attraverso n sezioni caratteristiche [4] $\sigma_r\ (r = 1, 2, \cdots, n)$ del superconduttore, cioè, dicendo $\boldsymbol{n}$ il versore normale a σ_r,

$$i_r = \int_{\sigma_r} \boldsymbol{j}_s \times \boldsymbol{n}\, d\sigma_r \qquad (r = 1, 2, \cdots, n) \tag{8}$$

ed introduciamo, seguendo il London [5], i cosidetti *fluxoids*

$$\Phi_r = c\lambda \oint_{l_r} \boldsymbol{j}_s \times d\mathrm{P} + \int_{\Sigma_r} \mathbf{H} \times \boldsymbol{n}\, d\Sigma_r \qquad (r = 1, 2, \cdots, n) \tag{9}$$

dove l_r è una qualsiasi linea chiusa regolare, luogo di punti P, interna al superconduttore, circondante il buco r–esimo e Σ_r è una qualunque superficie avente per orlo la l_r, $\boldsymbol{n}$ essendo il versore della normale.

Nel caso stazionario (e quindi in assenza di campo elettrico), sussiste, com'è noto [6], il seguente teorema di unicità: *Se si suppone il superconduttore isolato nel vuoto, assegnando la componente tangenziale del campo magnetico su una superficie chiusa* Σ, *esterna al superconduttore* (eventualmente all'infinito) *e i fluxoids* Φ_r (*o le correnti* i_r) $(r = 1, 2, \cdots, n)$, *i campi e le correnti risultano ovunque univocamente determinati.*

Mi propongo qui di estendere tale teorema alla superconduttività non stazionaria, trattando il caso di campi elettromagnetici variabili in modo comunque rapido col tempo. Dimostrerò a tal fine la seguente proposizione: *Supposta assegnata, per ogni* $t \geq 0$, *la componente tangenziale del campo magnetico su una superficie chiusa* Σ *esterna al superconduttore, la conoscenza dei valori iniziali del campo elettrico e della sua derivata temporale oltre che dei valori iniziali dei fluxoids* (*o delle intensità di supercorrenti attraverso le* σ_r) *determina univocamente, ovunque e in ogni istante* $t \geq 0$, *i campi e le correnti.*

Si deducono poi da tale teorema nuove condizioni atte ad assicurare, in altri casi, l'unicità della soluzione del problema superconduttivo.

2. È conveniente premettere alla dimostrazione le considerazioni seguenti. Indicato con S il superconduttore (che supponiamo ciclico $(n+1)$ volte connesso) e con S_1 la regione vuota limitata dalla superficie σ di questo e da una superficie chiusa Σ (eventualmente all'infinito), esterna al superconduttore, introduciamo l'espressione dell'energia totale $\mathfrak{A}$ relativa al dominio

(4) Le σ_r sono n diaframmi trasversali, uno per ogni buco del superconduttore, ma per il resto arbitrari. Esse, assieme alla superficie σ che limita il dominio superconduttore, rendono aciclico tale dominio.

(5) Cfr. F. LONDON, loc. cit., pp. 48–49. È noto che tale *fluxoid* si conserva nel tempo $(d\Phi_r/dt = 0)$.

(6) Cfr. F. LONDON, loc. cit., pp. 73–78.

$S + S_1$, come somma dell'energia (potenziale) elettrica e magnetica e dell'energia cinetica della supercorrente:

$$(10) \qquad \mathfrak{A} = \frac{1}{2}\int_{S_1} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2)\, dS_1 + \frac{1}{2}\int_{S} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2 + \lambda \boldsymbol{j}_s^2)\, dS$$

dove i vettori $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\boldsymbol{j}_s$ soddisfano ovunque alle equazioni di Maxwell e in S a quelle di London.

Osservando che, in conseguenza delle (2), (3), (4), (7), si ha in S [7]:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2 + \lambda \boldsymbol{j}_s^2) = -c \operatorname{div}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) - \gamma \mathbf{E}^2$$

mentre in S_1 vale ovviamente la stessa relazione con $\boldsymbol{j}_s = 0$ e $\gamma = 0$, segue pertanto l'estensione del teorema di Poynting ai superconduttori nella forma:

$$(11) \qquad \frac{d\mathfrak{A}}{dt} = -c\int_{S_1} \operatorname{div}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H})\, dS_1 - c\int_{S} \operatorname{div}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H})\, dS - \int_{S} \gamma \mathbf{E}^2\, dS \leq$$

$$\leq -c\int_{\Sigma} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) \times \boldsymbol{n}\, d\Sigma$$

come si vede tosto, ove si trascuri l'ultimo termine, trasformando gli altri integrali di volume in integrali di superficie e ricordando la continuità delle componenti tangenziali dei vettori $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ attraverso σ.

3. Ciò premesso, siano ora $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$, $\boldsymbol{j}_{s,1}$, e $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$, $\boldsymbol{j}_{s,2}$ due eventuali soluzioni delle equazioni di Maxwell e di London soddisfacenti assieme ai loro *fluxoids* (o alle loro intensità si supercorrente) ad identiche condizioni iniziali e al contorno quali figurano nell'enunciato del teorema.

Considerati i vettori differenza

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 \qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2 \qquad \boldsymbol{j}_s = \boldsymbol{j}_{s,1} - \boldsymbol{j}_{s,2}$$

questi soddisferanno alle equazioni di Maxwell e di London e alle seguenti condizioni iniziali

$$\mathbf{E}_0 = \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)_0 = 0 \quad \text{in} \quad S + S_1,$$

mentre i valori iniziali $\Phi_r^{(0)}$ e $i_r^{(0)}$ dei *fluxoids* e delle intensità di supercorrente saranno

$$\Phi_r^{(0)} = 0 \quad \text{oppure} \quad i_r^{(0)} = 0 \qquad (r = 1, 2, \cdots, n).$$

Inoltre per $t \geq 0$ su Σ risulta $\mathbf{H} \wedge \boldsymbol{n} = 0$.

(7) Cfr. F. London, loc. cit., p. 66.

Dalla (11) segue allora

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dt} \leq 0$$

cioè, detto $\mathfrak{A}_0$ il valore iniziale dell'energia, si ha che $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{A}_0$ per ogni $t > 0$.

D'altra parte, ricordando le condizioni relative all'istante $t = 0$, si può dare a $\mathfrak{A}_0$ l'espressione che esso ha nel caso stazionario [8] e scrivere, indicando con $\mathbf{A}_0$ il potenziale vettore iniziale [9],

$$\mathfrak{A}_0 = \frac{1}{2}\int_{S_1} \mathbf{H}_0^2 dS_1 + \frac{1}{2}\int_{S} (\mathbf{H}_0^2 + \lambda \boldsymbol{j}_{s0}^2) dS =$$

$$= \frac{1}{2c}\sum_1^n{}_r \Phi_r^{(0)} i_r^{(0)} + \frac{1}{2}\int_{\Sigma} (\mathbf{A}_0 \wedge \mathbf{H}_0) \times \boldsymbol{n} d\Sigma = 0,$$

onde necessariamente $\mathfrak{A} = 0$ per ogni $t \geq 0$ e pertanto, dalla (10),

$$\mathbf{E} = \mathbf{H} = \boldsymbol{j}_s = 0$$

ovunque in $S + S_1$ in ogni istante $t \geq 0$, e da ciò l'unicità. Nel caso stazionario (e quindi nell'ipotesi che sia $\mathbf{E} = 0$ per $t \geq 0$) si ritrova il teorema di unicità richiamato all'inizio.

4. Dalla dimostrazione precedente risulta che la conoscenza dei valori assunti all'istante iniziale dal campo elettrico e dalla sua derivata temporale, oltre che dei *fluxoids* (o delle intensità di supercorrente) individua i valori iniziali dei campi e della densità di supercorrente. Mentre ciò non sembra a priori immediato, è viceversa evidente che i valori iniziali del campo elettromagnetico e della densità di supercorrente determinano anche quelli iniziali dei *fluxoids* (e delle correnti). In tale caso, (con la solita ipotesi sui valori al contorno), l'unicità della soluzione segue senz'altro dalla (11), poiché la funzione non negativa $\mathfrak{A}$, risultando non crescente per $t > 0$ e nulla all'istante iniziale, deve essere costantemente uguale a zero. Si può anzi osservare che se, in questo caso, invece della densità iniziale di supercorrente, si conoscono i *fluxoids*, allora il campo differenza $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ soddisfa, per $t = 0$, alla condizione

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{H}_0 = 0$$

onde, dalla (1), (sempre per $t = 0$),

$$\operatorname{rot} \lambda \boldsymbol{j}_{s0} = 0$$

cioè

$$\lambda \boldsymbol{j}_{s0} = \operatorname{grad} \varphi$$

(8) Cfr. F. LONDON, loc. cit., pp. 74–76.

(9) Essendo per la (5) $\operatorname{div} \mathbf{H}_0 = 0$ si può scrivere $\mathbf{H}_0 = \operatorname{rot} \mathbf{A}_0$. Inoltre è $\operatorname{div} \boldsymbol{j}_{s0} = 0$.

con φ monodroma [10]. Poiché $\boldsymbol{j}_s$ è solenoidale e soddisfa su σ alla condizione $\boldsymbol{j}_s \times \boldsymbol{n} = 0$ se ne deduce che

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{in S} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{su } \sigma,$$

quindi, ovunque per $t = 0$:

$$\lambda \boldsymbol{j}_{s0} = \text{grad}\,\varphi = 0$$

e da ciò, come più sopra, l'unicità per ogni $t > 0$.

Va notato infine che, se il superconduttore è aciclico, l'ipotesi riguardante i *fluxoids* diventa superflua, essendo sempre, in tal caso, $\Phi_r = 0$ [11].

(10) Infatti, essendo $\mathbf{H}_0 = 0$ e nulli i *fluxoids* del campo differenza, risulta uguale a zero la circolazione di $\boldsymbol{j}_{s0}$ lungo una qualsiasi linea chiusa interna al superconduttore.

(11) Cfr. F. LONDON, loc. cit., p. 49.

Chimica inorganica. — *Il composto* URh_3 (*). Nota (**) di RICCARDO FERRO, presentata dal Socio L. ROLLA.

Salvo che per il rodio, il cui comportamento era completamente sconosciuto da questo punto di vista, sono noti vari dati sulle proprietà delle leghe dell'uranio con i metalli nobili del gruppo del platino. Per alcuni è conosciuto il diagramma di stato: o completamente (uranio–palladio [1-2]), o parzialmente (uranio–platino [1-3], urano–rutenio [1-3]); per altri (osmio [1], iridio [1]) è noto solo che esistono alcuni composti e le loro strutture.

Per quanto si può dire finòra, tutti questi sistemi sono, generalmente, caratterizzati dalla presenza di più composti, alcuni dei quali con temperature di fusione particolarmente elevate. Per quanto riguarda le strutture cristalline dei composti stessi, sembrano abbastanza frequenti quelle tipicamente metalliche ad alta densità ed alti numeri di coordinazione come quelle di Laves dei composti UOs_2 ed UIr_2 [1].

Nella presente Nota riferisco sulla preparazione e proprietà del composto URh_3.

L'uranio impiegato era di purezza intorno al 99,7 % (circa 0,2 % tra ossigeno ed azoto e 0,05 % di ferro), il rodio di purezza non inferiore al 99,9 %.

Al composto di formula URh_3 corrisponde un contenuto di uranio pari al 43,55 % e sono state appunto preparate alcune leghe la cui composizione era intorno a questo valore stechiometrico.

Per la preparazione, le polveri dei due metalli (eventualmente compresse insieme sotto la pressa idraulica in modo da formare un blocchetto) erano poste in un crogiolino refrattario dentro un'ampollina di quarzo che veniva chiusa sotto il vuoto di una pompa a diffusione. Le polveri venivano poi sinterizzate per riscaldamento prolungato fin verso 1200° C, cui seguiva un lento raffreddamento fino a temperatura ambiente.

I campioni, così ottenuti, abbastanza compatti, fragili e duri ed inalterabili agli agenti atmosferici sono stati esaminati coi raggi X. È stato impiegato per questo esame il metodo delle polveri (disposizione del film secondo Straumanis) usando la radiazione K_α del rame ($\lambda_{CuK\alpha_1} = 1{,}540500$ Å).

Le righe Debye ottenute (che non presentano variazioni apprezzabili da un fotogramma all'altro) si possono riferire ad una cella cubica. La costante reticolare è:

$$a_0 = 3{,}992 \text{ Å}.$$

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico, Laboratorio di Chimica–Fisica dell'Università di Genova.

(**) Pervenuta all'Accademia il 10 settembre 1958.

(1) T. J. HEAL e G. I. WILLIAMS, « Acta Cryst. », *8*, 494 (1955).

(2) J. CATTERALL, J. GROGAN e R. PLEASANCE, « J. Inst. Met. », *85*, Pt. 2, 63 (1956).

(3) J. PARK e R. BUZZARD (U. S. Atom. Comm.), « Chem. Abstr. », *51*, 12625^d (1956).

Questo valore è stato ottenuto dal fotogramma per estrapolazione a 90° col metodo di Taylor, Sinclair, Nelson e Riley [4].

La struttuta è risultata del tipo $AuCu_3$ (tipo L 12 dello Strukturbericht) che corrisponde alla seguenti posizioni atomiche nel gruppo spaziale: O_h^1 — Pm3m (gruppo N. 221 delle International Tables for X-ray cristallography):

$$1\,U \text{ in } (a)\ 0,0,0 — 3\,Rh \text{ in } (c)\ 0,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};\ \tfrac{1}{2},0,\tfrac{1}{2};\ \tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0.$$

Nella Tabella I sono riportate le intensità delle riflessioni Debye osservate (stimate visualmente) e quelle calcolate nella detta ipotesi di struttura (prodotto dei fattori di struttura, frequenza, polarizzazione ed assorbimento): la concordanza, come si osserva, è buona.

TABELLA I.

URh_3 *fotogramma delle polveri. Radiazione* K_α Cu.

h k l	Intensità		*h k l*	Intensità	
	oss.	calc.		oss.	calc.
100	—	1,9	321	*dd*	5,0
110	—	2,9	400	*dmd*	11,0
111	*mf*	30,5	322 + 410	*d*	5,5
200	*m*	19,0	330 + 411	*d*	4,8
210	?	3,8	331	*ff*	55,2
211	?	3,7	420	*ff*	62,6
220	*mf*	25,1	421	*d*	8,6
221 + 300	—	3,7	332	—	4,9
310	—	2,7	422	*fff*	123,2
311	*f*	41,4	430 + 500	*md*	13,5
222	*md*	14,0	431 + 510	*f*	51,9
320	—	2,5			

Nella cella elementare è perciò contenuta una molecola e la densità corrispondente risulta: $\rho_x = 14{,}27\ gr/cm^3$.

(4) Si veda per esempio su: L. V. AZAROFF e M. J. BUERGER, *The powder method in x-ray cristallography*, McGraw Hill Book Co., New York (1958), p. 238.

La distanza interatomica che si osserva per U—Rh (= Rh—Rh) è $d = 2{,}82_3$ Å, mentre la distanza calcolata come somma dei raggi atomici è 2,82 Å per U—Rh o, rispettivamente, 2,68 per Rh—Rh.

Dei composti UX_3 finora noti con i metalli platinoidi (URu_3, URh_3, UPd_3, UPt_3) URh_3 ha una struttura diversa da quelle di UPd_3 e UPt_3 mentre risulta essere non solo isostrutturale ma anche molto simile nelle dimensioni reticolati a URu_3[1] (la cui costante è $a_0 = 3{,}988$ Å), il che può giustificarsi tenendo conto e della vicina posizione nel sistema periodico di questi due metalli nobili e della quasi eguaglianza tra i valori dei loro raggi atomici.

Chimica fisica. — *Indagine sulla struttura elettronica della molecola della guanidina e dello ione guanidinico* (*). Nota (**) di SERGIO CARRÀ, presentata dal Socio L. CAMBI.

Nella presente Nota vengono esposti e discussi i risultati ricavati da una indagine sulla struttura elettronica della molecola della guanidina e dello ione guanidinico. Il metodo applicato è il metodo MO SCF LCAO nell'approssimazione di Pople, già applicato con buoni risultati allo studio di altre molecole coniugate eterocicliche [1] [2] [3]. I dettagli dei calcoli, la scelta dei parametri e degli integrali necessari sono riportati nelle pubblicazioni citate. L'unica differenza riguarda gli integrali di penetrazione $(q : pp)$ valutati in questo caso con le formule di Scrocco e Salvetti [4] e trascurati per distanze superiori ai 2 Å (1) (tali integrali tendono rapidamente a zero).

Non essendo nota la struttura geometrica della guanidina è stato assunto come modello del cuore della molecola una struttura piana con i tre atomi di azoto e quello di carbonio nello stato di ibridazione sp^2 e con le seguenti distanze dei legami C—N: $d_{14} = 1{,}36$ Å, $d_{12} = d_{13} = 1{,}37$ Å. (Gli indici 1234 si riferiscono al diagramma di fig. 1 *a*). L'azoto in 4 possiede inoltre una carica positiva mentre quelli in 2 e 3 due cariche.

In una trattazione come la nostra, che ignora la presenza degli atomi di idrogeno e la asimmetria della struttura elettronica dell'azoto (in uno dei tre orbitali sp^2 uno forma un legame σ con l'atomo di carbonio, uno con un atomo di idrogeno ed il terzo ospita un doppietto elettronico) la hamiltoniana del sistema dei sei elettroni π resterà inalterata se la molecola viene assoggettata alle operazioni di simmetria del gruppo C_{2v}.

Gli orbitali molecolari, ottenuti con un procedimento di calcolo iterativo, sono quindi riportati con l'indice delle rappresentazioni irriducibili del gruppo:

$$\left.\begin{aligned}\psi_1 &= 0{,}53800\,\chi_1 + 0{,}58209\,(\chi_2 + \chi_3) + 0{,}18138\,\chi_4\\ \psi_3 &= 0{,}37411\,\chi_1 - 0{,}30122\,(\chi_2 + \chi_3) + 0{,}82373\,\chi_4\end{aligned}\right\} \quad A_1$$

$$\psi_2 = 0{,}70711\,(\chi_2 - \chi_3) \qquad B_1.$$

I valori dell'energia sono i seguenti:

$$E_1 = -20{,}7980 \text{ eV} \quad , \quad E_2 = -17{,}24903 \text{ eV} \quad , \quad E_3 = -12{,}5601 \text{ eV}.$$

Per lo ione guanidinico è stato adottato il modello desunto dall'indagine condotta coi raggi X sul corrispondente bromato [5] ed avente una distanza C—N pari a 1,34 Å. Gli atomi di azoto e carbonio sono in uno stato di ibridazione sp^2 e l'intera molecola appartiene al gruppo di simmetria C_{3h}.

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto per la laurea in Chimica Industriale dell'Università di Milano.

(**) Pervenuta all'Accademia il 5 settembre 1958.

(1) Tale asimmetria dovrebbe manifestarsi, in questa trattazione, in una leggera differenza degli integrali di penetrazione (4 : 22) e (4 : 33) che sono stati trascurati.

Trattandosi di uno ione con un numero di elettroni pari corrispondenti quindi ad uno strato chiuso, è stato applicato il consueto metodo di calcolo, ottenendo le seguenti autofunzioni:

$$\psi_1 = 0{,}59880\,\chi_1 + 0{,}46241\,(\chi_2 + \chi_3 + \chi_4) \qquad A'$$
$$\left.\begin{aligned}\psi_2 &= 0{,}81650\,\chi_3 - 0{,}40825\,(\chi_2 + \chi_4)\\ \psi_3 &= 0{,}70711\,(\chi_4 - \chi_2)\end{aligned}\right\} \qquad E'.$$

I valori dell'energia sono i seguenti:

$$E_1 = -29{,}69095 \text{ e V}, \quad E_2 = E_3 = -22{,}7650 \text{ eV}.$$

Le due autofunzioni ψ_2 e ψ_3 sono degeneri.

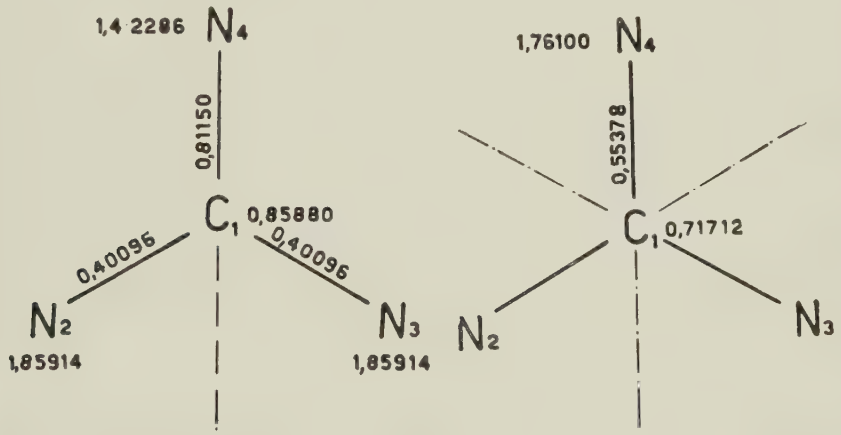


Fig. 1.

Per ambedue le molecole sono state valutate le densità di carica e gli ordini di legame ottenendo i valori riportati nei diagrammi molecolari di fig. 1 (*a b*). (I numeri tra parentesi rappresentano le densità di carica, quelli corrispondenti a ciascun legame l'ordine del legame stesso).

Applicando la formula di Gordy [6]:

$$R^2_{CN} = \frac{6{,}48}{N + 2{,}00}$$

che lega la distanza R_{CN} dei legami C—N all'ordine totale del legame N, sono stati ricalcolati i valori delle distanze ottenendo i seguenti risultati:

guanidina– $d_{12} = 1{,}380$ Å ; $d_{14} = 1{,}304$ Å

ione guanidinico– $d_{12} = 1{,}350$ Å.

Per la guanidina è stata inoltre determinata l'energia di risonanza calcolando la differenza fra l'energia degli elettroni π della molecola e quella di una ipotetica molecola, con le stesse distanze di legame, con il doppio legame localizzato fra gli atomi 1–4 e quattro elettroni localizzati a due a due sugli atomi di azoto 2 e 3. L'energia degli elettroni π valutata in ambedue i casi con la formula:

(7) $$E = 1/2 \sum_{pq} (H_{pq} + F_{pq})$$

(dove H_{pq} nella approssimazione adottata è U_{pp} (3) se $p = q$, è β_{pq} se $p \neq q$ e gli atomi sono adiacenti ed è nullo negli altri casi, mentre F_{pq} sono gli elementi del determinante secolare [1]), porta ai seguenti risultati:

$$E_{guan.} = -129{,}13512 \text{ eV} \quad , \quad E_{mol.ip.} = -126{,}26881 \text{ eV}.$$

Da questi valori consegue che l'energia di risonanza sarà uguale a 2,45033 eV = 56,529 Kcal/mole. Tale energia per poter essere confrontata con il dato sperimentale deve essere corretta dell'energia di deformazione dei legami (accorciamento dei legami C—N singoli, allungamento del legame C=N doppio) che risulta uguale a —4,66700 Kcal/mole (2). Si otterrà quindi 51,862 Kcal/mole in buon accordo con il valore sperimentale di 47 Kcal/mole riportato da Pauling [8].

L'ordine di legame può permettere anche una valutazione della costante di forza dello stesso. In una indagine condotta da Somayajulu [9] risulta che le costanti di forza si possono ritenere proporzionali all'ordine dei legami assumendo come riferimento le costanti del doppio e del triplo legame (l'autore citato discute l'applicazione di tali considerazioni ai legami C—C). Nel caso in esame, se si assumono come costanti di forza rispettivamente per il doppio e triplo legame C—N i valori $k_{C=N} = 10{,}62$ [9] e $k_{C=N} = 17{,}73$ [10] ne consegue la seguente ralazione che lega la costante di forza all'ordine di legame totale:

$$k = 7{,}11 \cdot N - 3{,}60.$$

Applicata allo ione guanidinico fornisce come valore della costante k 7,45 in buon accordo con il valore sperimentale di 7,10 [11].

Bibliografia.

[1] G. Favini, S. Carrà, « Gazzetta Chim. It. », *87*, 1367 (1957).
[2] S. Carrà, S. Polezzo, M. Simonetta, « Rend. Acc. Lincei », XXIII, 428 (1957).
[3] S. Carrà, S. Polezzo, « Gazzetta Chim. It. », in corso di pubblicazione.
[4] E. Scrocco, O. Salvetti, « Ricerca Sci. », *23*, 98 (1953).
[5] J. Drenth, W. Drenth, Aafje Vos e E. H. Wiebenga, « Acta crist. », *6*, 424 (1953).
[6] W. Gordy, « J. Chem. Phys. », *15* I, 305 (1947).
[7] J. A. Pople, « Trans. Faraday Soc. », *48*, 1375 (1953).
[8] L. Pauling, *The nature of chemical bond*, Cornell University Press, Ithaca, N.Y. (1948).
[9] G. R. Somayajulu, « J. Chem. Phys. », *28*, 814 (1958).
[10] G. Herzberg, *Infrared and Raman Spectra of Polyatomic Molecules*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey (1945), p. 193.
[11] L. Kellner, « Proc. Roy. Soc. », *A 177*, 456 (1941).
[12] W. Gordy, « J. Chem. Phys. », *14*, 305 (1946).

(2) Valore ottenuto con la formula di Morse facendo uso delle costanti di forza ottenute con la formula di Gordy [12] e dei seguenti valori delle energie di legame: $D_{C=N} = 55$ Kcal/mole, $D_{C=N} = 94$ Kcal/mole.

Anatomia. — *Sull'innervazione recettrice e vegetativa del labirinto membranoso dei teleostei* (*). Nota di EMILIO CASASCO, presentata (**) dal Socio A. PENSA.

Il labirinto membranoso dei teleostei è costituito, come è noto, dalle seguenti formazioni: il sacculo, la lagena e l'otricolo, tre canali semicircolari con relativa ampolla distinti in anteriore, laterale e posteriore, ed il dotto endolinfatico. Nel caso speciale del luccio, pesce del quale mi sono particolarmente occupato, la lagena non è, come di norma, separata dal sacculo: una sola vescicola fa l'ufficio di sacculo e di lagena. Altra particolarità di questo pesce è quella di possedere uno speciale organo, la cisticola, piccola appendice sacciforme comunicante con l'otricolo per mezzo di un breve condottino.

Ricordo che la parete del labirinto è costituita da uno strato epiteliale e da una tonaca propria ricca di cellule di natura connettiva. Nello strato epiteliale si distinguono zone ad epitelio indifferente, costituito da un unico strato di cellule, generalmente piatte e talora cubiche, ed aree ad epitelio sensoriale, definite come macule e creste acustiche; in queste ultime zone l'epitelio è pluristratificato ed è caratterizzato dalla presenza di cellule cilindriche di sostegno disposte in più file fra le quali sono innicchiate le cellule acustiche.

In *Esox lucius* le aree acustiche sono in numero di sette: due nella parete sacculare (*macula sacculi* e *macula lagenae*); due nell'otricolo (l'una, *macula utriculi*, in corrispondenza del *recessus*, l'altra, *macula neglecta* del Retzius, situata nella parte posteriore del pavimento dell'otricolo dietro al foro *utricolo-sacculare*); tre costituiscono le creste acustiche delle ampolle anteriori, laterale e posteriore.

Alla innervazione sensoriale del labirinto membranoso provvede il nervo acustico: questo subito dopo l'emergenza dal tronco encefalico si divide in due grossi rami, anteriore e posteriore. Il ramo anteriore fornisce rami secondari per il *recessus utriculi* e per le ampolle anteriore e laterale; quello posteriore invece si distribuisce alla ampolla posteriore, alla *macula sacculi*, alla *macula lagenae* ed alla *macula neglecta* del Retzius.

All'origine dei due rami di divisione del nervo acustico sono situati due gangli costituiti da numerose cellule per la maggior parte raggruppate ed in piccola parte disseminate per un certo tratto fra i fasci nervosi. Nei miei preparati allestiti col metodo Bielschowsky nelle modificazioni suggerite dal Palumbi, dette cellule appaiono di due tipi: l'uno rappresentato da grossi elementi bipolari (fig. 1), oppositopolari, di forma fusata, provvisti di un grosso nucleo vescicoloso con uno o più nucleoli; nel citoplasma, contrariamente

(*) Ricerca eseguita nell'Istituto di Anatomia umana dell'Università di Pavia, direttore G. Palumbi.

(**) Nella seduta del 13 aprile 1957.

a quanto sostenuto da qualche autore, è presente una struttura neurofibrillare bene evidente. I prolungamenti centrali e periferici di queste cellule costituiscono le fibre più voluminose del nervo acustico. L'altro tipo cellulare è invece rappresentato da elementi più piccoli e di forma globosa (fig. 2), pure bipolari, il cui prolungamento periferico si riconosce distintamente dalle altre fibre del tronco nervoso per la sua sottigliezza.

Per quanto riguarda il sacculo, i prolungamenti periferici delle cellule sensitive, raccolti in fascetti, si portano tutti verso l'area sacculare ma mentre quelle di maggior calibro seguono un decorso rettilineo e non si intrecciano fra loro, le fibre più sottili tengono invece un decorso più o meno flessuoso e si intrecciano ripetutamente fra loro; nessuna di esse si divide; solo eccezionalmente si riscontra qualche tratto anastomotico fra fibre più o meno vicine. In prossimità dell'area maculare dette fibre si espandono a ventaglio; nello strato più esterno della lamina propria dell'area sensoriale si incontra un primo plesso a maglie piuttosto larghe il quale risulta esclusivamente formato dall'intreccio sia delle fibre sottili, che quivi divengono assai più flessuose ed irregolari, sia dalle fibre grosse che da verticali si fanno orizzontali; in sua corrispondenza il numero delle fibre in divisione è irrilevante. Da questo primo plesso le fibre si portano più profondamente nella tonaca propria fino a raggiungere gli strati più esterni dell'epitelio ed è in questo secondo tratto del loro decorso che con i loro ripetuti rami di divisione danno origine da un secondo plesso assai più fitto e complesso del precedente (fig. 3). Diverso è il comportamento delle fibre sensitive grosse rispetto a quelle sottili: ciascuna delle prime dà quivi origine improvvisamente a due o tre grossi rami primari che quasi immediatamente si risolvono a loro volta in un numero vario di rami secondari più lunghi e sottili; questi infine con i loro più fini rami di divisione in parte raggiungono le cellule sensoriali per assumere con queste intimi rapporti che verranno descritti dettagliatamente in una prossima Nota, ed in parte invece, intrecciandosi ed anastomizzandosi con le altre fibre, partecipano alla formazione del sopraindicato plesso nervoso; le fibre sensitive fini con i loro rami di divisione partecipano pure esse alla costituzione di detto plesso ma non sembrano assumere mai immediati rapporti con le cellule sensoriali.

È da aggiungere che alcune delle fibre sensitive sottili, singolarmente o raccolte in fascetti, abbandonano l'area sensoriale per distribuirsi al restante ambito della parete sacculare rivestita da epitelio indifferente; quivi esse ed i loro rami di divisione descrivono ampie volute ed intrecciandosi fra loro formano un plesso a larghe maglie del tutto simile a quello descritto dal Palumbi nella regione extrasensoriale della parete dell'otricolo umano (fig. 4).

Analogo comportamento in linea generale hanno i rami destinati alle altre aree recettrici del labirinto membranoso.

Circa la lagena, il ramo di divisione del tronco posteriore ad essa destinato si suddivide in un primo tempo in una diecina di fasci i quali divergono a ventaglio e dopo essere penetrati nella tonaca propria si riuniscono ed anastomizzano formando ampie arcate: le grosse fibre che si dipartono da queste

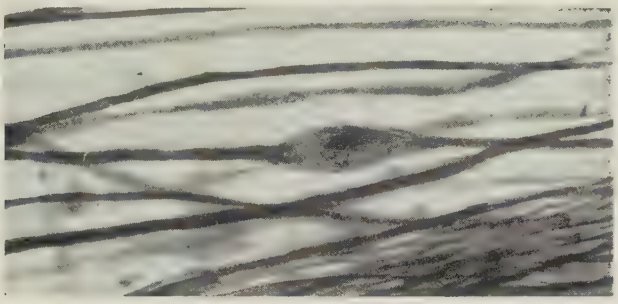


Fig. 1. – Cellula gangliare sensitiva, bipolare, di forma fusata. *Esox lucius*. (Metodo Bielschowsky mod. – Ingr. 520 ×).

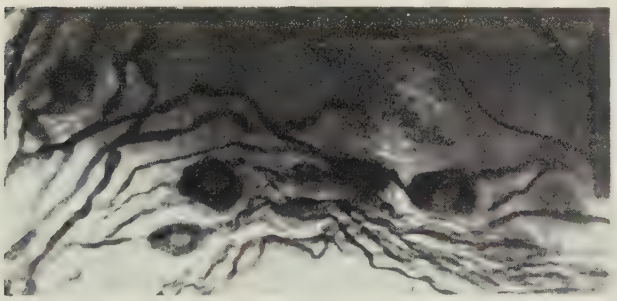


Fig. 2. – Cellule gangliari sensitive, bipolari, piccole e di forma globosa. *Esox lucius* (Metodo Bielschowsky mod. – Ingr. 520 ×).

Fig. 3. – Plesso nervoso della *macula sacculi* di *Esox lucius*. (Preparato per distensione. Metodo Bielschowsky mod. – Ingr. 520 ×).

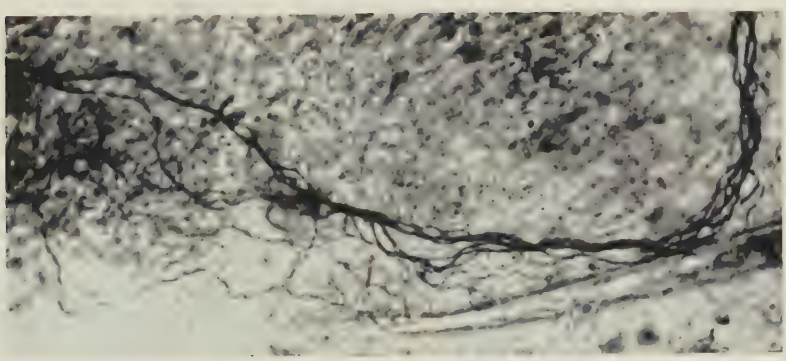


Fig. 4. – Fibre nervose sensitive, sottili, formanti un plesso nell'area extrasensoriale del sacculo di *Esox lucius*. (Preparato per distensione. Metodo Bielschowsky mod. – Ingr. 520 ×).

Fig. 5. – Plesso nervoso della *macula lagenae* di *Esox lucius*. (Preparato per distensione. Metodo Bielschowsky mod. – Ingr. 280 ×).

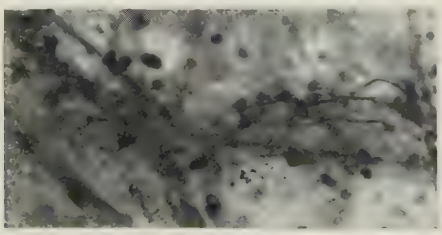


Fig. 6. – Fibre nervose simpatiche di vasi sanguigni decorrenti nella zona perimaculare. *Esox lucius* (Preparato per distensione. Metodo Bielschowsky mod. – Ingr. 520 ×).

si suddividono ben presto in un numero grande di fibre più piccole le quali, ulteriormente ramificandosi, formano un delicatissimo e fittissimo plesso subepiteliale a maglie poligonali (fig. 5). Da questo si dipartono fibre che si addentrano nello strato epiteliale dove assumono disposizione retiforme. I rapporti particolari delle fibre nervose con le cellule sensoriali saranno oggetto di una prossima Nota più completa nella quale saranno esposti anche i dati bibliografici.

In base ai reperti da me ottenuti ho potuto inoltre stabilire che esiste una componente simpatica delle reti nervose maculari proveniente dai plessi nervosi perivascolari (fig. 6): le fibre penetrano nelle macule seguendo le collaterali dei vasi decorrenti nelle zone perimaculari. Altre fibre, dopo avere abbandonato la parete vasale, si portano, indipendentemente dal vaso, nelle macule disperdendosi nella ricca rete nervosa.

Zoologia. — *Studio della ribonucleasi acida nello sviluppo di* Artemia salina *Leach* (*). Nota (**) di Enrico Urbani e Loreta Bellini, presentata dal Socio G. Cotronei.

La ribonucleasi è un enzima che appartiene al gruppo delle fosfodiesterasi: in realtà esistono diverse ribonucleasi con pH ottimo di azione in ambiente acido o in ambiente alcalino. La ribonucleasi estratta dal pancreas dei Mammiferi è stata cristallizzata (Kunitz, 1940) [1] ed in questi ultimi tempi usata ampiamente per la identificazione istochimica dell'acido ribonucleico con la ormai classica tecnica di Brachet (1940) [2].

Le ribonucleasi (RNasi) attaccano la molecola dell'acido ribonucleico (RNA) e la risolvono nei rispettivi mononucleotidi, tra questi quelli pirimidinici vengono dallo stesso enzima ulteriormente scissi. Le modalità con le quali è operata questa idrolisi non sono perfettamente chiare: per esempio durante l'attacco enzimatico dell'RNA del lievito si liberano gruppi acidi senza che però compaia una rilevante quantità di acido fosforico. Gli studi sulla cinetica delle RNasi sono molto interessanti (Davidson, 1953 [3]; Roth, 1954 [4]; Mc Donald, 1955 [5]) ma la loro esposizione esorbita dal tema della presente Nota. Brachet e Allievi (1955) [6] hanno dimostrato che la ribonucleasi iniettata negli organismi, o semplicemente aggiunta ai liquidi di cultura di tessuti o protozoi, provoca una inibizione della divisione cellulare e l'arresto della incorporazione degli aminoacidi nelle proteine protoplasmatiche, fatto questo indicativo di strette relazioni funzionali tra RNasi, RNA e sintesi delle proteine.

Gli studi sul comportamento delle RNasi nello sviluppo embrionale sono molto scarsi ed a tale proposito ricordiamo il lavoro di Finamore (1955) [7] che ha rilevato dalla fecondazione alla neurulazione di *Rana pipiens*, stadio al quale la ricerca si arresta, cicliche variazioni di attività della RNasi alcalina.

Un esteso lavoro sul comportamento della RNasi acida nello sviluppo embrionale, larvale e nella metamorfosi di *Bufo vulgaris* è stato compiuto da De Cesaris Coromaldi (1958) [8]. L'Autore ha visto che questo enzima mostra un incremento di attività concomitante ai fenomeni di morfogenesi ed accrescimento dell'embrione: non si è potuto mettere in evidenza, nello sviluppo embrionale, un costante parallelismo di comportamento tra attività enzimatica e tenore in RNA dell'embrione cosa che invece si verifica durante la metamorfosi della stessa specie.

Nell'ambito di questi studi che vengono condotti nel nostro Istituto sulle attività enzimatiche di Vertebrati ed Invertebrati (Urbani, 1957) [9]

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia ed Anatomia Comparata della Università di Camerino, con il contributo del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 7 settembre 1958.

abbiamo esteso queste interessanti ricerche effettuate sugli Anfibi con una analisi del comportamento della RNasi acida nello sviluppo del Fillopode *Artemia salina*, materiale sul quale sono state già studiate proteasi (Bellini, 1957) [10] amilasi (Bellini, 1957) [11] e lipasi (Bellini e Scollo Lavizzari, 1958) [12]. Contemporaneamente allo studio enzimatico sono stati eseguiti anche dosaggi del tenore in RNA onde poter fare dei raffronti tra attività della RNasi acida e contenuto in RNA dell'embrione di *Artemia salina* in sviluppo. In questa Nota vengono brevemente esposti i principali risultati ottenuti.

Abbiamo usato germi incistati di *Artemia salina* (raccolti in California) appartenenti al biotipo diploide anfimittico ed in vita latente da almeno due anni: essi provengono dallo stesso lotto utilizzato nelle nostre precedenti ricerche. Le cisti poste in acqua salata (30 g Na Cl/litro) schiudono, alla temperatura di 18°–20° C in circa 50 ore dando origine dopo 80–100 ore ai naupli nuotanti che hanno pressoché esaurite le scorte vitelline. La percentuale di schiusa nelle cisti che appena messe in acqua si depositano sul fondo è quasi del 100 %. Il metodo di dosaggio della attività RNasica è lo stesso che De Cesaris Coromaldi (1958) [8] ha messo a punto per le sue ricerche e si basa sul principio che una soluzione di RNA, in presenza di HCl, precipita in una finissima dispersione colloidale la torbidità della quale viene misurata spettrofotometricamente, a 400 mμ. I prodotti della idrolisi enzimatica dell'RNA invece non dànno, nelle stesse condizioni, torbidità e la soluzione rimane perfettamente trasparente. (Mc Carty, 1948) [13]. Per quanto riguarda i dettagli del metodo e le accortezze da usare per ottenere risultati esatti e riproducibili si rinvia il lettore al suddetto lavoro di De Cesaris Coromaldi (1958) [8] dove sono riportate anche le curve di taratura ottenute su due differenti spettrofotometri.

Nel nostro caso particolare 150 esemplari di *Artemia salina*, ai vari stadi di sviluppo, sono stati omogenati in 250 μl di acqua distillata: sono state eseguite determinazioni dell'attività enzimatica sia utilizzando l'omogenato totale che il supernatante ottenuto dopo centrifugazione a 3.000 giri per 3 minuti. Si vedrà che l'attività RNasica è più elevata nell'omogenato totale che nel supernatante e questa differenza, più accentuata all'inizio dello sviluppo, va gradualmente riducendosi in seguito; la stessa cosa era già stata vista da De Cesaris Coromaldi (1958) [8] nel suo lavoro sul *Bufo vulgaris*.

L'omogenato (totale o supernatante) in quantità di 35 μl è stato aggiunto a 2 ml di una soluzione di RNA (Bayer) sciolto in tampone acetato a pH 5,7 in quantità di 25 mg/100 ml. Dopo 7 minuti di incubazione a 39° C la reazione è stata bloccata con 2 ml di HCl 1N e la torbidità sviluppatasi dopo 15 minuti esatti è stata fotometrata allo *Spectronic* contro acqua, in confronto di una prova in bianco effettuata al tempo zero e presentante perciò torbidità massima.

Il dosaggio dell'RNA è stato eseguito con la stessa tecnica usata nei precedenti lavori sugli embrioni di Anfibi (Urbani e De Cesaris Coro-

maldi, 1954) [14]. Gli esemplari di *Artemia salina* ai vari stadi di sviluppo sono stati omogenati in numero di 400 in 2 ml di acido perclorico all'1 % alla temperatura di 0° C. Dopo 15 minuti l'omogenato è stato centrifugato a 5.000 giri per 10 minuti ed il « culot » di centrifugazione, raccolto con 2 ml di acido perclorico al 10 %, è stato posto in frigidaire per 24 ore con un sistema di agitazione continuo del liquido per garantire una completa estrazione dell'RNA. Il liquido è stato quindi sbattuto con eguale quantità di cloroformio e centrifugato a 3.000 giri per 3 minuti. L'estratto perclorico che così si ottiene è perfettamente limpido e viene fotometrato in luce ultravioletta a 260 mμ circa in cuvette di quarzo di 0,5 cm spessore contro una prova in bianco fatta con solo acido perclorico al 10 % saturato con cloroformio. Le estinzioni lette sono tradotte in *gamma* di acido ribonucleico su curva di taratura costruita con quantità note di RNA Bayer idrolizzato a 0° C per 24 ore con acido perclorico al 10 %.

I germi incistati di *Artemia salina*, allo stato secco, hanno una attività RNasica che è ben dimostrabile non appena il materiale viene omogenato. Anche questo enzima perciò resta conservato, durante la vita latente, al pari delle altre idrolasi studiate sullo stesso materiale da Urbani e Collaboratori (1952 [15], 1953 [16] [17]). Il comportamento dell'enzima nei vari stadi di sviluppo è chiaramente illustrato nel grafico della fig. 1 dove si vede una iniziale diminuzione di attività nelle prime ore di idratazione, rilevabile sia nelle determinazioni eseguite con l'omogenato totale (curva a tratto grosso) che con il supernatante (curva a tratto sottile). Quando il guscio che racchiude l'embrione si fessura si avverte un aumento di attività RNasica che giunge al massimo in corrispondenza dello stadio nel quale l'embrione, ancora immobile, fuoriesce dal guscio. A questo massimo fa seguito una diminuzione e nei giovani metanaupli nuotanti (tenuti a digiuno) l'attività RNasica raggiunge valori eguali a quelli registrati all'inizio dello sviluppo. Vi è da notare che la differente attività dell'omogenato totale e del supernatante tende a livellarsi nei naupli. È evidente che il vitello che è facilmente centrifugabile possiede una certa attività enzimatica (sulla natura ed origine della quale per ora non ci pronunciamo) e si spiega perciò anche come allo stadio di nauplio, quando le scorte vitelline sono state quasi completamente utilizzate ed in parte trasformate in protoplasma, non vi sia differenza di attività RNasica tra omogenato totale e supernatante. Lo stesso fatto è stato visto, come si è detto, da De Cesaris Coromaldi nello sviluppo embrionale del *Bufo vulgaris*.

Il significato metabolico del riassorbimento del vitello messo in luce da Cotronei (1922, 1930, 1932) [18], [19], [20] nello sviluppo degli Anfibi trova nelle nostre ricerche di enzimologia, compiute su Vertebrati ed Invertebrati, una interessante conferma dei rapporti esistenti tra stadi morfologici di sviluppo ed attività biochimiche.

Il comportamento dell'RNA sullo stesso materiale è illustrato dal grafico della fig. 2 e vi è da notare di significativo che negli stessi stadi di svi-

luppo attività RNasica e tenore in RNA sembrano avere valori inversi con curve ad andamento opposto: dove vi è aumento di attività enzimatica si ha diminuzione in RNA e dove vi è diminuzione di attività RNasica si rileva aumento del tenore in RNA. Bisogna però sottolineare che la caduta del tenore in RNA che si incontra intorno a 65 ore di sviluppo è veramente enigmatica e non trova riscontro in altri materiali embrionali nei quali l'RNA è stato da vari Autori accuratamente studiato (cfr. Urbani, 1957) [9]. Prima perciò di trarre conclusioni definitive sul valore della curva riportata nella fig. 2 sarà desiderabile un controllo eseguito con una tecnica diversa da quella usata nel presente lavoro che però applicata alla embriologia degli Anfibi ci ha consentito di ottenere risultati che sono stati confermati da altri Autori.

In conclusione le presenti ricerche consentono di affermare che nella *Artemia salina* il periodo di morfogenesi ed accrescimento embrionali sono accompagnati da un aumento di attività RNasica, questo enzima mostrerebbe di avere perciò dei rapporti con i fenomeni di sintesi che in questo periodo si realizzano. La curva che esprime il tenore in RNA mostra, con le riserve più sopra avanzate, che questo composto subisce nello sviluppo embrionale del Fillopode variazioni di valore opposto a quelle presentate dalla RNasi.

BIBLIOGRAFIA.

[1] KUNITZ M., « J. Gen. Physiol. », *24*, 15 (1940).
[2] BRACHET J., « C. R. Soc. Biol. », *133*, 88 (1940).
[3] DAVIDSON J. N., *The Nucleic Acids*, Vol. I, Acad. Press Inc. New York (1953).
[4] ROTH J. S., « J. Biol. Chem. », *208*, 181 (1954).
[5] Mc DONALD M., *Methods in Enzymology*, Vol. II, Acad. Press Inc. New York (1955).
[6] BRACHET J., « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », *27*, 146 (1955).
[7] FINAMORE F., « Exp. Cell. Res. », *8*, 533 (1955).
[8] DE CESARIS COROMALDI L. « Ist. Lombardo (Rend. Sc.) », B, *92*, 357 (1958).
[9] URBANI E., « Ist. Lombardo (Rend. Sc.) », B *92*, 69 (1957).
[10] BELLINI L., « Rend. Acc. Naz. Lincei », *22*, 340 (1957).
[11] BELLINI L., « Rend. Acc. Naz. Lincei », *23*, 303 (1958).
[12] BELLINI L. e SCOLLO LAVIZZARI G., « Rend. Acc. Naz. Lincei », *24*, 92 (1958).
[13] Mc CARTY M., « J. Exptl. Med. », *88*, 181 (1948).
[14] URBANI E. e DE CESARIS COROMALDI L., « Ric. Sci. », *24*, 1275 (1954).
[15] URBANI E., ROGNONE L. e RUSSO S., « Rend. Acc. Naz. Lincei », *13*, 300 (1952).
[16] URBANI E. e DE CESARIS COROMALDI L., « Rend. Acc. Naz. Lincei », *14*, 144 (1953).
[17] URBANI E. e URBANI MISTRUZZI L., « Rend. Acc. Naz. Lincei », *15*, 126 (1953).
[18] COTRONEI G., « Arch. Zool. Ital. », *10*, 85 (1922).
[29] COTRONEI G., « Mon. Zool. Ital. », *41*, 8 (1930).
[20] COTRONEI G., « Rend. Acc. Naz. Lincei », *15*, 236 (1932).

Fisiologia. — *Il comportamento delle diverse frazioni dell'*N *del cuore e di alcuni altri organi del colombo bradicardico per malnutrizione orizanica* (*). Nota di GAETANO LIVREA e FERRUCCIO DE STEFANO, presentata (**) dal Corrisp G. AMANTEA.

In precedenti ricerche, uno di noi [1, 2] ha dimostrato col metodo fisiologico che la condizione nutritiva determinante la bradicardia con o senza aritmia del colombo beriberico non è la tiaminodeficienza, ed ha sostenuto, con diversi dati sperimentali, che tale condizione è quella stessa che sta alla base della bradicardia con o senza aritmia del colombo in inanizione acuta o in malnutrizione orizanica.

Successivamente, in collaborazione con Craxì [3], ha dimostrato, in accordo con quanto ora detto, che nel cuore beriberico e nel cuore da inanizione del colombo si riscontrano identiche alterazioni istopatologiche ed istochimiche delle cellule del Purkinje e della sostanza fondamentale.

L'accertamento di un fondamento nutritivo eventualmente identico alla base delle anzidette alterazioni funzionali, istopatologiche ed istochimiche, non solo avrebbe avuto un suo ovvio intrinseco valore, ma avrebbe forse permesso di asserire l'esistenza di una specie di unità profonda nelle modalità di reazione del cuore, ogni qual volta nell'organismo si instaura uno squilibrio tra i processi di sintesi e di catabolismo.

Al fine dell'anzidetto accertamento, abbiamo elaborato un piano organico di lavoro, che è stato oggetto di una Nota precedente [4] ed il cui svolgimento, tuttora in corso, ci ha già permesso di accertare il comportamento ponderale e dell'acqua del cuore e di altri organi del colombo normale, in inanizione o in malnutrizione orizanica [5, 6]. Ultimamente, infine, abbiamo descritto il comportamento delle varie frazioni dell'N del cuore, del sangue, del muscolo scheletrico e del fegato del colombo normale ed in inanizione [7], dimostrando, tra l'altro, che il cuore bradicardico, e talvolta anche aritmico, per inanizione subisce una perdita netta di N altamente significativa per le varie frazioni, eccettuata la frazione aminica, e non va incontro a significative modificazioni del contenuto percentuale delle varie frazioni e quindi della composizione azotata.

Ci restava da chiarire il comportamento delle varie frazioni dell'N del cuore bradicardico dei colombi per malnutrizione orizanica. Tale ricerca costituisce appunto l'oggetto di questa Nota.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Scienza dell'Alimentazione dell'Università di Messina con un contributo del C.N.R.

(**) Nella seduta del 10 giugno 1958.

Anche in questo caso, per un'interpretazione più approfondita dei nostri risultati, abbiamo ritenuto opportuno condurre contemporanee osservazioni sul siero di sangue, sul fegato e sul muscolo scheletrico. Anche in questo caso, però, pur riportando tutti i dati ottenuti, discuteremo brevemente per ora soltanto il comportamento dell'N cardiaco.

Materiali e metodi.

Le esperienze si riferiscono a 20 colombi (*Columba livia*) giovani, di ambo i sessi, sessualmente maturi, del peso medio di 400 g circa. Di questi gli 11 di controllo sono quelli già utilizzati nella precedente ricerca sull'inanizione assoluta [7]; gli altri 9, sottoposti alla dieta orizanica, sono quelli già utilizzati nella ricerca sul comportamento dell'acqua [6].

Poiché la condotta delle osservazioni, sia fisiologiche che biochimiche, è stata già dettagliatamente specificata nelle precedenti Note sul comportamento dell'acqua e delle varie frazioni dell'N, qui la si omette.

Risultati e discussione.

Per un'analisi esauriente del problema in esame, è necessario paragonare il comportamento delle varie frazioni dell'N del cuore bradicardico per malnutrizione orizanica sia con quello del cuore in condizioni normali di nutrizione, sia con quello del cuore bradicardico per inanizione. Però, per necessità di spazio e per evitare inutili ripetizioni, noi riportiamo qui soltanto i valori relativi ai singoli animali in malnutrizione orizanica, nonché le medie di questi valori con i relativi errori standard (ved. Tabella I) e rimandiamo alla Nota precedente [7] per i valori relativi agli animali in condizioni di nutrizione normale e d'inanizione. Nella Tabella II è riportato soltanto il grado di significanza di alcune differenze tra i valori dell'N del cuore e degli altri organi dei colombi normali, digiunanti e beriberici.

I) Dalle anzidette tabelle appare che in condizioni di malnutrizione orizanica:

a) il contenuto in N totale e proteico del cuore è inferiore insignificativamente a quello del fegato, significativamente a quello del muscolo scheletrico;

b) il contenuto in N non proteico del cuore è insignificativamente superiore a quello del fegato e significativamente inferiore a quello del muscolo scheletrico;

c) il contenuto in N aminico del cuore è pressoché identico a quello del muscolo scheletrico e significativamente superiore a quello del fegato;

d) come per il cuore da inanizione, il comportamento delle varie frazioni dell'N cardiaco, in linea di massima, è stato indipendente dall'entità della perdita di peso e della bradicardia.

Tabella I.

Contenuto in N *totale* (N_t), N *proteico* (N_p), N *non proteico* (N_{np}) *e* N *aminico* (N_{am}) *del siero di sangue, del fegato, muscolo scheletrico e cuore di colombi in malnutrizione orizanica* (mg/100 g *di tessuto fresco*).

Colombo	SIERO DI SANGUE				FEGATO				MUSCOLO SCHELETRICO				CUORE			
	N_t	N_p	N_{np}	N_{am}	N_t	N_p	N_{np}	N_{am}	N_t	N_p	N_{np}	N_{am}	N_t	N_p	N_{np}	N_{am}
1	380	347	33	—	3402	3142	260	46	3570	3182	388	79	3080	2806	274	62
2	602	533	69	—	2492	2198	294	38	3738	3299	439	84	3234	2895	339	77
3	653	619	34	11	3231	2938	293	55	3689	3247	442	88	3248	2949	299	83
4	535	451	84	24	2562	2300	262	35	—	—	—	78	2870	2585	285	83
5	532	485	47	16	3332	2972	360	78	3619	3238	381	86	3276	2923	353	83
6	410	374	36	10	3584	3237	347	92	3546	3108	438	77	3233	2896	337	88
7	496	459	37	11	3509	3151	358	57	3658	3197	461	53	3263	2926	337	85
8	469	332	137	24	3106	2761	345	64	3404	2975	429	111	2994	2660	334	86
9	526	485	41	15	3822	3514	308	59	3800	3343	457	81	3360	3023	337	90
Media ± E.S.(1)	511 ±28,5	453 ±30,7	57 ±11,5	15,8 ±2,2	3226 ±149	2912 ±143	314 ±9,8	58 ±6,0	3628 ±149	3199 ±36,5	429 ±10,5	82 ±5,7	3173 ±52,5	2851 ±47,6	321 ±9,3	81 ±2,7

(1) E. S. = errore standard della media = $\frac{s}{\sqrt{n}}$ dove $s = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n-1}}$.

Tabella II.

*Significanza di alcune differenze tra i valori dell'*N *del siero di sangue* (S), *del fegato* (F), *muscolo scheletrico* (M) *e cuore* (C) *di colombi nomali, digiunanti e beriberici.*

(N totale = N_t; N proteico = N_p; N non proteico = N_{np}; N aminico = N_{am}).

COLOMBI	BERIBERICI				BERIBERICI/NORMALI						
Tessuti	C/F	M/C			S		M		C		
Frazione di N	N_{am}	N_t	N_p	N_{np}	N_{np}	N_{am}	N_t	N_{np}	N_t	N_p	N_{np}
ff.	23	455	348	108	29	5,8	283	66	244	193	31
» (di Student). .	3,44	6,57	5,69	7,72	2,77	2,64	2,50	2,69	2,63	2,22	2,23
<	0,01	0,001	0,001	0,001	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,05	0,05

COLOMBI	NORM./ BERIB.	BERIBERICI/DIGIUNANTI								DIGIUN./ BERIB.	
Tessuti	F	S			M		C			F	M
Frazione di N	N_{am}	N_t	N_p	N_{np}	N_t	N_p	N_t	N_p	N_{np}	N_{am}	N_{am}
ff..	43	158	165	28,5	207	181	309	281	27	34	17
t » (di Student). .	2,67	4,08	4,12	2,61	3,33	3,00	4,64	4,46	2,44	2,61	2,36
<	0,02	0,001	0,001	0,02	0,01	0,01	0,001	0,001	0,05	0,02	0,05

II) Dal confronto tra gli animali in malnutrizione orizanica e quelli normali (ved. Tabelle I e II della Nota precedente [7]), appare che:

a) il contenuto in N totale aumenta insignificativamente nel sangue e nel fegato, significativamente nel cuore e nel muscolo;

b) il contenuto in N proteico aumenta insignificativamente nel sangue, nel fegato e nel muscolo, significativamente nel cuore;

c) il contenuto in N non proteico aumenta insignificativamente nel fegato, significativamente nel sangue, nel muscolo e nel cuore;

d) il contenuto in N aminico diminuisce significativamente nel fegato, insignificativamente nel muscolo; aumenta insignificativamente nel cuore, significativamente nel sangue.

III) Dal confronto, infine, tra gli animali in malnutrizione orizanica e quelli in inanizione (ved. Tabelle I e II della Nota precedente [7]), appare che:

a) il contenuto in N totale e proteico è insignificativamente inferiore nel fegato, significativamente maggiore nel sangue, nel muscolo e nel cuore;

b) il contenuto in N non proteico è insignificativamente inferiore nel fegato, insignificativamente maggiore nel muscolo, significativamente maggiore nel sangue e nel cuore;

c) il contenuto in N aminico è significativamente inferiore nel fegato e nel muscolo, insignificativamente inferiore nel cuore, insignificativamente maggiore nel sangue.

Concludendo, nel cuore bradicardico del colombo, che per malnutrizione orizanica ha perso in media il 17,6 % del suo peso corporeo, si osserva, rispetto al cuore normale e maggiormente rispetto al cuore bradicardico per inanizione: *a*) insignificativo aumento percentuale dell'N totale (8,3) e dell'N proteico (7,3), laddove nel cuore bradicardico per inanizione acuta vi è una diminuzione insignificativa (2,2 e 3,3); *b*) significativo aumento percentuale dell'N non proteico (10,7), laddove nel cuore da inanizione non vi sono modificazioni; *c*) infine, all'aumento percentuale della frazione non proteica partecipa anche la quota aminica con un aumento del 9,5 % rispetto al cuore normale, laddove nel cuore da inanizione, pur non verificandosi, come ora abbiamo detto, una variazione della frazione non proteica globale, l'aumento della quota aminica è maggiore, pervenendo in media al 16,2 %.

Considerato infine che nelle anzidette condizioni di malnutrizione la perdita di peso del cuore corrisponde al 16 % circa, ne risulta che il cuore bradicardico e spesso aritmico per malnutrizione orizanica subisce una perdita netta di N sensibile per tutte le frazioni, ma soprattutto per la frazione proteica.

Dalla valutazione globale di quanto precede, si ricava che il cosidetto cuore beriberico, pur essendo a prima vista molto diverso dal cuore in inanizione, presenta con questo alcuni tratti comuni, in particolare la perdita netta dell'N proteico e, per quanto insignificativo statisticamente, l'aumento percentuale della quota aminica. Anzi non si può sottacere il fatto che il nesso sembra essere una specie di nesso diretto, in quanto alla minore perdita di peso del corpo e del cuore del colombo beriberico corrisponde una minore bradicardia, una minore perdita netta della quota proteica ed un minor aumento percentuale della quota aminica.

L'anzidetto comportamento è comprensibile, se si tien conto che la dieta orizanica, accanto alla tiaminodeficienza, induce nel colombo una condizione complessa di iponutrizione calorica e di malnutrizione proteica, per molti aspetti diversa dall'inanizione acuta.

Nel corso del digiuno assoluto, la rigenerazione proteica destinata a rimpiazzare le perdite tissulari avviene, là dove avviene e sin quando avviene, per un processo esclusivamente endogeno di sintesi proteica. Tale riparazione, pur permettendo un certo rinnovamento di determinate proteine in determinati tessuti ed organi, deve necessariamente saldarsi con un impoverimento del capitale protidico totale, che non risparmia neppure i

cosiddetti organi privilegiati, la cui integrità funzionale è indispensabile per la vita. È comprensibile così la perdita di peso e l'aumento dell'acqua del cuore da noi descritto ed abbiamo visto come si può spiegare l'aumento dell'N aminico e la PAS positività e l'involuzione delle cellule del Purkinje, la PAS positività della sostanza fondamentale e la bradicardia con o senza aritmia del cuore da inanizione.

Nel corso della malnutrizione orizanica, nella prima settimana, se l'animale dispone in partenza di una buona quota di proteine di riserva, pronte ad integrare le mediocri attitudini riparatrici delle proteine del riso, la risintesi tissulare avviene pressoché completamente e l'animale non perde di peso e non va incontro ad alterazioni della frequenza cardiaca e del ritmo. Ma instauratasi la tiaminodeficienza, che comporta l'insorgenza e la persistenza del vomito o, peggio ancora, della paresi o paralisi dell'ingluvie, quantità più o meno notevoli di alimento vengono sottratte alla digestione ed all'assorbimento, per cui l'inadeguatezza qualitativa della dieta diventa inadeguatezza calorica, il che aggrava ulteriormente l'inadeguatezza proteica. L'animale va incontro allora alla perdita progressiva di peso ed all'alterazione della frequenza cardiaca e del ritmo. Ma nella malnutrizione orizanica, rispetto all'inanizione acuta, la resintesi delle proteine corporee è resa più efficiente dal fatto della presenza nella dieta dell'amido. L'assorbimento di quantità maggiori o minori di glucosio facilita l'utilizzazione dell'N alimentare e dell'N endogeno, poiché è noto che l'energia derivante dalla degradazione ossidativa del glucosio non solo permette di risparmiare una certa quota di aminoacidi, ma viene impiegata anche per la formazione delle proteine dagli aminoacidi. Si spiega così il fatto che l'usura delle proteine ed il grado di bradicardia del cuore cosiddetto beriberico è inferiore a quella del cuore da inanizione.

Persistendo ed aggravandosi il vomito, diventando in conseguenza sempre più scarsi i protidi ed i glicidi assorbiti, è inevitabile che l'anabolismo proteico si svolga a mano a mano tanto più a spese del catabolismo tissulare, quanto più scarsi diventeranno i protidi ed i glicidi assorbiti. Pur tuttavia questi, rispetto all'inanizione acuta, saranno di una grande utilità, perché contribuiranno ad alleviare il catabolismo, i primi evitando l'usura di determinati aminoacidi indispensabili e la sintesi dei dispensabili, i secondi alleviando la neoglucogenesi dalle proteine. Tutto ciò non riesce ad evitare, però, che ad un certo momento il *pool* degli aminoacidi s'impoverisca di determinati aminoacidi essenziali e la resintesi di determinate proteine diventi più stentata, per cui è inevitabile la rottura dell'equilibrio azotato di determinati organi e, fra questi, del cuore. Da questo momento, il cuore da malnutrizione orizanica si trova in una condizione nutritiva che, pur essendo globalmente diversa, per alcuni aspetti del metabolismo protidico è quella stessa, seppure meno impegnativa, del cuore da inanizione e l'organo pertanto reagisce con le stesse ben note modalità: da qui, fra l'altro, la bradicardia con o senza aritmia, che resiste alla somministrazione di sola tiamina e prontamente regredisce con la somministrazione di adeguate quantità di

adeguato alimento e da qui la PAS positività delle cellule del Purkinje e della sostanza fondamentale.

Lo studio del comportamento delle varie frazioni dell'N del cuore e di altri organi del colombo bradicardico per inanizione o per malnutrizione rappresentava per noi uno dei tanti passi obbligati nel corso dello svolgimento del nostro piano organico di lavoro teso non solo a precisare il fondamento biochimico della bradicardia da inanizione e da malnutrizione, ma anche ad apportare qualche contributo alla conoscenza delle tuttora ignote ripercussioni dell'inanizione e delle malnutrizioni sui diversi organi del colombo.

I risultati ottenuti ed esposti in questa e nella precedente Nota [7] non possono quindi aver la pretesa di dimostrare il fondamento biochimico della bradicardia da inanizione e da malnutrizione, ma, con le considerazioni da essi suggerite possono con ragione aiutarci a distinguerlo e ad individuarlo in un disordine nutritivo protidico del cuore, comportante, tra l'altro, l'intralciata resintesi di una particolare quota proteica, quantitativamente modesta, ma altamente differenziata e forse peculiare del tessuto specifico.

Bibliografia.

[1] Livrea G., « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *15*, 453 (1953).
[2] Livrea G., « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *16*, 763 (1954).
[3] Livrea G. e Craxì P., « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *16*, 508 (1954).
[4] Livrea G., « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *24*, 577 (1958).
[5] Livrea G. e De Stefano F., « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *24*, 579 (1958).
[6] Livrea G. e De Stefano F., « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *24*, 749 (1958).
[7] Livrea G. e De Stefano F., « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *25*, fasc. 1–2 (1958).

Fisiologia. — *Ricerche sulla Motilità dell'esofago Umano. – V. Contributo sperimentale allo studio della fisiologia della giunzione gastro–esofagea nell'uomo* (*). Nota di Luigi Turano, Alfredo Curatolo e Enzo Salomoni, presentata (**) dal Corrisp. G. Amantea.

Le conoscenze al riguardo della giunzione esofago–gastrica sono tuttora controverse, anche alla luce dei più recenti contributi sperimentali.

Il meccanismo mediante il quale questo segmento di canale alimentare regola la comunicazione tra l'esofago e lo stomaco non è ancora chiaro.

In assenza di un apparato sfinterico intrinseco anatomicamente dimostrabile, nell'uomo, anche l'ipotesi di uno sfintere estrinseco costituito dal « crus diaframmatico » ha dovuto essere abbandonata in seguito a categoriche osservazioni sperimentali e cliniche. Nel passato, ha avuto un certo credito anche l'ipotesi che mentre il transito verso lo stomaco è assicurato dalla peristalsi esofagea il reflusso ne è ostacolato da un meccanismo valvolare esercitato dall'angolo esofago–gastrico: la plica gastrica che si costituisce in corrispondenza di detto angolo si comporterebbe come un lembo valvolare che accollandosi all'orificio cardiale lo chiude tanto più tenacemente quanto maggiore è la pressione intragastrica.

Frattanto l'ipotesi di uno *sfintere funzionale* affidato alle fibre circolari della muscolatura parietale dell'esofago terminale non è mai stata del tutto ripudiata.

Recentemente Dornhorst, Harrison e Pierce (1), sulla base di osservazioni raccolte nel corso di interventi operatori, hanno potuto riconfermare che né il *crus diaframmatico*, né l'*angolo esofago–gastrico* rivestono rilevante importanza per quanto riguarda la tenuta cardiale al reflusso. Gli stessi Autori affermano altresì di essere riusciti a localizzare il cardia nel punto in cui la pressione, rilevata mediante una sonda esploratrice progressivamente ritirata dallo stomaco verso l'esofago, si rovescia bruscamente da un livello superiore (intragastrico) ad un livello inferiore (intraesofageo). A causa di un così brusco passaggio da un regime pressorio all'altro gli Autori concludono ammettendo che il *cardias si comporta come una valvola probabilmente costituita per l'azione della « muscularis mucosae » sulla mucosa.* Creamer (2) successivamente associandosi a tali conclusioni produceva un fotogramma ricavato da un preparato istologico della regione cardiale, dal quale la struttura valvolare postulata da Dornhorst e coll. risulterebbe suggestivamente dimostrata.

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Radiologia dell'Università di Roma e presso l'Istituto di Fisiologia Umana della Università di Roma.

(**) Nella seduta del 10 giugno 1958.

(1) A. C. Dornhorst, K. Harrison, J. W. Pierce, « Lancet », *1*, 695 (1954).

(2) B. Creamer, « Lancet », *1*, 590, (1955).

D'altra parte più recentemente Fike, Code e Schlegel [3], servendosi di trasduttori elettromeccanici, hanno comparativamente studiato nel tratto gastro–esofageo il comportamento delle variazioni pressorie indotte dagli atti respiratori. Dallo studio statistico dei valori pressori medi corrispondenti alla fine dell'espirazione ed alla fine della inspirazione, gli Autori traggono motivo per affermare l'esistenza di un particolare gradiente di pressione gastro–esofageo. Partendo dalla cavità gastrica il trasduttore esploratore, che viene fatto progredire di pochi millimetri alla volta in senso gastro–esofageo, fa registrare un apprezzabile incremento prima di segnalare quella caduta della pressione ad un livello, notevolmente più basso di quello intragastrico, caratteristico dell'esofago cavitario; esisterebbe cioè, a livello della giunzione gastro–esofagea, un breve segmento nel cui lume vige un regime pressorio superiore a quello che vige nei livelli sotto– e soprastante. Tale regime di alta pressione sarebbe ovviamente la risultante di un alto tono della muscolatura parietale corrispondente.

Questi fatti, qualora confermati, parlerebbero in favore dell'esistenza di uno *sfintere funzionale*. Infatti un meccanismo valvolare sarebbe insostenibile se risultasse provata l'esistenza a monte dell'apparato valvolare di un regime pressorio contrario a quello richiesto per il funzionamento della valvola stessa.

Al fine di chiarire questo punto controverso abbiamo intrapreso lo studio sperimentale che fa l'oggetto della presente Nota.

Tecnica Sperimentale e risultati. – Nella convinzione che l'impiego del palloncino esploratore dovesse risultare più idoneo al fine di rilevare il comportamento del tono parietale di un viscere cavo, abbiamo adottato una sonda esofagea a tre palloncini, da noi realizzata per lo studio dell'esofago, e già descritta in una Nota precedente [4].

Nei soggetti in esperimento, la sonda esofagea veniva introdotta per la via nasale e fatta progredire finché il palloncino distale non aveva raggiunto la cavità gastrica. Ciò era ogni volta controllato radioscopicamente e documentato mediante una radiografia.

Dopo aver insufflato ciascun palloncino con 5 cc d'aria e avere attuato le connessioni con un apparato chimografico, era iniziata la registrazione grafica, tutto come descritto nella citata precedente Nota. In queste condizioni i tracciati corrispondenti ai primi due palloncini rappresentavano l'attività relativa ai diversi livelli di esofago, mentre il tracciato corrispondente al palloncino intragastrico descriveva una linea orizzontale, talvolta debolmente e regolarmente accidentata in rapporto con i movimenti respiratori.

Mentre il soggetto in esame era invitato a non deglutire che solo dietro nostro invito, la sonda veniva ritirata progressivamente verso l'esterno, di

(3) F. E. Fyke jr., Ch. F. Code, J. F. Schlegel, « Gastroenterologia », *86*, 135 (1956).

(4) L. Turano, A. Curatolo, E. Salomoni, questi « Rendiconti », vol. XXIV, fasc. 4, pp. 449–456 (1958).

un centimetro alla volta. Ad ogni movimento della sonda il soggetto era invitato a deglutire sicché il grafico continuava a testimoniare l'attività esofagea con i due palloncini intraesofagei e la relativa immobilità pressoria intragastrica con il palloncino distale. Quando quest'ultimo per effetto della progressiva estrazione della sonda veniva ad accollarsi contro l'orificio cardiale, la mano dell'operatore ne avvertiva la resistenza mentre il tracciato relativo segnalava un piccolo incremento di pressione corrispondente alla

Fig. 1. – Controllo radiografico per la esatta localizzazione dei palloncini nell'esofago.

forza di trazione esercitata sulla sonda da parte dell'operatore. Un atto deglutitorio del soggetto in esame scatenava un'onda peristaltica che veniva regolarmente registrata sul grafico dai tracciati corrispondenti agli esploratori intraesofagei, mentre il tracciato corrispondente al palloncino distale descriveva una deflessione di modesta entità e protratta per tutta la durata dell'onda peristaltica esofagea. Questo fenomeno è già stato da noi descritto ed utilizzato per l'esatta localizzazione dell'orificio cardiale e per lo studio dell'attività cardiale [5].

Una ulteriore estrazione della sonda da questa posizione, per un tratto non superiore ad un centimetro, determinava l'impegno del palloncino esplo-

(5) L. Turano, A. Curatolo, E. Salomoni, questi « Rendiconti », vol. XXIV, fasc. 5, pp. 573–576 (1958).

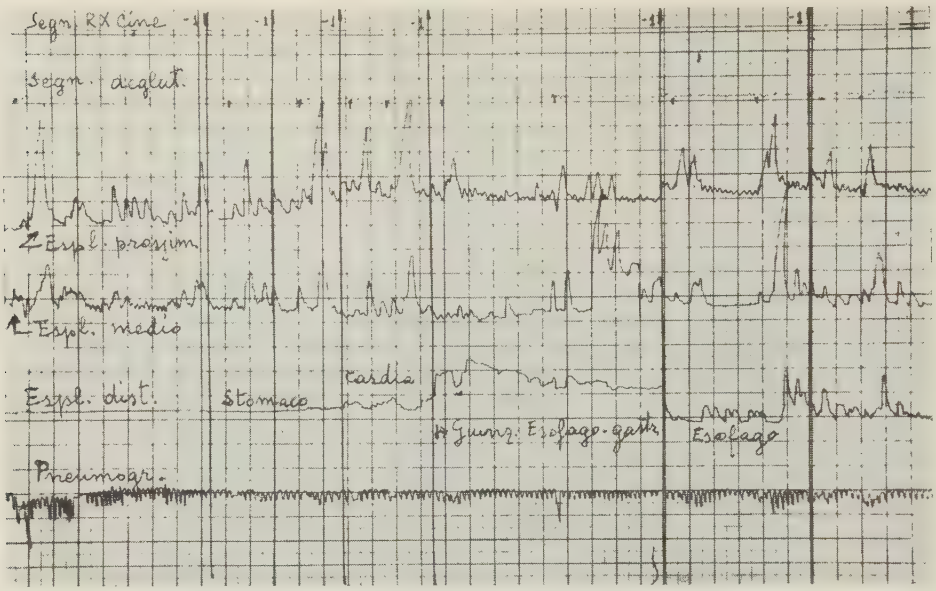


Fig. 2. – Esofagogramma che dimostra l'esistenza alla giunzione esofago–gastrica di alto tono parietale.

Le verticali con l'indicazione (— 1) indicano ciascuna il momento in cui la sonda viene ritirata di 1 cm. verso l'esterno.

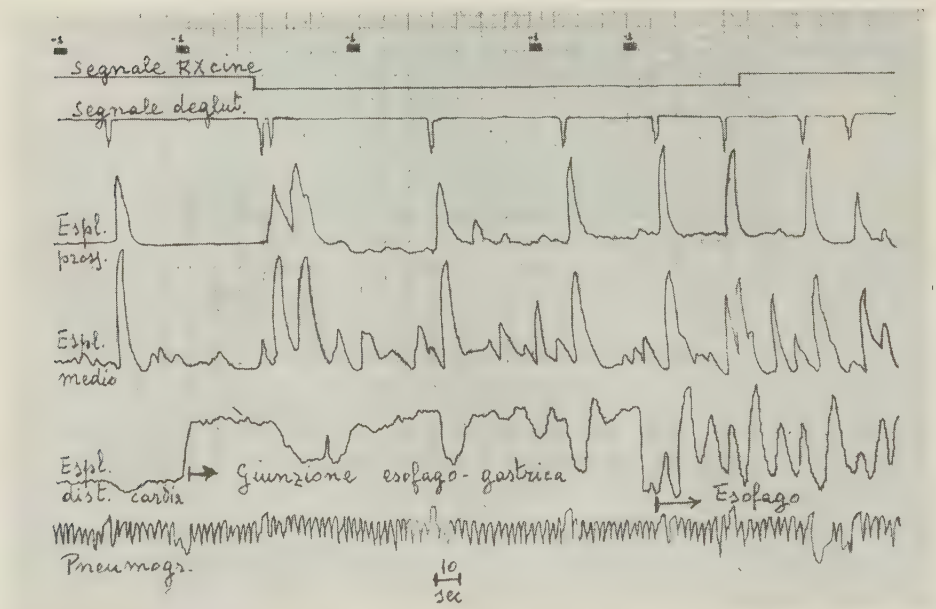


Fig. 3. – Esofagogramma che dimostra l'esistenza alla giunzione esofago–gastrica di alto tono parietale.

Le indicazioni (— 1) segnalano ciascuna il momento in cui la sonda viene ritirata di 1 cm. verso l'esterno. Questa figura dimostra in modo evidente il rilasciamento dell'ipertono relativo in coincidenza di ogni evento peristaltico (vedi Testo).

ratore distale in una zona dell'esofago terminale le cui pareti esercitavano su di esso una pressione laterale di 10–12 mm di Hg più alta di quella cui lo stesso palloncino era sottoposto mentre occupava la cavità dello stomaco. Finché l'esofago era mantenuto inattivo, tale pressione laterale restava sostenuta ed immodificata, ma l'insorgenza di un atto deglutitorio e dell'onda peristaltica conseguente, nonché l'insorgenza da qualsiasi livello esofageo di un'onda peristaltica secondaria, determinava un notevole cedimento della pressione laterale sopradescritta, segnalato nel tracciato corrispondente da una deflessione lenta e protratta per tutta la durata dell'onda peristaltica con la quale coincide. Questo fenomeno decorre come quello descritto a livello dell'orificio cardiale e dal quale si differenzia nel tracciato solo per una maggiore profondità della corrispondente deflessione. Pertanto ci è apparso evidente che il particolare alto tono di riposo del segmento indicato più sopra ha inizio appunto a livello dell'orificio cardiale per estendersi per quasi tutto il tratto dell'esofago sotto–ampollare.

Una ulteriore trazione della sonda verso l'esterno, per un tratto variabile di uno o due centimetri, aveva come risultato il disimpegno del palloncino distale dalla zona suddetta ed il suo passaggio nell'esofago cavitario propriamente detto. Ciò era segnalato dal tracciato corrispondente che registrava una caduta della pressione ad un livello molto più basso, corrispondente a 4–6 mm di Hg in meno rispetto al livello intragastrico.

Alternativamente, facendo ora deglutire la sonda ed ora ritirandola progressivamente e cautamente verso l'esterno, si poteva con il palloncino distale attraversare più volte la zona descritta, sempre verificandone a quel livello lo stesso comportamento.

Il controllo radiografico (fig. 1) con la sonda in posizione, provvista di un opportuno repere radiopaco in corrispondenza di ciascun palloncino, dimostrava chiaramente che la zona descritta, corrispondente al repere distale, è situata nell'esofago terminale, nel tratto sotto ampollare, che bene si può identificare con la cosiddetta «giunzione esofago–gastrica».

Tenendo conto delle dimensioni del palloncino esploratore e dello spostamento richiesto per il suo impegno dallo stomaco e per il suo disimpegno nell'esofago, abbiamo arguito che il segmento in parola deve avere una lunghezza, variabile da individuo ad individuo, di 2–4 cm.

I grafici riportati nelle figg. 2 e 3 dimostrano i fenomeni pressori rilevati nella zona suddetta ed i loro rapporti con quelli esofagei simultaneamente registrati. Appare evidente l'antagonismo d'azione tra la muscolatura parietale del segmento in parola e quella del complessivo esofago soprastante.

I fatti esposti ci sono apparsi sempre riproducibili in tutti i soggetti nei quali sono stati ricercati (6 casi). Tali fatti, i quali sono in accordo con quelli che con tecnica dissimile erano già stati rilevati da Fike, Code e Schlegel, *autorizzano ad ammettere l'esistenza di una funzione sfinterica a livello della giunzione esofago–gastrica.* Un eventuale dispositivo valvolare non potrebbe essere invocato se non come meccanismo accessorio tutto dipendente dalla funzione sfinterica di questa regione.

Fisiologia. — *Iperglicemia da somministrazione di streptomicina e di diidrostreptomicina ad alte dosi nel colombo* (*). Nota (**) di PIETRO D'ARCANGELO, presentata dal Corrisp. G. AMANTEA.

In precedenti esperienze, di cui abbiamo già riferito [1,2], avevamo osservato che la somministrazione intramuscolare di forti dosi di streptomicina o di diidrostreptomicina provoca nel colombo, oltre alla comparsa di un caratteristico quadro di intossicazione acuta, già dettagliatamente descritto da Cerquiglini e Chiucini [3], un netto aumento della concentrazione delle sostanze riducenti del sangue. In quelle esperienze avevamo limitato la nostra indagine agli effetti di dosi di antibiotico pari a 0,40 g/kg di peso corporeo, per la streptomicina, e a 0,60–0,70 g/kg per la diidrostreptomicina, dosi capaci di provocare costantemente un'intossicazione acuta grave e assai vicine alla dose minima letale accertata per il colombo dagli Autori suddetti; secondo Chiucini [4] anche con dosi nettamente inferiori a queste (fino a 0,20 g/kg, per la streptomicina, e a 0,40 g/kg per la diidrostreptomicina) è possibile provocare in questo animale il quadro completo dell'intossicazione acuta (profonda depressione dell'attività motoria, sensitiva e sensoriale, che porta ad uno stato comatoso, con ipotonia muscolare generalizzata, bradicardia, bradipnea e ipotermia).

Nelle nostre esperienze non avevamo rilevato alcuna chiara relazione tra il comportamento della concentrazione ematica delle sostanze riducenti e l'evoluzione e la gravità della sintomatologia tossica; in due animali, per di più, uno intossicato con streptomicina e l'altro con diidrostreptomicina, non si verificò alcun aumento delle sostanze riducenti ematiche, pure avendo essi presentato un quadro di intossicazione acuta analogo per gravità e per durata a quello osservato negli altri colombi presi in esame. Ciò induceva a ritenere che l'aumento delle sostanze riducenti del sangue rappresentasse l'effetto di un'azione del farmaco non necessariamente legata a quella responsabile della comparsa della sintomatologia suddetta. Un chiarimento su questo punto si sarebbe potuto ottenere studiando parallelamente il comportamento delle sostanze riducenti ematiche e le modificazioni della sintomatologia tossica col variare della dose di farmaco somministrata.

Nella discussione dei risultati allora ottenuti avevamo, inoltre, prospettato l'eventualità che l'aumento delle sostanze riducenti da noi osser-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Roma nell'anno 1957.

(**) Pervenuta all'Accademia il 3 luglio 1958.

(1) P. D'ARCANGELO, « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. », *31*, 1118 (1955).

(2) P. D'ARCANGELO, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali), ser. VIII, vol. XXIV, fasc. 3 (1958).

(3) S. CERQUIGLINI e G. CHIUCINI, « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. », *25*, 1130 (1949); *26*, 1366 (1950).

(4) G. CHIUCINI, « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. », *26*, fasc. 9–10 (1950).

vato potesse essere, in tutto o in parte, espressione della quantità di farmaco assorbita e passata nel sangue dell'animale, e ciò tenendo conto delle proprietà riducenti possedute, come è noto, dai due antibiotici. Tale eventualità si presentava, invero, poco probabile, sia in considerazione del mancato aumento delle sostanze riducenti nel sangue dei due colombi suddetti, sia in base alla misura del potere di riduzione dimostrato dai due antibiotici sul reattivo del metodo di Hagedorn e Jensen (metodo che avevamo impiegato per le nostre indagini). Tuttavia, tenuto conto che nel colombo i valori glicemici ottenuti con questo metodo si discostano sensibilmente da quelli della reale concentrazione ematica di glicoso (in ragione dell'elevato contenuto di sostanze riducenti non-glicoso nel sangue di questo animale [5]), si rendevano necessarie ulteriori indagini, oltre che per poter escludere con certezza l'eventualità di cui sopra, per accertare se l'aumento delle sostanze riducenti ematiche fosse dovuto al glicoso o ad altra sostanza riducente non-glicoso.

Riferiamo in questa nota i risultati di due serie di indagini eseguite allo scopo di chiarire questi due punti: *a*) relazioni esistenti tra comportamento delle sostanze riducenti ematiche e sintomatologia dell'intossicazione acuta; *b*) natura delle sostanze riducenti responsabili dell'aumento osservato nelle precedenti esperienze.

Su un primo gruppo di 20 colombi abbiamo studiato gli effetti di dosi variabili di antibiotico sulla concentrazione ematica delle sostanze riducenti, impiegando per il dosaggio di queste il metodo di Hagedorn e Jensen e seguendo la stessa tecnica sperimentale adottata nelle precedenti esperienze. Abbiamo limitato l'indagine agli effetti della sola diidrostreptomicina (stante l'attuale difficile reperibilità della streptomicina isolata, soppiantata quasi totalmente nell'uso terapeutico dal suo derivato idrogenato o da associazioni dei due antibiotici), per dosi comprese tra 0,10 e 0,60 g/kg. In alcuni colombi l'effetto delle singole dosi è stato esplorato con esperimenti in serie a partire da quelle più basse, in altri da quelle più elevate, senza che per questo siano state notate differenze negli effetti di ciascuna dose. Tra un esperimento e l'altro si è lasciato trascorrere un tempo sufficiente (circa 15 giorni) perché l'animale si ristabilisse completamente dagli effetti della somministrazione precedente. Durante il periodo delle esperienze sono state più volte eseguite su ciascun animale prove di controllo, dosando le sostanze riducenti del sangue un ugual numero di volte e con le stesse modalità che nelle prove con la diidrostreptomicina. Nella fig. 1 sono rappresentate le curve esprimenti il comportamento della concentrazione ematica delle sostanze riducenti dopo somministrazione delle diverse dosi di antibiotico; i valori di ogni curva rappresentano la media di quelli ottenuti nei diversi animali.

(5) M. J. GULLAND e R. A. PETERS, « Biochem. Jour. », *24*, 91 (1930); P. D'ARCANGELO, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali), vol. XXV, fasc. 1-2 (1958).

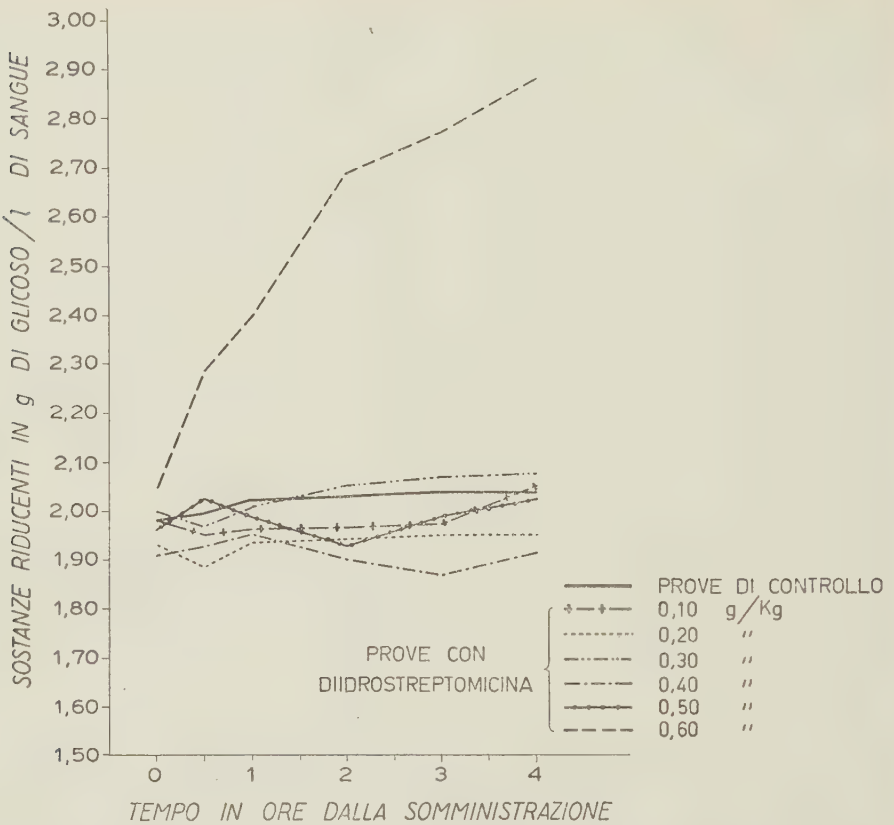


Fig. 1. – Comportamento del tasso delle sostanze riducenti ematiche del colombo dopo somministrazione di diidrostreptomicina a diverse dosi.

Abbiamo osservato i seguenti fatti:

a) A conferma di quanto da noi rilevato nelle precedenti esperienze, la somministrazione intramuscolare di una dose di diidrostreptomicina di 0,60 g/kg ha provocato nella maggioranza dei colombi un netto aumento della concentrazione ematica delle sostanze riducenti. Questo si è mantenuto per tutta la durata delle nostre osservazioni, fino a 4 h dall'iniezione. Ad eccezione di un solo caso, il tasso delle sostanze riducenti è tornato a valori pressoché normali entro le prime 24 h dalla somministrazione. L'aumento è mancato in due animali, pur avendo questi presentato tutta la sintomatologia caratteristica dell'intossicazione acuta: in uno di questi, anzi, venuto a morte dopo alcune ore dall'iniezione, si è osservata una modica e progressiva diminuzione della concentrazione delle sostanze riducenti.

b) La somministrazione di dosi di diidrostreptomicina comprese tra 0,10 e 0,50 g/kg non ha avuto generalmente effetto alcuno sulla concentrazione ematica delle sostanze riducenti. In un solo animale è comparso un lieve aumento per dosi di 0,40 e 0,50 g/kg; in altri due, al contrario, le stesse dosi hanno provocato una sensibile diminuzione.

c) I primi segni dell'azione tossica del farmaco (lievi adinamia e ipotonia muscolare, lievissima ipotermia) sono comparsi in alcuni colombi già dopo somministrazione di una dose di 0,10 g/kg. Aumentando la dose a 0,20 e 0,30 g/kg la sintomatologia tossica si è fatta evidente in tutti gli animali ed è andata progressivamente aggravandosi. Dosi di 0,40 g/kg hanno provocato costantemente la comparsa di tutta la sintomatologia dell'intossicazione acuta grave, con stato comatoso della durata di 2–3 h, che in un caso si è aggravato sino all'esito letale. Lo stesso quadro è stato osservato con dosi di 0,50 e 0,60 g/kg; tali dosi sono risultate mortali, rispettivamente, nel 14 % e nel 46 % degli animali trattati. Nei sopravvissuti la durata del coma è stata all'incirca uguale, o di poco maggiore, a quella osservata con dosi di 0,40 g/kg.

d) In accordo con quanto avevamo osservato nelle precedenti indagini, in nessuno degli animali in cui è comparso l'aumento delle sostanze riducenti del sangue è risultata evidente una relazione tra evoluzione della sintomatologia e andamento della curva esprimente la concentrazione di quelle: in ogni caso la loro concentrazione si è mantenuta sui valori raggiunti durante il coma, oppure ha continuato ad aumentare, anche con il miglioramento e la risoluzione del quadro tossico.

Per accertare la natura delle sostanze riducenti responsabili dell'aumento abbiamo studiato su 5 colombi il comportamento della concentrazione ematica dello zucchero fermentescibile e di quella delle sostanze riducenti non fermentescibili, dopo somministrazione di una dose di streptomicina o di diidrostreptomicina, rispettivamente di 0,40 g/kg e di 0,60 g/kg. Due degli animali sono stati intossicati con streptomicina, gli altri con diidrostreptomicina. Per il dosaggio dello zucchero fermentescibile (che, per quanto è noto, si considera praticamente costituito tutto da glucosio) abbiamo seguito una tecnica, da noi esposta in altra nota [6], che consente di determinare su piccoli quantitativi di sangue (0,2 ml) il valore della concentrazione delle sostanze riducenti totali e quello delle sostanze riducenti residue dopo fermentazione con lievito: la concentrazione dello zucchero fermentescibile si calcola per differenza da questi due valori. Per il resto abbiamo adottato la stessa tecnica seguita nelle nostre precedenti indagini (loc. cit., 1 e 2). Le osservazioni sono state protratte per un tempo di 4–5 h dalla somministrazione dell'antibiotico. I risultati sono espressi dai grafici della fig. 2: da essi appare chiaro che la sostanza responsabile dell'aumento in esame è esclusivamente lo zucchero fermentescibile del sangue.

Dei 5 colombi esaminati, 3 (1 trattato con streptomicina e 2 con diidrostreptomicina) hanno presentato la sintomatologia completa dell'intossicazione acuta grave, risultata mortale in un caso (colombo n. 5); negli altri 2 (il n. 2 e il n. 4) è comparso solo un modico grado di adinamia e di ipotonia muscolare, con lieve ipotermia: ciò nonostante in entrambi si è avuto un netto aumento della glicemia.

(6) P. D'ARCANGELO, «Arch. Sci. Biol.» (in corso di stampa).

Resta, così, accertata la comparsa nel colombo di una netta e prolungata iperglicemia dopo somministrazione di dosi particolarmente elevate di streptomicina o di diidrostreptomicina. Dall'esame dei risultati delle presenti esperienze e di quelle precedenti, le variazioni della glicemia non appaiono in rapporto con il resto della fenomenologia tossica provocabile con dette sostanze. L'iperglicemia, infatti, non è mai comparsa dopo somministrazione di dosi di diidrostreptomicina di 0,40 e di 0,50 g/kg, che pure hanno costantemente provocato un'intossicazione acuta grave e in qualche caso mortale. Inoltre, per dosi di

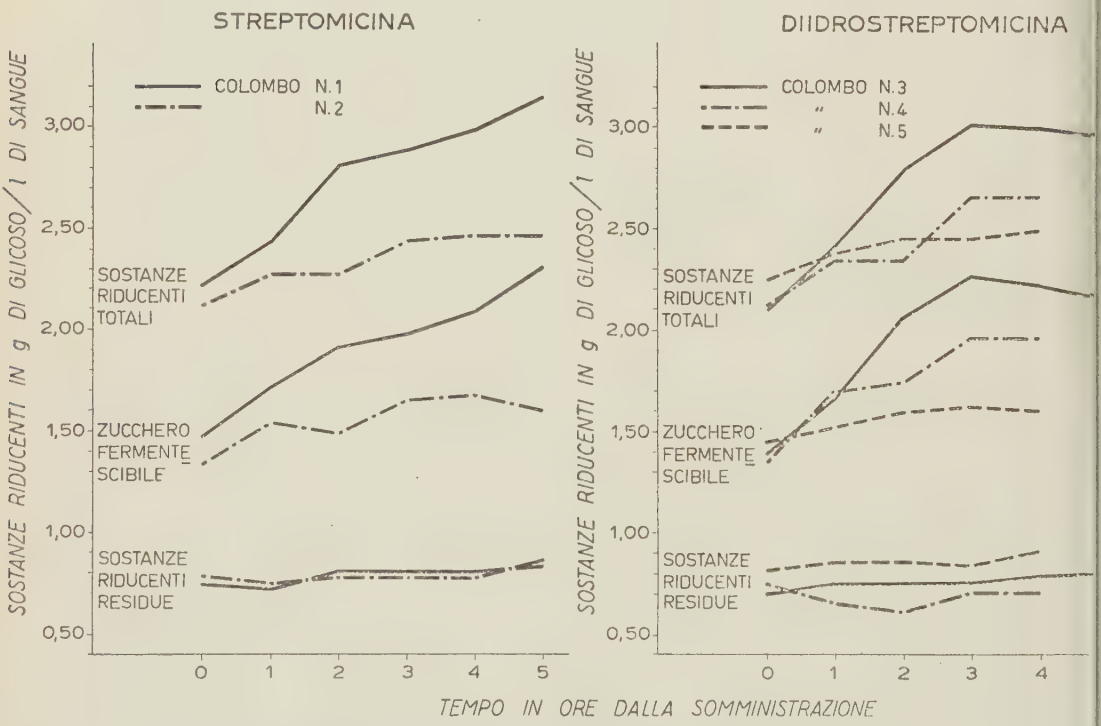


Fig. 2. – Comportamento dei valori delle concentrazioni delle sostanze riducenti totali, dello zucchero fermentescibile e delle sostanze riducenti non fermentescibili, nel sangue del colombo dopo somministrazione di dosi elevate di streptomicina (0,40 g/kg) o di diidrostreptomicina (0,60 g/kg).

streptomicina o di diidrostreptomicina, rispettivamente di 0,40 e di 0,60 g/kg, l'iperglicemia, comparsa nella maggioranza degli animali, non ha presentato un'evoluzione parallela a quella della sintomatologia dell'intossicazione; per di più, in alcuni colombi trattati con queste dosi l'iperglicemia è mancata, pur con un quadro tossico grave e talora mortale, in altri, al contrario, ad una netta iperglicemia non ha fatto riscontro la comparsa di gravi segni di intossicazione. Queste osservazioni sembrano convalidare l'ipotesi, da noi avanzata all'inizio della presente nota, che l'effetto iperglicemizzante osservabile nel colombo in seguito a somministrazione di forti dosi di streptomicina o di diidrostreptomicina sia dovuto ad un'azione di queste due sostanze indipendente da quella responsabile del caratteristico quadro di intossicazione da esse provocato.

Fisiologia. — *Risposte rotatorie e postrotatorie cerebellari e nistagmo nucale del piccione* (*). Nota (**) di Torquato Gualtierotti e Dino Passerini, presentata dal Socio R. Margaria.

Ricerche precedenti (1) avevano dimostrato che esiste una differenza sostanziale tra le risposte elettriche cerebellari postrotatorie del piccione viaggiatore e quelle del piccione normale. Nel piccione domestico si otteneva soltanto una scarica postuma brevissima (qualche decimo di secondo), immediatamente seguente la fine della rotazione: nel piccione viaggiatore a questa si aggiungeva una serie di scariche postume ritmiche a forma di fuso che duravano parecchi secondi.

Poiché negli uccelli il nistagmo avviene a carico di contrazioni ritmiche dei muscoli della nuca, si prospettò la possibilità che le scariche ritmiche registrate da elettrodi infissi nel cervelletto fossero in realtà potenziali muscolari dai muscoli nucali diffusi elettricamente agli elettrodi appoggiati sul cervelletto. Questa ipotesi era resa improbabile dal fatto che le scariche postume ritmiche si osservavano soltanto nei piccoli viaggiatori e non in quelli normali; si è voluto ad ogni modo ottenere dati maggiormente probativi sulla indipendenza dei potenziali cerebellari da quelli muscolari.

Sono stati eseguiti tre gruppi di ricerche nelle quali venivano contemporaneamente registrati i potenziali elettrici del cervelletto, dei muscoli del collo e le accelerazioni centripete e tangenziali.

Nel primo gruppo la registrazione della risposta elettrica rotatoria e postrotatoria cerebellare è stata eseguita nell'animale curarizzato con succinilcolina, 1 mg pro Kg, endovena (fig. 1). Sia durante che immediatamente dopo la rotazione non viene registrata alcuna risposta muscolare, come del resto era da aspettarsi data la profonda curarizzazione che provoca un rilasciamento completo della muscolatura. Tuttavia anche in questo caso sono state registrate nel piccione viaggiatore sia le risposte rotatorie che quelle postrotatorie con le caratteristiche consuete (1).

Nel secondo gruppo sono state registrate le risposte rotatorie e postrotatorie nel piccione normale sottoposto ad un'accelerazione centripeta tale da ottenere nistagmo prolungato. Scariche ritmiche *muscolari* sono presenti sia durante che dopo la rotazione (fig. 2): si susseguono per parecchi secondi,

(*) Dal Laboratorio di Fisiologia Umana dell'Università di Milano.

Questa ricerca è stata finanziata dall'Ufficio di Ricerca Scientifica dell'Air Research and Development Command, United States Air Force, tramite il suo Ufficio Europeo, secondo il Contratto AF 61(052)-23.

(**) Pervenuta all'Accademia il 2 agosto 1958.

(1) B. Schreiber, T. Gualtierotti e D. Mainardi, « Rendic. Ist. Lomb. Sci. Lett. », *88*, 860 (1955); B. Schreiber, T. Gualtierotti e D. Mainardi, « Boll. Zool. », *23*, 17 (1956); B. Schreiber, T. Gualtierotti e D. Mainardi, « Rendic. Ist. Lomb. Sci. Lett. », *92*, 187 (1957).

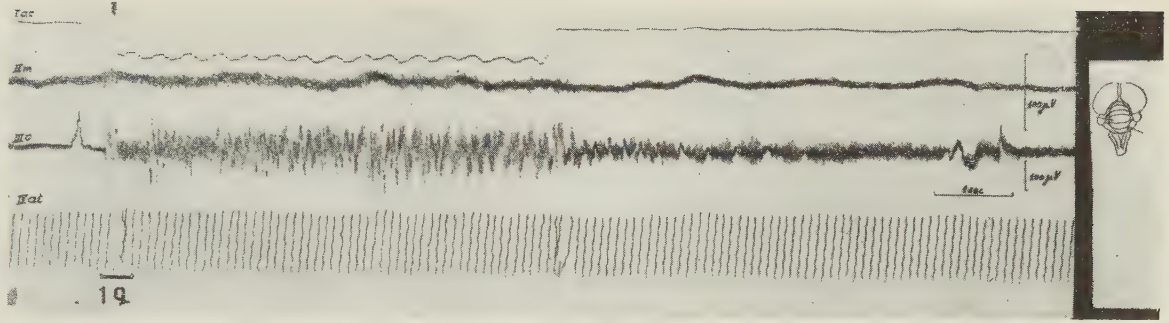


Fig. 1. – Piccione viaggiatore, in profonda curarizzazione da succinilcolina e respirazione artificiale. Rotazione orizzontale.

I *ac*: accelerazione centripeta = 0,1 g. II *m*: elettromiogramma registrato dai muscoli del collo controlaterali rispetto al senso di rotazione. Si notano assai scarsi potenziali d'azione muscolari durante le rotazione e nessuno dopo la rotazione, a causa della curarizzazione quasi completa. III *c*: elettrocerebellogramma (nello schema a destra posizione degli elettrodi). IV *at*: accelerazione tangenziale registrata trasversalmente, asse dei tempi = 100 msec.

Si notino le scariche postume cerebellari (indicate da frecce) in assenza di qualsiasi attività muscolare.

Tempo, taratura dell'accelerometro tangenziale e amplificazione indicati nella figura.

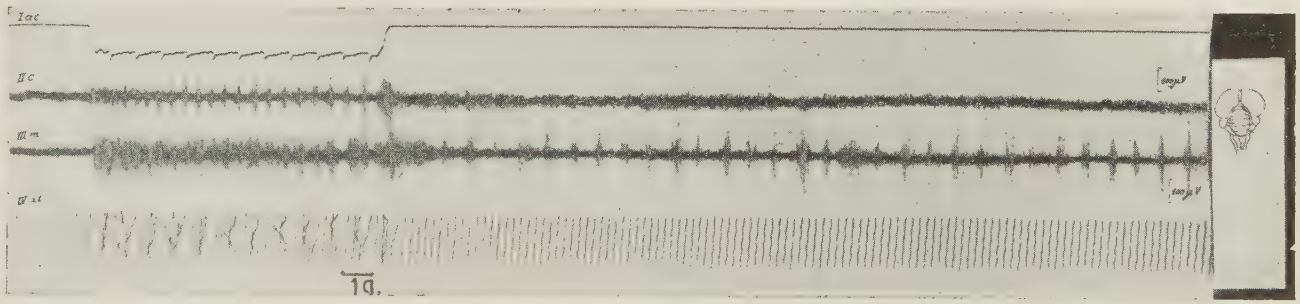


Fig. 2. – Piccione domestico. Rotazione orizzontale e contemporanei movimenti verticali, a 90° col piano di rotazione, sincroni con ogni giro.

I *ac*: accelerazione centripeta = 0,22 g. Si notino le punte dirette verso il basso seguenti ognigiro, dovute ai movimenti ortogonali. II *c*: elettrocerebellogramma (nello schema a destra posizione degli elettrodi). III *m*: elettromiogramma dei muscoli del collo controlaterali rispetto al senso di rotazione. IV *at*: accelerazione tangenziale registrata trasversalmente, asse dei tempi = 100 msec.

Si notino nell'elettromiogramma postrotatorio ampie scariche ritmiche dovute al nistagmo. Contemporaneamente non vi è alcuna variazione nell'attività del cervelletto. Durante la rotazione vi è periodico aumento dell'attività sia muscolare che cerebellare dovuto all'accelerazione tangenziale prodotta dai moti verticali aggiunti alla rotazione. L'accelerazione tangenziale di tali moti equivale a circa 0,5 g.

sono di grande ampiezza e sono costituite da treni ritmici di potenziali ad una frequenza di circa 3–4 al secondo. Durante la rotazione sono state registrate risposte cerebellari sincrone con quelle muscolari. Le risposte all'accelerazione tangenziale all'inizio e alla fine sono pure assai simili tanto sul cervelletto che sui muscoli nucali. Non è stata registrata tuttavia alcuna scarica postuma cerebellare dopo la fine della rotazione, immediatamente o più tardi, malgrado la persistenza di ampie scariche dei muscoli nucali, espressione del nistagmo. È evidente quindi che in questo caso non vi è alcuna diffusione dei potenziali muscolari agli elettrodi registratori cerebellari.

Nel terzo gruppo di esperimenti sono state registrate contemporaneamente le risposte rotatorie e postrotatorie cerebellari e muscolari nel piccione viaggiatore, variando la velocità di rotazione. Lo scopo di questo esperimento era di stabilire se esistesse identità o differenza di soglia fra il nistagmo e le risposte postume cerebellari (fig. 3). Come risulta dai tracciati della fig. 3 *A*, ad un certo valore di accelerazione centripeta (0,014 g) durante la rotazione si osserva una contrazione tonica della muscolatura della nuca, preceduta, all'inizio e alla fine della rotazione, da un'ampia contrazione muscolare espressa da un aumento notevole della ampiezza dell'elettromiogramma. L'attività cerebellare invece presenta variazioni ritmiche di ampiezza che non hanno alcun riscontro nell'elettromiogramma.

La scarica postrotatoria muscolare ha caratteristiche temporali del tutto diverse da quella cerebellare. Infatti, mentre dai muscoli nucali si registra un elettromiogramma continuo di grande ampiezza, corrispondente alla contrazione tonica della muscolatura del collo, dal cervelletto si osservano le caratteristiche scariche postume. Per di più, immediatamente dopo la fine della rotazione, mentre l'attività elettrica muscolare, per un periodo di quasi un secondo, è alla sua massima ampiezza, l'elettrocerebellogramma rimane di ampiezza normale.

Da questi risultati si può dedurre che neppure vi è identità di soglia fra il nistagno e le scariche postume cerebellari nel piccione viaggiatore, e che la soglia per le scariche postume cerebellari è più bassa di quella per il nistagmo.

Aumentando la velocità di rotazione e quindi l'accelerazione centripeta (fig. 3 *B*) si osservano dopo la rotazione scariche ritmiche da nistagmo anche registrando dai muscoli nucali. Tali scariche ritmiche sembrano essere coincidenti con quelle contemporaneamente registrate dal cervelletto: queste ultime sono fortemente aumentate sia per l'ampiezza che per la frequenza dei treni. Nel momento in cui le scariche postume cerebellari sono coincidenti nel tempo con il nistagmo nucale, sembra che la scarica cerebellare e quella muscolare siano simultanee. Non vi è però alcuna relazione per quanto riguarda la forma fra le risposte cerebellari e quelle muscolari. A questo valore di accelerazione centripeta (0,06 g) le scariche ritmiche dovute al nistagmo nucale si arrestano assai prima delle scariche postume cerebellari. Queste infatti continuano per 6–7 secondi, mentre le scariche dovute al nistagmo registrato dai muscoli nucali si arrestano dopo 2–3 secondi.

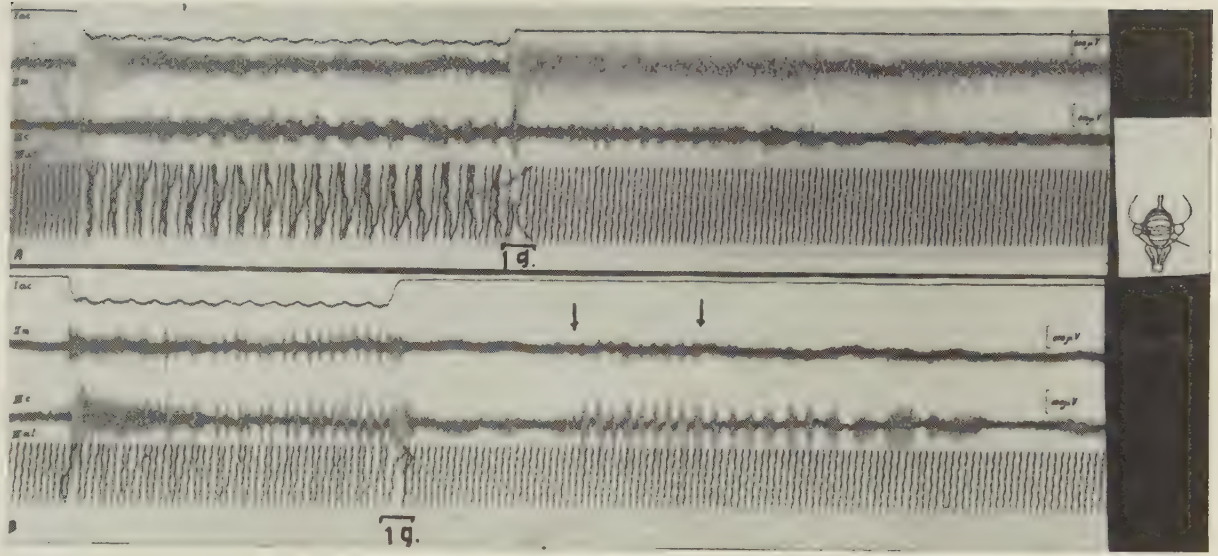


Fig. 3. – Piccione viaggiatore. Rotazione orizzontale.

I *ac*: accelerazione centripeta.

II *m*: elettromiogramma dei muscoli del collo controlaterali rispetto al senso di rotazione.

III *c*: elettrocerebellogramma (nello schema a destra posizione degli elettrodi).

IV *at*: accelerazione tangenziale registrata trasversalmente, asse dei tempi = 100 msec.

A: accelerazione centripeta = 0,014 g. Si notino scariche postume cerebellari mentre il nistagmo nucale è ancora assente ed è sostituito da una contrazione volontaria tonica dei muscoli del collo.

B: accelerazione centripeta = 0,06 g. Inizia il nistagmo nucale mentre viene inibita la contrazione volontaria dei muscoli del collo. Contemporaneamente aumenta l'ampiezza e il numero delle scariche postume cerebellari. Nella zona tra le frecce le scariche cerebellari e muscolari coincidono per quanto leggermente fuori fase.

Segnatempo 1/4 sec. Taratura dell'accelerometro tangenziale e amplificazione indicate nella figura.

Si può dunque concludere: 1° che non si rileva alcuna relazione temporale tra il nistagmo nucale e le scariche postume cerebellari; 2° che le soglie dei due fenomeni sono diverse; 3° che quando le scariche di potenziali di azione dei muscoli della nuca da nistagmo si accompagnano alle scariche postume cerebellari, c'è una tendenza per i due fenomeni a sincronizzarsi.

Mentre esiste un certo rapporto tra il nistagmo nucale e le scariche postume cerebellari del piccione viaggiatore, si può escludere che dette scariche postume siano dovute a un banale fenomeno elettrico di diffusione dell'elettromiogramma agli elettrodi che registrano dal cervellett.o Non è affatto sorprendente del resto che esista un collegamento funzionale fisiologico tra nistagmo e risposta cerebellare alle accelerazioni. Al cervelletto infatti convergono sia vie dirette, che partendo dal vestibolo raggiungono la parte inferiore del lobo posteriore, sia fibre che connettono quest'organo con i recettori muscolari o il sistema intrafusale, costituendo l'arco riflesso gamma muscolo–spino–cerebellare. Inoltre, poiché negli uccelli il nistagmo è un riflesso a sede spinale di origine vestibolare, sugli stessi centri spinali terminano necessariamente anche vie provenienti dal cervelletto. Attraverso queste convergenze si può stabilire una mutua influenza tra i circuiti nervosi che determinano le risposte vestibolari dirette della corteccia cerebellare e quelle riflesse che provocano la contrazione ritmica dei muscoli nucali.

Il nistagmo, quindi, e la risposta cerebellare all'accelerazione, che hanno ovviamente un eguale punto di partenza, possono influenzarsi reciprocamente attraverso vie nervose ben definite, ma sono indubbiamente distinti l'uno dall'altro in quanto è possibile avere: *a*) il solo nistagmo e non la risposta cerebellare (piccione normale); *b*) la sola risposta cerebellare postrotatoria e non il nistagmo (piccione viaggiatore curarizzato, o sottoposto ad una accelerazione rotatoria inferiore alla soglia per il nistagmo).

A. Signorini e G. Cotronei.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta dell'8 novembre 1958

Presiede il Socio MAURO PICONE

NOTE DI SOCI

Analisi matematica. — *Intervallo d'esistenza e limitazioni per la soluzione di un sistema di equazioni differenziali ordinarie.* Nota (*) del Socio MAURO PICONE e di WOLF GROSS, presentata dal Socio M. PICONE (**).

Siano: D un dominio dello spazio euclideo a p dimensioni, del cui punto generico u indicheremo con $u_1, u_2, \cdots, u_p$ le coordinate; I un intervallo (finito o infinito) dell'asse x; $\varphi_h(x, u)$ $(h = 1, 2, \cdots, p)$ assegnate funzioni reali del punto $(x, u) \equiv (x, u_1, u_2, \cdots, u_p)$ continue nel dominio $I \times D$; x_0 un punto di I e $u^{(0)}$ un punto di D. È ben nota l'importanza, tanto teorica che pratica, del possesso di criteri atti ad assicurare l'esistenza, in una prescritta parte di I, ad una soluzione del sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$\frac{du_h}{dx} = \varphi_h(x, u) \qquad (h = 1, 2, \cdots, p), \tag{1}$$

verificante le condizioni iniziali

$$u_h(x_0) = u_h^{(0)} \qquad (h = 1, 2, \cdots, p), \tag{2}$$

e di limitazioni delle componenti $u_h(x)$ della soluzione stessa.

Uno di questi criteri è fornito dal seguente teorema che, ritenendolo nuovo, mi permetto di comunicare all'Accademia.

(*) Redatta nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta dell'8 novembre 1958.

Essendo $f_h(x, u)$ *e* $g_h(x, u)$ $(h = 1, 2, \cdots, p)$ *funzioni continue in* $I \times D$ *si abbia ivi*:

$$\varphi_h(x, u) \equiv f_h(x, u) - g_h(x, u)\, u_h, \tag{3}$$

e, detto J *l'intervallo di* I, *alla destra di* x_0, *si abbia, in* $J \times D$,

$$g_h(x, u) \geqq 0, \tag{4}$$

esistendo $2p$ numeri

$$m_1, m_2, \cdots, m_p \quad , \quad M_1, M_2, \cdots, M_p,$$

tali che, comunque si prenda un punto (x, u) *di* $J \times D$, *si abbia sempre*

$$m_h \leqq \frac{f_h(x, u)}{g_h(x, u)} \leqq M_h. \tag{5}$$

Allora, se esiste una soluzione $u(x)$ *delle* (1) *e* (2), *le sue componenti devono, in* J, *verificare le limitazioni*:

$$\min [m_h, u_h^{(0)}] \leqq u_h(x) \leqq \max [M_h, u_h^{(0)}], \tag{6}$$

soddisfatte dai loro valori iniziali.

Se, l'insieme R, *definito dalle limitazioni*

$$\min [m_h, u_h^{(0)}] \leqq u_h \leqq \max [M_h, u_h^{(0)}] \tag{7}$$

è contenuto in D *e ad ogni numero positivo* a *corrisponde un numero non negativo* L_a, *tale che, detto* J_a *l'intervallo di* J *luogo dei punti per cui* $x_0 \leqq x \leqq x_0 + a$, *si abbia sempre, comunque si prendano due punti* (x, u) *e* (x, u') *di* $J_a \times R$,

$$|f_h(x, u') - f_h(x, u)| \leqq L_a |u' - u|, \; |g_h(x, u') - g_h(x, u)| \leqq L_a |u' - u|, \tag{8}$$

designando $|u' - u|$ *il massimo dei numeri* $|u'_h - u_h|$ $(h = 1, 2, \cdots)$, *esiste, in tutto* J, *una ed una sola soluzione delle* (1) *e* (2), *le cui componenti verificano, quindi, le limitazioni* (6).

In un caso particolare, presentato da un sistema di equazioni differenziali ordinarie, del quale il Comitato per le armi navali del Ministero della Marina, ha proposto all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo – che ho l'onore [1] di dirigere – l'integrazione numerica, è stato appunto osservato, in una mia fruttuosa collaborazione col valente matematico signor Wolf Gross, dell'Istituto stesso, il verificarsi delle ipotesi del teorema generale enunciato e ne sono state dedotte limitazioni, per la soluzione, di grande importanza per le ricerche sperimentali del detto Comitato.

(1) È però, purtroppo, dubbio se si potrà, in un prossimo avvenire, ritenere sempre onorifico l'incarico di dirigere quest'Istituto, nonostante i titoli ch'esso si è conquistato – anche sul piano internazionale – nella sua trentennale operosa esistenza! Questi dovrebbero essere tenuti presenti da coloro che hanno il potere di evitare quella decadenza dell'Istituto che ben presto si inizierà se non sarà fatto, ai suoi componenti migliori, il trattamento economico a cui hanno diritto, atto ad indurli a non trasferirsi in posti a loro offerti, in Italia e all'Estero, adeguatamente retribuiti.

Per dimostrare il teorema generale enunciato, cominciamo dall'osservare che i sistemi di equazioni (1) e (2) equivalgono – in virtù dell'identità (3) – al seguente di equazioni integrali

$$u_h(x) = u_h^{(0)} e^{-\int_{x_0}^{x} g_h[\xi, u(\xi)]\,d\xi} + \int_{x_0}^{x} f_h[\xi, u(\xi)]\, e^{-\int_{\xi}^{x} g_h[\eta, u(\eta)]\,d\eta}\, d\xi. \tag{9}$$

Esista una soluzione $u(x)$ delle (1) e (2). Si ha

$$\int_{x_0}^{x} f_h[\xi, u]\, e^{-\int_{\xi}^{x} g_h[\eta, u]\,d\eta}\, d\xi = \int_{x_0}^{x} \frac{f_h[\xi, u]}{g_h[\xi, u]} g_h[\xi, u]\, e^{-\int_{\xi}^{x} g_h[\eta, u]\,d\eta}\, d\xi,$$

e quindi, per essere $x \geqq x_0$, in virtù delle (4) e (5)

$$m_h\left(1 - e^{-\int_{x_0}^{x} g_h[\xi, u]\,d\xi}\right) \leqq \int_{x_0}^{x} f_h[\xi, u]\, e^{-\int_{\xi}^{x} g_h[\eta, u]\,d\eta}\, d\xi \leqq M_h\left(1 - e^{-\int_{x_0}^{x} g_h[\xi, u]\,d\xi}\right),$$

e pertanto, segue dalla (9),

$$(m_h - u_h^{(0)})\left(1 - e^{-\int_{x_0}^{x} g_h[\xi, u(\xi)]\,d\xi}\right) \leqq u_h(x) - u_h^{(0)} \leqq$$

$$(M_h - u_h^{(0)})\left(1 - e^{-\int_{x_0}^{x} g_h[\xi, u(\xi)]\,d\xi}\right),$$

donde, per essere $x \geqq x_0$, in virtù delle (4),

$$\min[m_h - u_h^{(0)}, 0] \leqq u_h(x) - u_h^{(0)} \leqq \max[M_h - u_h^{(0)}, 0],$$

cioè

$$\min[m_h, u_h^{(0)}] \leqq u_h(x) \leqq \max[M_h, u_h^{(0)}].$$

Supponiamo ora che, essendo l'insieme R contenuto in D, si verifichino le (8) per ogni numero positivo a. L'unicità della soluzione delle equazioni (1) e (2) è ben nota dagli elementi. Per dimostrarne l'esistenza, in J, procedendo, per approssimazioni successive, poniamo

$$u_h^{(1)}(x) = u_h^{(0)} e^{-\int_{x_0}^{x} g_h[\xi, u^{(0)}]\,d\xi} + \int_{x_0}^{x} f_h[\xi, u^{(0)}]\, e^{-\int_{\xi}^{x} g_h[\eta, u^{(0)}]\,d\eta}\, d\xi.$$

Il ragionamento precedente prova che il punto $u^{(1)}(x)$, al variare di x in J, non esce dall'insieme R. Così pure il punto $u^{(2)}(x)$ dedotto da $u^{(1)}(x)$, come questo lo è stato da $u^{(0)}$, non esce dall'insieme R. In generale, posto

$$(10)\qquad u_h^{(n+1)}(x) = u_h^{(0)}\, e^{-\int_{x_0}^{x} g_h[\xi,u^{(n)}(\xi)]\,d\xi} + \int_{x_0}^{x} f_h[\xi, u^{(n)}(\xi)]\, e^{-\int_{\xi}^{x} g_h[\eta,u^{(n)}(\eta)]\,d\eta}\, d\xi,$$

$$(n = 0, 1, 2, \cdots)$$

si ha, dunque, che il punto $u^{(n)}(x)$, al variare di x nell'intervallo J non esce dall'insieme R.

Se dimostreremo che, comunque si fissi una quantità positiva a, la funzione $u^{(n)}(x)$, al divergere di n, converge uniformemente nell'intervallo J_a, luogo dei punti di J, per i quali $x_0 \leqq x \leqq x_0 + a$, sarà dimostrato il teorema. Ora si ha, in virtù delle (8), detto P_a un numero non superato, in $J_a \times R$, dalle funzioni $|f_h(x, u)|$,

$$\left| e^{-\int_{x_0}^{x} g_h[\xi,u^{(n)}(\xi)]\,d\xi} - e^{-\int_{x_0}^{x} g_h[\xi,u^{(n-1)}(\xi)]\,d\xi} \right| \leqq$$

$$\left| \int_{x_0}^{x} g_h[\xi, u^{(n)}(\xi)]\,d\xi - \int_{x_0}^{x} g_h[\xi, u^{(n-1)}(\xi)]\,d\xi \right| \leqq$$

$$L_a \int_{x_0}^{x} |u^{(n)}(\xi) - u^{(n-1)}(\xi)|\, d\xi,$$

$$\left| f_h[\xi, u^{(n)}(\xi)]\, e^{-\int_{\xi}^{x} g_h[\eta,u^{(n)}(\eta)]\,d\eta} - f_h[\xi, u^{(n-1)}(\xi)]\, e^{-\int_{\xi}^{x} g_h[\eta,u^{(n-1)}(\eta)]\,d\eta} \right| \leqq$$

$$L_a |u^{(n)}(\xi) - u^{(n-1)}(\xi)| + L_a P_a \int_{\xi}^{x} |u^{(n)}(\eta) - u^{(n-1)}(\eta)|\, d\eta,$$

e quindi, in J_a,

$$|u_h^{(n+1)}(x) - u_h^{(n)}(x)| \leqq |u_h^{(0)}|\, L_a \int_{x_0}^{x} |u^{(n)}(\xi) - u^{(n-1)}(\xi)|\, d\xi$$

$$+ \int_{x_0}^{x} \left(L_a |u^{(n)}(\xi) - u^{(n-1)}(\xi)| + L_a P_a \int_{\xi}^{x} |u^{(n)}(\eta) - u^{(n-1)}(\eta)|\, d\eta \right) d\xi,$$

e, per essere

$$\int_{x_0}^{x} d\xi \int_{\xi}^{x} \left| u^{(n)}(\eta) - u^{(n-1)}(\eta)\, d\eta \right| \leqq a \int_{x_0}^{x} u^{(n)}(\xi) - u^{(n-1)}(\xi) \Big| d\xi,$$

risulterà, in J_a,

$$|u_h^{(n+1)}(x) - u_h^{(n)}(x)| \leqq (|u_h^{(n)}| + 1 + aP_a)\, L_a \int_{x_0}^{x} |u^{(n)}(\xi) - u^{(n-1)}(\xi)|\, d\xi,$$

e quindi, detto Q_a il massimo fra i numeri

$$|m_h - u_h^{(0)}|, |M_h - u_h^{(0)}|, (|u_h^{(0)}| + 1 + aP_a)\, L_a, \qquad h = 1, 2, \cdots, p)$$

si avrà, in J_a,

$$|u^{(1)}(x) - u^{(0)}| \leqq Q_a,$$

$$|u^{(n+1)}(x) - u^{(n)}(x)| \leqq Q_a \int_{x_0}^{x} |u^{(n)}(\xi) - u^{(n-1)}(\xi)|\, d\xi,$$

donde, infine, ivi

$$|u^{(n+1)}(x) - u^{(n)}(x)| \leqq Q_a^{n+1} \frac{(x - x_0)^n}{n!} \leqq Q_a \frac{(a Q_a)^n}{n!},$$

ciò che consente di ritenere dimostrato il teorema.

OSSERVAZIONI. – *a*) Se il punto iniziale $(x_0, u^{(0)})$ è interno al dominio $I \times D$, si può, con procedimenti classici, prolungare alquanto l'intervallo J d'esistenza della soluzione delle equazioni (1) e (2), in un intervallo J* il cui estremo sinistro è alla sinistra del punto x_0, con ben note limitazioni delle componenti della soluzione, nel prolungamento $J^* - J$.

b) La teoria esposta non esclude che il punto iniziale $[x_0, u^{(0)}]$ sia situato sulla frontiera del dominio $I \times D$, come avverrebbe per esempio, quando il punto x_0 fosse l'estremo sinistro dell'intervallo I, e pertanto che nel *detto punto iniziale il considerato sistema di equazioni differenziali presenti una singolarità.*

c) Ovviamente, detto J' l'intervallo di I alla sinistra di x_0, se si ha in $J' \times D$,

$$g_h(x, u) \leqq 0 \qquad (h = 1, 2, \cdots, p), \tag{4'}$$

esistendo $2p$ numeri

$$m'_1, m'_2, \cdots, m'_p, M'_1, M'_2, \cdots, M'_p,$$

per i quali, in $I' \times D$, si verifichino le

$$m'_h \leqq \frac{f_h(x, u)}{g_h(x, u)} \leqq M'_h, \tag{5'}$$

supposto che sia contenuto in D l'insieme R' definito dalle limitazioni

$$\min [m'_h, u_h^{(0)}] \leqq u_h \leqq \max [M'_h, u_h^{(0)}], \tag{7'}$$

e che ad ogni numero positivo a, corrisponda un numero non negativo L_a tale che, detto J'_a l'intervallo di J' luogo dei punti per cui $x_0 - a \leqq x \leqq x_0$, comunque si prendano due punti (x, u') e (x, u) in $J'_a \times R'$ sussistano le (8), esiste in tutto J' la soluzione di (1) e (2) e le sue componenti vi verificano le limitazioni

$$\min [m'_h, u_h^{(0)}] \leqq u_h(x) \leqq \max [M'_h, u_h^{(0)}]. \tag{6'}$$

Pertanto, se il punto x_0 è interno all'intervallo I e sono verificate in $J \times D$ e in $J' \times D$, rispettivamente le (4), (5) e le (4'), (5'), onde segue che

$$g_h(x_0, u) \equiv f_h(x_0, u) \equiv 0,$$

essendo contenuti in D entrambi gl'insiemi R e R′ e soddisfatte le (8) in $J_a \times R$ e in $J'_a \times R'$, esiste, in tutto I, la soluzione delle (1) e (2), e le sue componenti verificano in J le limitazioni (6) e, in J′ le (6′).

d) La funzione approssimante $u^{(n+1)}$ è legata alla precedente $u^{(n)}$, come si deduce dalle (10), dal sistema di equazioni

$$\left.\begin{aligned} \frac{du_h^{(n+1)}}{dx} &= f_h[x, u^{(n)}] - g_h[x, u^{(n)}]\, u_h^{(n+1)}, \\ u_h^{(n+1)}(x_0) &= u_h^{(0)} \end{aligned}\right\} \quad (h = 1, 2, \cdots, p),$$

che vale a determinarla. Ciò induce a porre le domande seguenti. Sia

$$\varphi_h(x, u_1, u_2, \cdots, u_p, v_1, v_2, \cdots, v_p) = \varphi_h(x, u, v), \qquad (h = 1, 2, \cdots, p)$$

un sistema di p funzioni reali, definite al variare del punto (x, u, v) nel dominio $I \times D \times D$ e si debba integrare il sistema di equazioni:

$$(10) \qquad \frac{du_h}{dx} = \varphi_h(x, u, u), \; u_h(x_0) = u_h^{(0)}, \qquad (h = 1, 2, \cdots, p).$$

Fatta l'ipotesi, secondo la quale, comunque si scelga il punto u in D il sistema di equazioni, nella funzione v,

$$\frac{dv_h}{dx} = \varphi_h(x, u, v), \; v_h(x_0) = u_h^{(0)},$$

ammette una soluzione esistente in tutto l'intervallo I, sotto quali ulteriori condizioni per le funzioni φ_h, si può asserire che la funzione $u^{(n)}(x)$, definita, per ricorrenza, in tutto I, dalle equazioni

$$u^{(0)}(x) = u^{(0)},$$
$$\frac{du_h^{(n+1)}}{dx} = \varphi_h[x, u^{(n)}, u^{(n+1)}], \; u_h^{(n+1)}(x_0) = u_h^{(0)},$$

converge, al divergere di n, verso la soluzione u del sistema (13), *in tutto un prescritto intervallo* J *di* I?

Questa funzione $u^{(n)}$, converge, forse, in qualche caso, verso la soluzione u del sistema (10), *in un intervallo più ampio* o *più rapidamente* della $\bar{u}^{(n)}$ definita, per ricorrenza, dalle

$$\bar{u}^{(0)}(x) = u^{(0)},$$
$$\frac{d\bar{u}_h^{(n+1)}}{dx} = \varphi_h[x, \bar{u}^{(n)}, \bar{u}^{(n)}], \; \bar{u}_h^{(n+1)}(x_0) = u_h^{(0)},$$

nell'applicazione dell'ordinario metodo di approssimazioni successive ?

Sarebbe già interessante, stabilire le dette condizioni, quando si avesse, identicamente in $I \times D \times D$,

$$\varphi_h(x, u, v) = f_h(x, u) - \sum_{k=1}^{p} g_{hk}(x, u)\, v_k,$$

nel qual caso l'ipotesi indicata è ovviamente verificata.

Matematica. — *Proprietà in grande sulle funzioni analitiche di più variabili complesse.* Nota (*) del Socio BENIAMINO SEGRE.

1. Consideriamo un'espressione del tipo

$$\varphi = f_1(z)\,g_1(\bar{z}) + f_2(z)\,g_2(\bar{z}) + \cdots + f_m(z)\,g_m(\bar{z}),$$

dove le f siano m (≥ 2) funzioni olomorfe di n (≥ 2) variabili complesse $z_k = x_k + iy_k$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ e le g siano m funzioni olomorfe delle variabili $\bar{z}_k = x_k - iy_k$ complesse coniugate delle z, le une e le altre funzioni essendo definite in una stessa regione $\mathfrak{R}$ dello spazio euclideo reale $E_{2n}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ rappresentativo di quelle variabili. È chiaro che φ risulta così una funzione analitica (a valori generalmente complessi) delle $2n$ variabili reali x ed y, prolungabile anche a valori complessi di tali variabili.

Qualora la φ fosse identicamente nulla in $\mathfrak{R}$, sarebbe $\varphi = 0$ anche per i suddetti valori complessi delle x, y, il che val quanto dire che la φ verrebbe a svanire più in generale anche quando le z e le $\bar{z}$ si pensino come variabili complesse indipendenti (corrispondenti, sia le une che le altre, a punti di $\mathfrak{R}$). Dall'ipotesi suddetta seguirebbero dunque le identità

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_1} = 0\,,\ \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_2} = 0\,,\ \cdots,\ \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_n} = 0\,,$$

le quali – supposto $m \leq n$ e tenuto conto dell'espressione di φ – mostrano che allora in $\mathfrak{R}$ *o si annullano identicamente tutti i minori d'ordine massimo della matrice jacobiana delle g rispetto alle* $\bar{z}$, *oppure si annullano identicamente tutte le f* (ed una conclusione analoga varrebbe naturalmente ove si scambino simultaneamente in ciò che precede le f con le g e le z con le $\bar{z}$).

Nel presente lavoro vedremo che alle stesse conclusioni si può giungere se $m \leq n$, ove si supponga soltanto che φ si annulli nei punti di un' ipersuperficie V_{2n-1} di E_{2n} soggetta ad opportune restrizioni. Che occorrano delle condizioni per una siffatta V_{2n-1}, e che un analogo risultato non sussista per $m > n$, risulta ad esempio supponendo $m \leq n + 1$ ed assumendo

$$f_1(z) = 1 \quad , \quad g_1(\bar{z}) = -\sum_{k=1}^{n} \bar{z}_k\,,$$

$$f_h(z) = z_{h-1} \quad , \quad g_h(\bar{z}) = \bar{z}_{h-1} \sum_{k=1}^{n} \bar{z}_k \qquad (h = 2, \cdots, m),$$

con che φ viene ad annullarsi – oltre che nei punti in cui $\sum_{k=1}^{n} z_k = 0$ – lungo un'ipersuperficie cilindrica se $m \leq n$ e lungo un'ipersfera se $m = n + 1$.

(*) Presentata nella seduta dell'8 novembre 1958

2. Allo scopo di poter precisare le suddette condizioni, premettiamo una definizione.

Diremo che un'ipersuperficie V_{r-1} di uno spazio euclideo reale E_r (con $r \geq 3$) è *semiregolare*, s'essa soddisfa alle quattro seguenti condizioni:

1ª V_{r-1} sia compatta, e quindi tutta al finito;

2ª il generico punto di V_{r-1} ammetta su V_{r-1} un intorno differenziabile di classe $\mathcal{C}^2$, sicché il punto stesso risulterà semplice per V_{r-1};

3ª esista (almeno) un iperpiano (proprio) di E_r che contenga l'insieme – eventualmente vuoto – dei punti singolari di V_{r-1}, ossia dei punti di V_{r-1} non soddisfacenti alla 2ª;

4ª non esista nessun iperpiano contenente V_{r-1} per intero.

Una proprietà generale delle V_{r-1} semiregolari, di cui poi ci varremo, è data dal seguente

LEMMA. – *Ogni* V_{r-1} *semiregolare di* E_r *contiene qualche punto ellittico, ossia qualche punto semplice in cui essa non ammette nessuna tangente asintotica (reale).*

Sia E_{r-1} un iperpiano che soddisfi, in relazione a V_{r-1}, alla condizione 3ª. In virtù della 1ª, l'insieme $V_{r-1} \cap E_{r-1}$ risulta compatto, e quindi rinchiudibile all'interno di una sfera piena Σ_{r-1} di E_{r-1}; inoltre, sempre in base alla 1ª, il raggio ρ della Σ_{r-1} può venire assunto tanto grande che la sfera piena Σ_r di E_r, di raggio ρ ed avente lo stesso centro della Σ_{r-1}, venga a racchiudere all'interno l'intera V_{r-1}. In forza della 4ª, l'insieme $V_{r-1} - E_{r-1}$ non è vuoto: per ciascuno P dei suoi punti resta univocamente definito un numero reale λ, non inferiore a ρ, dato dal raggio della $(r-1)$-sfera S_{r-1} di E_r passante per P e per il contorno di Σ_{r-1}. È chiaro che λ è funzione continua di P e che quando P, muovendosi ad arbitrio con continuitá su $V_{r-1} - E_{r-1}$, tende a cadere in E_{r-1}, la S_{r-1} tende ad E_{r-1}, onde λ tende a $+\infty$. Pertanto, in virtù ancora della 1ª, esiste (almeno) un punto P di V_{r-1} ove λ raggiunge il valore minimo. Un tale punto P non sta in E_{r-1}, ed è quindi non singolare per V_{r-1}; di più – in base alla stessa definizione di P – la $(r-1)$-sfera S_{r-1} passante per P e per il contorno di Σ_{r-1} tocca V_{r-1} in P, e racchiude all'interno tutto un intorno di P su V_{r-1}, precisamente quello almeno dato dai punti di V_{r-1} che stanno dalla stessa banda di P rispetto ad E_{r-1}. Ne consegue, come ora mostreremo, che P è un punto ellittico di V_{r-1}.

Ed invero, introdotte in E_r coordinate cartesiane ortogonali $u_1, u_2, \cdots, u_{r-1}$, v, aventi l'origine in P e l'iperpiano tangente in P ad S_{r-1} (ed a V_{r-1}) quale iperpiano $v = 0$, l'equazione della suddetta S_{r-1} sarà del tipo

$$v = c\,(u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_{r-1}^2 + v^2),$$

con c costante reale non nulla, che non è restrittivo supporre positiva, bastando in caso opposto invertire l'orientazione dell'asse v. Poiché P è un punto non singolare di V_{r-1}, in virtù della condizione 2ª nell'intorno di P l'ipersuperficie V_{r-1} può venire rappresentata mediante un'equazione del tipo

$$v = \sigma(u) + \cdots,$$

dove σ denota una forma quadratica nelle $u_1, u_2, \cdots, u_{r-1}$ a coefficienti reali ed i puntini stanno per termini nelle u, infinitesimi d'ordine superiore al secondo rispetto a $(u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_{r-1}^2)^{1/2}$.

Poiché, per quanto s'è visto, S_{r-1} racchiude all'interno tutto un intorno di P su V_{r-1}, così, per valori reali arbitrari – purché sufficientemente piccoli in valor assoluto – delle u, dev'essere

$$\sigma(u) + \cdots \geq c\{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_{r-1}^2 + [\sigma(u) + \cdots]^2\},$$

eppertanto

$$\sigma(u) \geq c(u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_{r-1}^2).$$

La forma quadratica σ risulta quindi definita positiva, sicché P è di fatto un punto ellittico di V_{r-1}, in quanto le eventuali tangenti asintotiche di V_{r-1} in P dovrebbero soddisfare alle $v = \sigma(u) = 0$.

OSSERVAZIONE I. – È chiaro che le condizioni 1ª e 4ª sono essenziali per la validità del lemma, come rispettivamente mostrano gli esempi di una V_{r-1} che si riduca ad un c i l i n d r o, o ad una p o r z i o n e $(r-1)$-dimensionale serrata d' i p e r p i a n o. Lo stesso può dirsi della condizione 3ª, come si vede dall'esempio seguente (in cui $r = 3$).

Introdotte in un E_3 euclideo reale coordinate proiettive omogenee t_1, t_2, t_3, t_4, in guisa che l'iperpiano all'infinito abbia l'equazione $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0$, si consideri la s u p e r f i c i e c u b i c a d'equazione

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_4} = 0,$$

e la p o r z i o n e c o m p a t t a di quella, V_2, racchiusa entro il parallelepipedo

$$\begin{cases} t_1 + t_2 \geq 0 \\ t_3 + t_4 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} t_1 + t_3 \geq 0 \\ t_2 + t_4 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} t_1 + t_4 \geq 0 \\ t_2 + t_3 \geq 0 \end{cases}$$

(le cui facce toccano la superficie cubica lungo i sei spigoli del tetraedro fondamentale). Tale V_2 risulta p r i v a d i p u n t i e l l i t t i c i, come si constata facilmente; essa soddisfa a tutte le condizioni ammesse nel lemma eccettuata la 3ª, i suoi punti singolari essendo i quattro punti fondamentali delle coordinate.

3. – Possiamo ora dimostrare il seguente

TEOREMA. – *Siano* $f_1(z), f_2(z), \cdots, f_m(z)$ *m funzioni analitiche delle variabili complesse* $z_1, z_2, \cdots, z_n$ *(ove* $2 \leq m \leq n$*) olomorfe lungo una* V_{2n-1} *semiregolare dello spazio euclideo reale* E_{2n} *rappresentativo di queste variabili; e siano* $g_1(\bar{z}), g_2(\bar{z}), \cdots, g_m(\bar{z})$ *m funzioni analitiche delle* $\bar{z}$ *esse pure olomorfe lungo* V_{2n-1}*, tali che non tutti i minori d'ordine m della matrice jacobiana delle g rispetto alle* $\bar{z}$ *si annullino identicamente. Allora, se nei singoli punti di* V_{2n-1} *risulta*

$$(1) \qquad f_1(z)\,g_1(\bar{z}) + f_2(z)\,g_2(\bar{z}) + \cdots + f_m(z)\,g_m(\bar{z}) = 0,$$

ciascuna delle m funzioni $f(z)$ *deve annullarsi identicamente.*

Nel caso molto particolare in cui si abbia $m = n$, $g_h(\bar{z}) = \bar{z}_h$ (per $h = 1, 2, \cdots, n$) e si supponga che V_{2n-1} sia la $(2n-1)$-sfera di equazione $z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + \cdots + z_n\bar{z}_n = 1$, questo teorema trovasi già dimostrato, per tutt'altra via, in un recentissimo lavoro di J. J. Kohn [1].

Rileviamo inoltre come, stabilito il teorema nell'ipotesi che risulti $m = n$, la validità di quello possa agevolmente venire estesa al caso $m < n$. Ed invero, se si suppone $m < n$, basta assumere

$$f_{m+1}(z) \equiv 0, f_{m+2}(z) \equiv 0, \cdots, f_n(z) \equiv 0$$

e scegliere quali funzioni $g_{m+1}(\bar{z}), g_{m+2}(\bar{z}), \cdots, g_n(\bar{z})$ $n - m$ forme lineari nelle $\bar{z}$ a coefficienti complessi generici, per ottenere – da un lato – che la (1) implichi la

$$f_1(z)g_1(\bar{z}) + f_2(z)g_2(\bar{z}) + \cdots + f_n(z)g_n(\bar{z}) = 0, \tag{2}$$

e – dall'altro – che il determinante funzionale delle $g_1, g_2, \cdots, g_n$ rispetto alle $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \cdots, \bar{z}_n$ non si annulli identicamente. Se dunque si ammette il teorema per $m = n$, ne consegue l'annullarsi identico di t u t t e le f, e quindi la validità di quello anche per $m < n$.

Basta dunque dimostrare il teorema nell'ipotesi che si abbia $m = n$. All'uopo procediamo p e r a s s u r d o, e supponiamo che valgano anche le altre ipotesi del teorema, senza che le f si annullino identicamente; ad esempio, per fissare le idee, sia $f_1(z)$ non identicamente nulla. In virtù del lemma (n. 2), vi sarà su V_{2n-1} un punto P semplice ed e l l i t t i c o; e *della stessa proprietà godranno tutti i punti di un intorno di* P *su* V_{2n-1}, in base alla condizione 2ª del n. 2. In tale intorno vi sarà certamente qualche punto O in cui né $f_1(z)$ né il determinante jacobiano delle g rispetto alle $\bar{z}$ risultano uguali allo zero. Si osservi infatti che detto intorno ha la dimensione $2n - 1$; sicché, se in ciascun suo punto si annullasse o $f_1(z)$ o quello jacobiano, che sono funzioni analitiche olomorfe dei rispettivi loro n argomenti z o $\bar{z}$, dovrebbe l'una o l'altra di queste funzioni annullarsi identicamente, contro il supposto.

Nell'intorno di un siffatto punto O risulta intanto $f_1(z) \neq 0$; in esso si possono perciò dividere i due membri della (2) per $f_1(z)$, e poi assumere $f_n(z)/f_1(z)$ quale nuova funzione $f_n(z)$, il che equivale a conservare in quell'intorno la (2) con la condizione che ivi si abbia

$$f_1(z) \equiv 1. \tag{3}$$

Poiché lo jacobiano delle g rispetto alle $\bar{z}$ non si annulla in O, possiamo inoltre effettuare sulle z una sostituzione lineare non omogenea, e sulle $\bar{z}$ la sostituzione coniugata, in guisa che O diventi l'origine delle nuove coordinate e che le parti lineari omogenee degli sviluppi di Maclaurin delle funzioni analitiche $g_1(\bar{z}), g_2(\bar{z}), \cdots, g_n(\bar{z})$ si riducano rispettivamente a $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \cdots, \bar{z}_n$;

(1) Ved. J. J. Kohn, *A boundary condition for the vanishing of n holomorphic functions in complex n-space*, « Proc. Amer. Math. Soc. », 9, 175–177 (1958).

e si noti che il cambiamento di variabili eseguito si riflette in una trasformazione affine di E_{2n} in sé, la quale non altera la natura ellittica del punto O su V_{2n-1}.

Per semplicità di scrittura, possiamo addirittura ammettere che le variabili inizialmente scelte coincidano già con quelle ottenute nel modo suindicato. Siano poi

$$(4)\qquad \begin{cases} f_h(z) = a_h + \alpha_h(z) + \beta_h(z) + \cdots & (h = 2, \cdots, n) \\ g_k(\bar{z}) = b_k + \bar{z}_k + \gamma_k(\bar{z}) + \cdots & (k = 1, 2, \cdots, n) \end{cases}$$

gli sviluppi di Maclaurin delle funzioni f e g distinte dalla f_1 [data dalla (3)], le quali debbono essere olomorfe in un intorno di O, in quanto O giace su V_{2n-1}; nelle (4), le a, b sono certe costanti complesse, e α denotano forme lineari, e le β, γ forme quadratiche dei rispettivi argomenti, a coefficienti complessi. Per ipotesi lungo V_{2n-1} sussiste la (1), che ora (essendo $m = n$) si scrive sotto la forma (2). In virtù delle (3), (4) e dell'ipotesi che V_{2n-1} passi per O, sussiste poi l'uguaglianza

$$b_1 + \sum_{h=2}^{n} a_h b_h = 0,$$

ed il primo membro della (2) risulta una funzione olomorfa delle variabili indipendenti z e $\bar{z}$ (o x ed y), data da

$$(5)\qquad \Phi = \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} + \cdots,$$

dove

$$(6)\qquad \Phi^{(1)} = \bar{z}_1 + \sum_{h=2}^{n} a_h \bar{z}_h + \sum_{h=2}^{n} b_h \alpha_h(z),$$

$$(7)\qquad \Phi^{(2)} = \gamma_1(\bar{z}) + \sum_{h=2}^{n} a_h \gamma_h(\bar{z}) + \sum_{h=2}^{n} \bar{z}_h \alpha_h(z) + \sum_{h=2}^{n} b_h \beta_h(z),$$

ed i puntini stanno per termini di grado superiore al secondo nelle $z, \bar{z}$.

Notiamo ora che:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + i\,\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}\right)_0 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}_1}\right)_0 = \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \bar{z}_1}\right)_0 = 1,$$

sicché una almeno delle $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}$ non si annulla in O, e sia per fissare le idee

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}\right)_0 \neq 0.$$

In base al teorema sulle funzioni analitiche implicite, la (2), che nell'intorno di O si scrive nella forma

$$(8)\qquad \Phi = 0,$$

definisce y_1 quale serie di potenze delle $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_2, \cdots, y_n$, a raggio di convergenza non nullo. A priori, i coefficienti di questa serie sono numeri complessi; ma essi debbono più precisamente risultare tutti r e a l i, in quanto

l'ipersuperficie (reale) V_{2n-1} passa per O e soddisfa alla (8) nell'intorno di O, ond'essa può venire ivi rappresentata uguagliando y_1 alla suddetta serie di potenze (sicché V_{2n-1} è di classe $\mathcal{C}^\omega$ in quell'intorno).

Posto

$$\overline{\Phi} = \overline{\Phi}^{(1)} + \overline{\Phi}^{(2)} + \cdots,$$

ove $\overline{\Phi}^{(1)}$ e $\overline{\Phi}^{(2)}$ si ottengono dalle (6), (7) con ovvie convenzioni (sopralineando cioè tutte le lettere non sopralineate e togliendo la lineetta a quelle sopralineate), alla stessa funzione implicita si giunge pertanto risolvendo la $\overline{\Phi} = 0$ rispetto ad y_1. Dunque, in un intorno dell'origine nello spazio delle variabili complesse $(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n)$, le funzioni analitiche Φ e $\overline{\Phi}$ posseggono la medesima varietà di zeri, e con la stessa molteplicità (= 1). Ne discende che, in quell'intorno,

$$\Omega = \Phi/\overline{\Phi} \tag{9}$$

risulta una funzione olomorfa, sviluppabile dunque in serie di potenze delle x, y. Poiché

$$x_h = (z_h + \bar{z}_h)/2 \quad , \quad y_h = (z_h - \bar{z}_h)/(2i),$$

varrà così uno sviluppo del tipo

$$\Omega = c + \lambda(z) + \mu(\bar{z}) + \cdots, \tag{10}$$

dove c indica una costante (complessa), λ e μ denotano forme lineari nei rispettivi argomenti z e $\bar{z}$, ed i puntini stanno per termini di grado superiore al primo nelle variabili indipendenti $z, \bar{z}$.

Osserviamo ora che, in virtù della (9), dev'essere $\Omega\overline{\Omega} = 1$ identicamente in queste variabili, sicché la (10) fornisce le identità:

$$c\bar{c} = 1, \tag{11}$$

$$\bar{c}[\lambda(z) + \mu(\bar{z})] + c[\overline{\lambda}(\bar{z}) + \overline{\mu}(z)] = 0. \tag{12}$$

Dalla (11) si trae

$$c = e^{2i\theta} \qquad \text{con } \theta \text{ costante reale.}$$

Avuto riguardo a ciò che nella (6) $\bar{z}_1$ compare con coefficiente 1, ne discende che ci si riduce ad avere $c = 1$ ove si alterino z_1 e $\bar{z}_1$ per i fattori costanti $e^{i\theta}$ ed $e^{-i\theta}$ (il che non fa che indurre in E_{2n} una rotazione degli assi attorno all'origine). Con ciò la (12) fornisce le relazioni equivalenti

$$\overline{\mu}(z) = -\lambda(z) \quad , \quad \mu(\bar{z}) = -\overline{\lambda}(\bar{z}),$$

dopo di che la (9) diventa

$$\Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} + \cdots = [1 + \lambda(z) - \overline{\lambda}(\bar{z}) + \cdots][\overline{\Phi}^{(1)} + \overline{\Phi}^{(2)} + \cdots];$$

e questa, a sua volta, implica che si abbia identicamente

$$\Phi^{(1)} = \Phi^{(1)}, \tag{13}$$

$$\Phi^{(2)} = \overline{\Phi}^{(2)} + \overline{\Phi}^{(1)}[\lambda(z) - \overline{\lambda}(\bar{z})]. \tag{14}$$

In forza della (6), la (13) porge le relazioni equivalenti

$$z_1 + \sum_{h=2}^{n} \bar{a}_h z_h = \sum_{h=2}^{n} b_h \alpha_h(z) \quad , \quad \bar{z}_1 + \sum_{h=2}^{n} a_h \bar{z}_h = \sum_{h=2}^{n} \bar{b}_h \bar{\alpha}_h(\bar{z}),$$

onde risulta:

$$\Phi^{(1)} = \overline{\Phi}^{(1)} = \sum_{h=2}^{n} b_h \alpha_h(z) + \sum_{h=2}^{n} \bar{b}_h \bar{\alpha}_h(\bar{z}). \tag{15}$$

Parimente dalla (14), avendo riguardo alla (7) ed uguagliando fra loro i termini quadratici nelle sole z figuranti nei due membri, si ricava la

$$\sum_{h=2}^{n} b_h \beta_h(z) = \bar{\gamma}_1(z) + \sum_{h=2}^{n} \bar{a}_h \bar{\gamma}_h(z) + \lambda(z) \sum_{h=2}^{n} b_h \alpha_h(z),$$

eppertanto:

$$\Phi^{(2)} = \delta(z) + \bar{\delta}(\bar{z}) + \sum_{h=2}^{n} [\bar{z}_h + b_h \lambda(z)] \alpha_h(z), \tag{16}$$

dove, per abbreviare, abbiamo posto:

$$\delta(z) = \dot{\gamma}_1(z) + \sum_{h=2}^{n} \bar{a}_h \bar{\gamma}_h(z) \quad , \quad \bar{\delta}(\bar{z}) = \gamma_1(\bar{z}) + \sum_{h=2}^{n} a_h \gamma_h(\bar{z}).$$

Rileviamo da ultimo che esistono certamente dei valori complessi non tutti nulli $c_1, c_2, \cdots, c_n$ delle $z_1, z_2, \cdots, z_n$, verificanti le $n-1$ equazioni lineari omogenee

$$\alpha_2(z) = 0, \cdots, \alpha_n(z) = 0. \tag{17}$$

Si soddisfa allora alle (17) assumendo

$$z_1 = c_1 t, z_2 = c_2 t, \cdots, z_n = c_n t, \tag{18}$$

ove $t = t' + it''$ denoti un arbitrario numero complesso. In forza delle (15), (16), per tali valori delle z risulta identicamente

$$\Phi^{(1)} = 0, \tag{19}$$

mentre $\Phi^{(2)}$ diventa della forma

$$\Phi^{(2)} = dt^2 + \bar{d}\bar{t}^2 \qquad \text{(con } d \text{ costante)},$$

e si riduce quindi ad una forma armonica a coefficienti reali in t', t''.

Si ha dunque

$$\Phi^{(2)} = 0 \tag{20}$$

per tutti i valori (reali) di t' e t'' se $d = 0$, oppure, se $d \neq 0$, per valori reali di t' e t'' il cui rapporto uguagli una o l'altra di certe due diverse costanti reali definite dalla suddetta forma armonica. In forza delle (19), (20), si ottiene rispettivamente in E_{2n} che, entro il fascio delle rette uscenti

da O e situate nel piano caratteristico rappresentato parametricamente dalle (18) al variare di t' e t'' nel campo reale, tutte le rette, oppure due distinte rette del fascio, risultano tangenti asintotiche di V_{2n-1} in O; sicché in nessun caso il punto O può essere un punto ellittico di V_{2n-1}, in contrasto con ciò che si disse in principio. Questa contraddizione completa la dimostrazione del teorema.

OSSERVAZIONE II. – Dalla precedente dimostrazione risulta che il teorema (enunciato al principio del n. 3) vale anche in piccolo, nella ipotesi che V_{2n-1} sia una porzione – non necessariamente compatta – d'ipersuperficie di E_{2n}, di classe $\mathcal{C}^2$ ed a punti ellittici.

OSSERVAZIONE III. – La proposizione dianzi stabilita e l'Oss. II forniscono subito dei teoremi di unicità relativi alle m–ple di funzioni analitiche $f_1(z), f_2(z), \cdots, f_m(z)$, in corrispondenza alle quali si conoscano i valori assunti – nei punti di una conveniente V_{2n-1} – da un'espressione φ del tipo considerato all'inizio del n. 1. Ciò suggerisce la ricerca di corrispettivi teoremi di esistenza e di possibili estensioni a funzioni soddisfacenti ad equazioni differenziali di specie opportuna.

Meccanica. — *L'equilibrio elasto-plastico delle strutture nel tempo.* Nota II [*] del Socio GUSTAVO COLONNETTI.

Nella mia recente Nota: *Nuovi punti di vista sul problema dell'equilibrio elasto-plastico nel tempo* [1] abbiamo potuto constatare il buon accordo tra la teoria ed i risultati dell'esperienza diretta; convien pertanto chiedersi a quali conseguenze la teoria conduca nei problemi, più o meno complessi, della statica delle strutture, e quali possibilità ci siano di istituire, anche su questo terreno, controlli sperimentali dei risultati teorici.

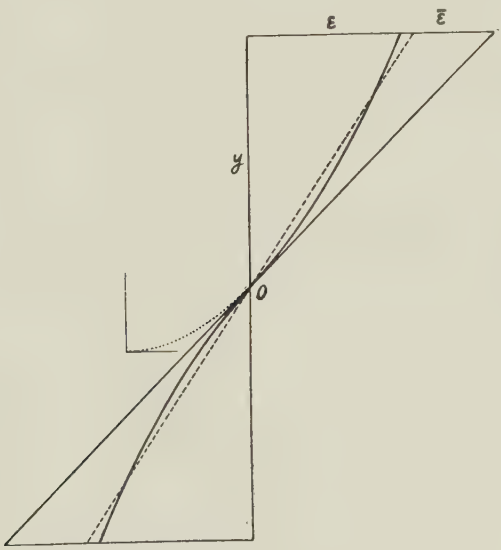


Fig. 1.

Fig. 2.

Prenderemo qui in considerazione, tra tutti questi problemi, quello che è evidentemente il più semplice e nel tempo stesso il più istruttivo: il caso cioè di una trave prismatica ed omogenea sollecitata a semplice flessione.

L'equazione

$$\varepsilon + \bar{\varepsilon} = \mu y \tag{9}$$

che esprime la legge della conservazione delle sezioni piane, ove si ponga

$$\bar{\varepsilon} = k\varepsilon^2$$

diviene:

$$k\varepsilon^2 + \varepsilon - \mu y = 0. \tag{10}$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 19 agosto 1958.

(1) In questo vol., pp. 140–145.

Risolta rispetto ad ε questa equazione ci dà immediatamente la legge di distribuzione delle deformazioni elastiche – e per conseguenza anche delle tensioni – sulla sezione retta generica della trave [2].

Questa legge è graficamente rappresentata da una curva come quella tracciata in fig. 1, la quale si compone di due archi di parabola aventi gli assi paralleli ad y ed i vertici nei punti di coordinate

$$x = \mp \frac{1}{2k} \qquad y = \mp \frac{1}{4\mu k} .$$

Se ne deduce subito:

1° che, contrariamente a quanto si ammette generalmente, l'intervento delle deformazioni plastiche è immediato, cioè si verifica anche sotto l'azione delle più piccole sollecitazioni, contemporaneamente alla comparsa delle prime deformazioni elastiche;

2° che tale intervento non si traduce soltanto in un incremento della deformazione totale, cioè della curvatura della trave, che si può sempre

(2) Invece di esprimere la deformazione elastica ε in funzione della coordinata y può a volte esser comodo fare il contrario: determinare cioè la y in corrispondenza della quale si verifica la deformazione elastica ε.

In questo caso l'operazione si può facilmente ridurre alla costruzione grafica di una « terza proporzionale ».

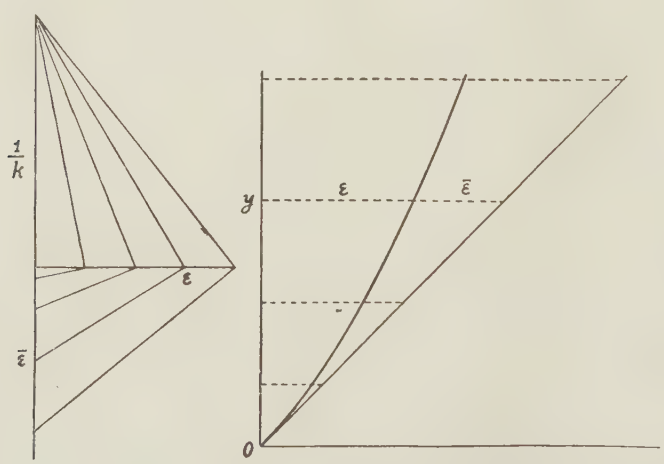


Fig. 3.

Tracciato a parte un segmento che, in una certa scala, misuri il rapporto $1/k$, e portati a partire da uno dei suoi estremi, e normalmente ad esso, i segmenti rappresentanti le ε, le $\bar{\varepsilon} = k\varepsilon^2$ si potranno immediatamente determinare, sul prolungamento di esso, colla costruzione indicata in fig. 3.

I valori di y si otterranno sommando ciascuna ε colla corrispondente $\bar{\varepsilon}$ e dividendo per μ.

giustificare immaginando il momento flettente $\mathfrak{M}$ effettivamente applicato sostituito dal momento flettente fittizio [3]

$$\mathfrak{M} + E \int_A \bar{\varepsilon} y \, dA$$

ma determina sempre anche una sostanziale modificazione della legge di distribuzione delle deformazioni elastiche, e quindi delle tensioni, su ciascuna sezione; legge che cessa senz'altro di essere lineare;

3° che deformazioni e tensioni in un qualsiasi punto della sezione vengono a dipendere non soltanto dalla sollecitazione esterna e dal suo apparente incremento dovuto all'insieme delle deformazioni plastiche, ma anche dai particolari valori che le deformazioni plastiche hanno assunto in quel punto;

4° che il nuovo diagramma delle tensioni, raffrontato a quello che si avrebbe in regime di perfetta elasticità del materiale e rappresentato in fig. 1 dalla retta punteggiata, accusa sempre, fin dal primo momento, una riduzione di valori in quei punti in cui il materiale in regime elastico sarebbe stato soggetto alle tensioni più elevate, ed un aumento là dove, in regime elastico, la resistenza del materiale sarebbe stata meno utilizzata;

5° che uno stato di coazione ha sempre origine, comunque piccole siano le sollecitazioni a cui la trave è stata sottoposta; e che a causa di esso un ritorno puro e semplice della trave al suo stato naturale non deformato non sarà mai possibile.

Questo stato di coazione si può immediatamente caratterizzare riferendo il diagramma delle deformazioni elastiche in fig. 1 alla punteggiata a cui il diagramma stesso si ridurrebbe notoriamente in regime di perfetta elasticità.

Questo diagramma è stato, per maggior chiarezza, riprodotto a parte nella fig. 2 e potrebbe assumersi a rappresentazione dello stato di coazione a trave scarica se la soppressione del carico avvenisse in modo istantaneo, sì da dar luogo alla scomparsa delle sole deformazioni elastiche.

Se l'eliminazione del carico avviene invece gradualmente (per esempio colla stessa velocità con cui il carico era stato applicato) noi già sappiamo che, insieme colle deformazioni elastiche, scompare anche una parte (e precisamente la metà) delle deformazioni plastiche.

Il diagramma dello stato di coazione resta valido purchè riferito ad una unità di misura delle deformazioni doppia della precedente.

Ancora una volta l'esperienza, se eseguita con strumenti di misura che consentano di riscontrare l'esistenza di curvature permanenti anche piccole, potrebbe offrire alle considerazioni che qui sono state svolte una preziosa conferma.

(3) G. COLONNETTI, *Scienza delle costruzioni*, vol. II, ed. Einaudi, Torino 1953, p. 306; G. COLONNETTI, *L'équilibre des corps déformables*, ed. Dunod, Paris 1955, p. 73.

A questo punto è evidente che se – invece di limitarci a considerare una trave semplicemente inflessa, nella quale la sollecitazione in ciascuna sezione è data, e l'indeterminazione statica si limita alla ripartizione delle tensioni su la sezione stessa – noi prendessimo in considerazione un qualunque sistema più complesso in cui la sovrabbondanza dei vincoli rendesse staticamente indeterminata la stessa distribuzione delle sollecitazioni su le varie sezioni – l'insorgere, anche per carichi molto piccoli, di stati di coazione importerebbe come conseguenza ben più profonde alterazioni nel regime di equilibrio e ben più gravi difficoltà nel calcolarlo.

Queste cose bisogna sapere per apprezzare al loro giusto valore i vantaggi che presenta l'ipotesi della applicazione istantanea dei carichi colla conseguente distinzione delle deformazioni plastiche in due categorie: quelle che si verificano istantaneamente, cioè all'atto stesso dell'applicazione dei carichi, là dove la sollecitazione tenderebbe a superare i limiti di elasticità del materiale; e quelle che solo in appresso si verificheranno sotto l'azione prolungata di sollecitazioni costanti, anche se inferiori ai limiti di elasticità.

Tali vantaggi si compendiano:

1° nella possibilità di studiare gli effetti delle deformazioni plastiche immediate in base al noto diagramma bilatero che esprime il passaggio dal regime della perfetta elasticità a quello della perfetta plasticità;

2° nella possibilità di applicare anche allo studio degli effetti della plasticità successiva (fluage) il principio di sovrapposizione almeno per i corpi isotropi ed omogenei [4].

Nei quali corpi, isotropi ed omogenei, le deformazioni plastiche successive all' applicazione dei carichi, (dovute cioè soltanto al prolungarsi nel tempo dell'azione di questi), si manifesterebbero sotto forma di un aumento proporzionale delle deformazioni elastiche determinate dalle forze esterne.

Ma bisogna pur tener presente – non foss'altro che per apprezzare il grado di approssimazione raggiungibile coi procedimenti di calcolo usuali – che la distinzione tra deformazioni plastiche immediate e deformazioni plastiche successive (vale a dire tra plasticità e fluage) è una distinzione puramente convenzionale – così com'è convenzionale la distinzione tradizionale tra deformazioni plastiche e deformazioni elastiche – e che in realtà ogni deformazione elastica, anche se è molto piccola, e anche se il corpo è omogeneo ed isotropo, è sempre accompagnata da deformazioni plastiche e dà sempre origine ad uno stato di coazione la cui influenza sulla distribuzione delle tensioni interne non è lecito trascurare.

Non è però soltanto nel caso particolarissimo dei corpi isotropi ed omogenei che la nuova teoria conduce a risultati interessanti.

(4) «Comptes rendus Académie des Sciences», t. 233 (1951) pp. 593, 644, 677, 717; Vedi anche: *Scienza delle costruzioni*, vol. I già citato, p. 442 e sg.; e *L'équilibre des corps déformables*, già citato, p. 38 e sg.

Qualche cosa si può dire anche nel caso più generale dei corpi eterogenei: nel caso cioè dei corpi in cui coesistono elementi materiali caratterizzati da valori differenti del coefficiente f e quindi di

$$k = \frac{f}{2c} .$$

Noi supporremo, per fissar le idee, che nell'interno dello spazio V occupato dal corpo, sia delimitata una porzione V′ caratterizzata da un valore k' diverso da quello k che caratterizza tutta la rimanente parte V — V′ del corpo.

Due casi possono allora presentarsi.

Può darsi che lo spazio V′ sia liberamente dilatabile, almeno nei confronti di certe ben determinate categorie di deformazioni; che cioè esistano

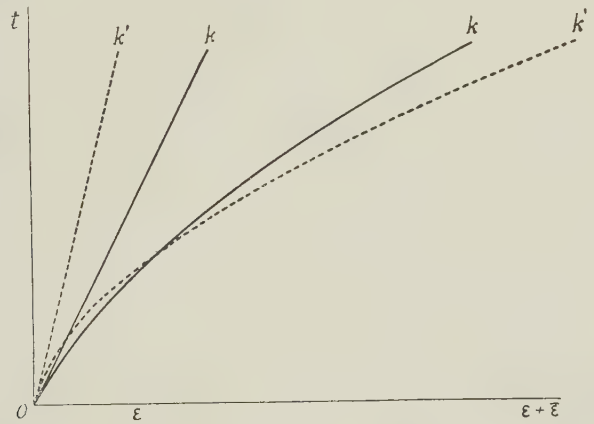


Fig. 4.

deformazioni degli elementi materiali che lo compongono che possono venire realizzate senza implicare concomitanti deformazioni degli elementi appartenenti alla rimanente parte V — V′ del corpo, e quindi senza incontrare resistenza alcuna da parte di questi.

Ecco un esempio: in una trave staticamente determinata assumiamo per V′ il tronco compreso tra due sue sezioni rette qualunque. Non v'è dubbio che una flessione di tale tronco – e più generalmente una sua qualsiasi deformazione piccolissima e compatibile colla condizione della conservazione delle sezioni piane – potrà bensì determinare spostamenti rigidi delle rimanenti parti della trave, ma non ne altererà il regime statico, e potrà perciò venir realizzata senza incontrare resistenze di sorta.

Nella fig. 4 sono messe a raffronto le deformazioni ai bordi di due sezioni di una trave siffatta, inflessa sotto l'azione di carichi di intensità linearmente crescente col tempo.

La retta e la curva a tratto pieno rappresentano rispettivamente le leggi di variazione nel tempo della deformazione elastica ε e della deforma-

zione totale $\varepsilon + \bar{\varepsilon}$ nel punto più lontano dall'asse neutro della sezione più sollecitata che si suppone appartenente alla porzione di trave cui spetta il coefficiente k.

La retta e la curva punteggiate rappresentano invece le leggi di variazione delle stesse deformazioni nel punto corrispondente di una sezione meno sollecitata – sia perché sottoposta ad un momento flettente minore, sia anche soltanto perché dotata di un momento resistente maggiore – ma appartenente alla porzione di trave caratterizzata da un valore $k' > k$.

Si vede subito che le deformazioni totali in quest'ultima sezione, che sono da principio inferiori a quelle della sezione più sollecitata, crescono, col crescer dei carichi, sempre più rapidamente, sicché in definitiva le sorpassano.

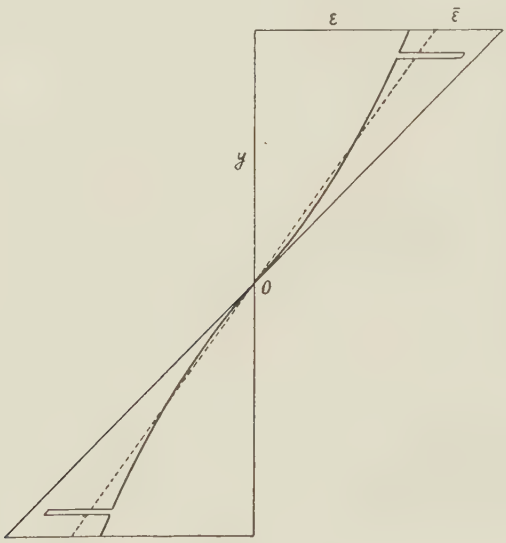


Fig. 5.

Fig. 6.

Si può incidentalmente rilevare che si verrà così a determinare una localizzazione di deformazioni plastiche in corrispondenza delle sezioni a più alto valore di k, e che è in queste sezioni che (pur non essendo esse le più sollecitate) si potrà in definitiva determinare la rottura della trave.

Risultato questo di cui l'esperienza ci offre assai spesso conferma.

Ma può anche darsi che le cose vadano diversamente: che cioè le due porzioni V′ e V — V′ non siano liberamente dilatabili, e che qualunque deformazione di elementi appartenenti ad una di esse implichi necessariamente una concomitante deformazione di elementi appartenenti all'altra, e debba perciò, per realizzarsi, vincere la resistenza relativa.

Accadrà allora che gli elementi della porzione plasticamente più deformabile (cioè caratterizzata da un valore di k più elevato) influiranno su gli elementi attigui, plasticamente meno deformabili, che appartengono alla rimanente porzione del corpo, e li costringeranno a deformarsi ulteriormente.

Si determinerà così un aumento delle deformazioni elastiche (e quindi delle tensioni) negli elementi meno deformati plasticamente, ed una diminuzione delle deformazioni elastiche (e quindi delle tensioni) negli elementi plasticamente più deformati.

Ecco un esempio: nella solita trave inflessa, staticamente determinata, denotiamo con V' la porzione racchiusa entro una o più superfici cilindriche a generatrici parallele all'asse della trave. È, come si riconoscerà facilmente, il caso tipico delle armature metalliche delle travi in calcestruzzo.

Al solo scopo di rendere più facili ed espressivi i raffronti cui ci accingiamo, noi supporremo tali armature simmetricamente disposte rispetto all'asse della trave, come se questa dovesse resistere a momenti flettenti di segni opposti.

E, sempre allo scopo di rendere facili ed espressivi i raffronti, noi supporremo la deformabilità sia elastica che plastica del calcestruzzo decupla di quella delle armature metalliche.

I diagrammi delle deformazioni sotto carico, e dello stato di tensione a trave scarica, sono stati tracciati nelle figg. 5 e 6; essi possono venir paragonati a quelli tracciati nelle figg. 1 e 2 per la trave omogenea, tenendo conto che sia gli uni che gli altri sono riferiti alla medesima deformazione totale ($\mu = 1$).

Pur avendo soltanto un valore dimostrativo, questi diagrammi rendono bene l'idea dell'influenza che l'eterogeneità dei materiali può esercitare nella formazione degli stati di coazione che ogni deformazione plastica porta inevitabilmente con se.

In particolare essi mostrano con singolare ed espressiva evidenza come l'eterogeneità dei materiali possa accentuare quel trasferimento di tensioni dalle regioni più cimentate a quelle che presentano più larghi margini di sicurezza; trasferimento che conferisce ai fenomeni elasto-plastici un così alto interesse non solo teorico ma anche pratico, e di cui l'ingegnere sta finalmente imparando a servirsi ai fini così della perfezione tecnica come della economia delle sue costruzioni.

Meccanica. — *Estensione delle formule di Almansi a sistemi elastici anisotropi.* Nota (*) del Socio Antonio Signorini.

A Riccardo Grammel nel suo 70^mo compleanno.

Per un solido elastico isotropo il potenziale elastico W può sempre pensarsi come una funzione dei soli allungamenti principali Δ_1, Δ_2, Δ_3. Fin dal 1911, in una Nota (1) pubblicata negli Atti di questa Accademia, Almansi mise in luce che le tre *tensioni principali* B_1, B_2, B_3 – quando, come sempre farò, si computino positivamente le pressioni – sono esattamente espresse da

$$(1) \qquad B_r = -\frac{1}{(1+\Delta_{r+1})(1+\Delta_{r+2})}\frac{\partial W}{\partial \Delta_r} \qquad (r = 1, 2, 3),$$

almeno in assenza di ogni vincolo interno, quale potrebbe essere quello di incomprimibilità (gomma).

Passando a solidi anisotropi, W non può più dipendere solo dai Δ_r, ma i secondi membri delle (1) conservano un semplice significato. Precisamente, dopo alcune premesse di carattere molto generale, nel n. 2 della presente Nota (ved. (I)) è dimostrato che, sempre in assenza di ogni vincolo interno, i secondi membri delle (1) continuano a dare esattamente gli *sforzi normali* sugli elementi di superficie corrispondenti a quelli che nello stato di riferimento del solido appartengono ai piani principali di deformazione: sforzi normali che non sono più, necessariamente, tensioni principali.

Un'altra estensione delle formule di Almansi è indicata nel n. 3, dove si specifica un'equazione secolare di 3° grado avente per radici proprio le B_r (ved. (II)) esprimendone tutti i coefficienti mediante le derivate prime di W. Naturalmente nel caso di isotropia essa si spezza in tre equazioni di 1° grado equivalenti alle formule di Almansi.

In tutta la Nota, per semplicità, penserò solo a sistemi esenti da ogni vincolo interno, ma ovvio riuscirà l'adattamento di tutti i risultati a sistemi incomprimibili (2).

Le prossime formule (12) e (17) figuravano già in una mia Memoria (3) del 1943, ma qui vengono ricavate in modo più espressivo e aderente allo scopo della Nota.

(*) Presentata nella seduta dell'8 novembre 1958.

(1) E. Almansi, *Sulle deformazioni finite dei solidi elastici isotropi.* Nota I, «Rend. Acc. Lincei», serie, V, vol. XX, 1° sem. 1911, pp. 705–714.

(2) Cfr. A. Signorini, *Trasformazioni termoelastiche finite*, Mem. 3ª, «Annali di Mat.», serie IV, Tomo XXXIX (1955), Cap. I, n. 1.

(3) *Trasformazioni termoelastiche finite*, Mem. 1ª, «Annali di Mat.», serie IV, Tomo XXII (1943), pp. 33–143: ved. in particolare Cap. III, n. 6.

1. – PREMESSE.

Fissiamo a piacere una terna cartesiana trirettangola

$$\mathcal{T} \equiv O\, \boldsymbol{c}_1\, \boldsymbol{c}_2\, \boldsymbol{c}_3$$

e siano: S un generico sistema continuo tridimensionale, C la sua configurazione attuale, C_* una sua configurazione di riferimento; P_* un punto comunque scelto in C_*, k_* la densità di C_* in P_*; $\mathfrak{D} \equiv P_*\, \boldsymbol{i}_1\, \boldsymbol{i}_2\, \boldsymbol{i}_3$ la [o una] terna principale di deformazione per l'elemento P_* di S; $\mathfrak{D}_Q$ la trasformata di $\mathfrak{D}$ mediante la rotazione locale [4] α_Q. Insieme indichiamo con $X^*_{rs} = X^*_{sr}$ $(r, s = 1, 2, 3)$ le ordinarie caratteristiche dello stress, in P_*, *rispetto alla* $\mathfrak{D}_Q$, e con $Y^*_{rs} = Y^*_{sr}$, oppure con

$$Y^*_r = Y^*_{rr} \quad , \quad Y^*_{r+3} = Y^*_{r+1,\,r+2} \qquad (r = 1, 2, 3)$$

le caratteristiche lagrangiane [4] dello stress, sempre in P_*, *rispetto alla* $\mathfrak{D}$.

La deformazione pura [4] α_δ ha come coefficienti principali i tre binomi

$$d_r = 1 + \Delta_r \qquad (r = 1, 2, 3),$$

mentre l'ordinaria omografia [4] di tensione β è legata all'omografia lagrangiana di tensione β_* e ad α_δ, α_Q dall'uguaglianza

$$\beta = \alpha_Q\, \delta \alpha_Q^{-1}$$

con

$$\delta = \frac{1}{d_1 d_2 d_3}\, \alpha_\delta\, \beta_*\, \alpha_\delta .$$

I coefficienti X^*_{rs} di β rispetto a $\mathfrak{D}_Q$ risultano dunque gli stessi dei coefficienti di δ rispetto a $\mathfrak{D}$. D'altra parte, essendo $\mathfrak{D}$ terna unita di α_δ, si ha

$$\alpha_\delta\, \boldsymbol{i}_s = d_s \cdot \boldsymbol{i}_s \qquad (s = 1, 2, 3)$$

e quindi

$$\boldsymbol{i}_r \times \alpha_\delta\, \beta_*\, \alpha_\delta\, \boldsymbol{i}_s = \alpha_\delta\, \boldsymbol{i}_r \times \beta_*\, \alpha_\delta\, \boldsymbol{i}_s = d_r\, d_s\, Y^*_{rs} .$$

In conclusione rimane stabilito che tra le X^* e Y^* sussistono le semplici relazioni

$$X^*_{rs} = \frac{d_r\, d_s}{d_1\, d_2\, d_3}\, Y^*_{rs} \qquad (r, s = 1, 2, 3). \tag{2}$$

In ogni caso le X^*_{rr} dànno gli sforzi normali sui tre elementi di superficie $d\sigma$ di C, corrispondenti ai tre elementi di superficie $d\sigma_*$ di C_* che in P_* sono ortogonali a $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$; elementi $d\sigma$ che in genere non saranno ortogonali a direzioni unite di β. Per quanto riguarda le tensioni principali B_r,

(4) Ved. Mem. cit. nella nota precedente.

qui si può solo aggiungere che esse dovranno dare le tre radici dell'equazione secolare

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} \frac{d_1 Y_1^*}{d_2 d_3} - B , & \frac{Y_6^*}{d_3} , & \frac{Y_5^*}{d_2} \\ \frac{Y_6^*}{d_3} , & \frac{d_2 Y_2^*}{d_3 d_1} - B , & \frac{Y_4^*}{d_1} \\ \frac{Y_5^*}{d_2} , & \frac{Y_4^*}{d_1} , & \frac{d_3 Y_3^*}{d_1 d_2} - B \end{vmatrix} = 0 .$$

Osservazione. – La rotazione locale α_ϱ stabilisce una corrispondenza biunivoca tra le direzioni unite di β e quelle di δ. Quindi, se si definisce l'isotropia in C_* con la condizione che, per ogni C, l'immagine su C di una direzione principale di deformazione sia direzione principale di tensione [5], dalle (2) senz'altro risulta che S è isotropo in C_* solo quando identicamente si abbia

$$(4)\qquad Y_4^* = Y_5^* = Y_6^* = 0 ,$$

cioè solo quando α_δ e β_* abbiano sempre le stesse direzioni unite.

2. – Una prima estensione delle formule di Almansi.

D'ora innanzi intenderò che S sia un sistema a trasformazioni reversibili esente da ogni vincolo interno, S_ϱ.

Mantengo le notazioni del numero precedente per un determinato stato $\mathcal{K}$ di S_ϱ, pel quale anche indicherò con

$$(5)\qquad E_r = \frac{1}{2}\{(1 + \Delta_r)^2 - 1\} \qquad (r = 1 , 2 , 3)$$

le caratteristiche principali di deformazione in P_*, punto arbitrariamente scelto in C_*. Insieme, indipendentemente dallo speciale significato della $\mathfrak{D}$, introduco tre parametri

$$\varphi_1 , \varphi_2 , \varphi_3$$

con l'unica restrizione che complessivamente essi risultino in corrispondenza biunivoca col generico orientamento della $\mathfrak{D}$. Ad esempio potrà trattarsi di una terna di angoli di Eulero della $\mathfrak{D}$ rispetto a una terna fissa scelta una volta tanto in modo del tutto arbitrario.

Relativamente a un qualunque stato $\mathcal{K}'$ di S_ϱ, per P_* indicherò con $\mathfrak{D}' \equiv P_* \boldsymbol{i}_1' \boldsymbol{i}_2' \boldsymbol{i}_3'$ la terna principale di deformazione [o proprio quella che proviene per continuità da $\mathfrak{D}$], con φ_r' i valori dei φ_r spettanti alla $\mathfrak{D}'$, con ε' l'omografia di deformazione [4], con E_1' , E_2' , E_3' le caratteristiche principali di deformazione. Accennerò poi con T' , T e T_* i valori della temperatura dello stesso elemento P_* in $\mathcal{K}'$, in $\mathcal{K}$ e nello stato di riferimento.

(5) Condizione equivalente a quella che identicamente si annullino le X_{rs}^* con indici diversi.

Dovendo essere

$$\varepsilon' \, \boldsymbol{i}'_t = \mathrm{E}'_t \cdot \boldsymbol{i}'_t \qquad (t = 1, 2, 3),$$

avremo

$$\varepsilon' \, \boldsymbol{c}_s = \sum_1^3{}_t \, \boldsymbol{c}_s \times \boldsymbol{i}'_t \cdot \varepsilon' \, \boldsymbol{i}'_t = \sum_1^3{}_t \, \mathrm{E}'_t \cdot \boldsymbol{c}_s \times \boldsymbol{i}'_t \cdot \boldsymbol{i}'_t$$

e

$$\boldsymbol{c}_r \times \varepsilon' \, \boldsymbol{c}_s = \sum_1^3{}_t \, \mathrm{E}'_t \cdot \boldsymbol{c}_r \times \boldsymbol{i}'_t \cdot \boldsymbol{c}_s \times \boldsymbol{i}'_t \qquad (r, s = 1, 2, 3). \tag{6}$$

In queste espressioni dei coefficienti della ε' rispetto alla $\mathcal{T}$, le E' intervengono solo esplicitamente e gli $\boldsymbol{i}'_t$ sono da trattare come determinate funzioni $\boldsymbol{i}'_t(\varphi'_1, \varphi'_2, \varphi'_3)$ dei soli φ'. Alle (6) corrispondono per le ordinarie caratteristiche di deformazione – $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3$ e $\varepsilon'_4 = \gamma'_1$, $\varepsilon'_5 = \gamma'_2$, $\varepsilon'_6 = \gamma'_3$ – le espressioni

$$\varepsilon'_l = \sum_1^3{}_t \, \mathrm{E}'_t \cdot [\boldsymbol{c}_l \times \boldsymbol{i}'_t]^2 \quad , \quad \varepsilon'_{l+3} = 2 \sum_1^3{}_t \, \mathrm{E}'_t \cdot \boldsymbol{c}_{l+1} \times \boldsymbol{i}'_t \cdot \boldsymbol{c}_{l+2} \times \boldsymbol{i}'_t \qquad (l = 1, 2, 3), \tag{7}$$

e si hanno come evidenti conseguenze tutte le uguaglianze

$$\left[\frac{\partial \varepsilon'_l}{\partial \mathrm{E}'_r}\right]_{\mathcal{H}' \equiv \mathcal{H}} = [\boldsymbol{c}_l \times \boldsymbol{i}_r]^2 \quad , \quad \left[\frac{\partial \varepsilon'_{l+3}}{\partial \mathrm{E}'_r}\right]_{\mathcal{H}' \equiv \mathcal{H}} = 2 \, \boldsymbol{c}_{l+1} \times \boldsymbol{i}_r \cdot \boldsymbol{c}_{l+2} \times \boldsymbol{i}_r \qquad (r = 1, 2, 3) \tag{8}$$

e

$$\begin{cases} \left[\dfrac{\partial \varepsilon'_l}{\partial \varphi'_r}\right]_{\mathcal{H}' \equiv \mathcal{H}} = 2 \displaystyle\sum_1^3{}_t \, \mathrm{E}_t \cdot \boldsymbol{c}_l \times \boldsymbol{i}_t \cdot \boldsymbol{c}_l \times \frac{\partial \boldsymbol{i}_t}{\partial \varphi_r}, \\ \left[\dfrac{\partial \varepsilon'_{l+3}}{\partial \varphi'_r}\right]_{\mathcal{H}' \equiv \mathcal{H}} = 2 \displaystyle\sum_1^3{}_t \, \mathrm{E}_t \left\{ \boldsymbol{c}_{l+1} \times \frac{\partial \boldsymbol{i}_t}{\partial \varphi_r} \cdot \boldsymbol{c}_{l+2} \times \boldsymbol{i}_t + \boldsymbol{c}_{l+1} \times \boldsymbol{i}_t \cdot \boldsymbol{c}_{l+2} \times \frac{\partial \boldsymbol{i}_t}{\partial \varphi_r} \right\}. \end{cases} \qquad (l = 1, 2, 3) \tag{9}$$

Sempre per quanto riguarda l'elemento P_*, il potenziale termodinamico di S_ϱ si presenta come una funzione del tipo

$$\mathcal{F}(\varepsilon' \,|\, \mathrm{T}', \mathrm{T}_* ; \mathrm{P}_*),$$

la cui forma effettiva dipende dalla scelta dello stato di riferimento, e generalmente anche da quella dell'orientamento della $\mathcal{T}$: comunque le sei caratteristiche lagrangiane di tensione rispetto alla $\mathcal{T}$ restano espresse dai prodotti

$$-k_* \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varepsilon'_j}\right)_{\mathcal{H}' \equiv \mathcal{H}} \qquad (j = 1, 2, \cdots, 6).$$

A noi particolarmente interessano le Y^*_j, ma nulla vieta – e ormai conviene – di assumere per $\mathcal{T}$ la $\mathfrak{D}$, *senza cambiare il primitivo significato dei* φ. Con questa specializzazione della $\mathcal{T}$, se si indicano con ε^*_j $(j = 1, 2, \cdots, 6)$ i corrispondenti valori delle ε'_j e con

$$\mathcal{F}^*(\varepsilon^* \,|\, \mathrm{T}', \mathrm{T}_* ; \mathrm{P}_*)$$

la particolare forma allora assunta dalla $\mathfrak{F}(\varepsilon' \mid T', T_*; P_*)$, avremo proprio

$$(10) \qquad Y_j^* = -k_* \left[\frac{\partial \mathfrak{F}^*}{\partial \varepsilon_j^*}\right]_{\mathcal{H}'\equiv\mathcal{H}} \qquad (j = 1, 2, \cdots, 6).$$

Le (7) direttamente permettono di ridurre la $\mathfrak{F}(\varepsilon' \mid T', T_*; P_*)$ a una funzione del tipo

$$\mathfrak{F}^{(E)}(E' \mid \varphi' \mid T', T_*; P_*),$$

la stessa comunque sia stata scelta la $\mathcal{C}$, e l'identità

$$(11) \qquad \mathfrak{F}^*(\varepsilon^* \mid T', T_*; P_*) = \mathfrak{F}^{(E)}(E' \mid \varphi' \mid T', T_*; P_*)$$

ha come necessaria conseguenza

$$\frac{\partial \mathfrak{F}^{(E)}}{\partial E_r'} \equiv \left[\frac{\partial \mathfrak{F}^{(E)}(E' \mid \varphi \mid T, T_*; P_*)}{\partial E_r'}\right]_{\mathcal{H}'\equiv\mathcal{H}} = \sum_1^6{}_j \left[\frac{\partial \mathfrak{F}^*}{\partial \varepsilon_j^*} \frac{\partial \varepsilon_j^*}{\partial E_r'}\right]_{\mathcal{H}'\equiv\mathcal{H}} \qquad (r = 1, 2, 3).$$

Ora, per riferire le (8) alle ε^*, non c'è che da porre nei loro secondi membri $\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{c}_2 = \boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{c}_3 = \boldsymbol{i}_3$; con l'immediata conseguenza che per $\mathcal{H}' \equiv \mathcal{H}$ si annullano tutte le $\partial \varepsilon_j^* / \partial E_r'$ salvo

$$\left[\frac{\partial \varepsilon_r^*}{\partial E_r'}\right]_{\mathcal{H}'\equiv\mathcal{H}} = 1.$$

Quindi, con l'intervento delle prime tre delle (10), si ottiene

$$(12) \qquad -k_* \frac{\partial \mathfrak{F}^{(E)}}{\partial E_r'} = Y_r^* \qquad (r = 1, 2, 3).$$

Sono queste, in sostanza, le formule che estendono le formule di Almansi ai sistemi anisotropi. Infatti, accennando con

$$\mathfrak{F}^{(\Delta)}(\Delta \mid \varphi \mid T, T_*; P_*)$$

la funzione che si ricava dalla $\mathfrak{F}^{(E)}(E \mid \varphi \mid T, T_*; P_*)$ mediante la sostituzione delle E con le loro espressioni (5), si ha

$$(1 + \Delta_r) \frac{\partial \mathfrak{F}^{(E)}}{\partial E_r} = \frac{dE_r}{d\Delta_r} \cdot \frac{\partial \mathfrak{F}^{(E)}}{\partial E_r} = \frac{\partial \mathfrak{F}^{(\Delta)}}{\partial \Delta_r} \qquad (r = 1, 2, 3).$$

Essendo [cfr. (2)]

$$X_{rr}^* = \frac{1 + \Delta_r}{(1 + \Delta_{r+1})(1 + \Delta_{r+2})} Y_r^* \qquad (r = 1, 2, 3),$$

evidentemente risulta [cfr. (1)]

$$(I) \qquad X_{rr}^* = -\frac{k_*}{(1 + \Delta_{r+1})(1 + \Delta_{r+2})} \frac{\partial \mathfrak{F}^{(\Delta)}}{\partial \Delta_r} \qquad (r = 1, 2, 3).$$

3. – UN'ALTRA ESTENSIONE DELLE FORMULE DI ALMANSI.

Pongo

$$\boldsymbol{\omega}_r = \frac{1}{2}\sum_1^3{}_i \, \boldsymbol{i}_t \wedge \frac{\partial \boldsymbol{i}_t}{\partial \varphi_r} \qquad (r = 1, 2, 3),$$

cioè [6]

$$\frac{\partial \boldsymbol{i}_l}{\partial \varphi_r} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{i}_l \qquad (r, l = 1, 2, 3). \tag{13}$$

Tanto gli $\boldsymbol{\omega}_r$, quanto le loro componenti p_{rl} rispetto alla $\mathfrak{D}$ $(r, l = 1, 2, 3)$ risultano ben determinate funzioni dei soli φ_r. Ad esempio se per i φ_r si assume una terna di angoli di Eulero della $\mathfrak{D}$,

$$\theta, \psi, \varphi,$$

e, più precisamente, se si intende

$$\varphi_1 = \theta \quad , \quad \varphi_2 = \psi \quad , \quad \varphi_3 = \varphi, \tag{14}$$

gli $\boldsymbol{\omega}_r$ ordinatamente si riducono [7] al versore della linea dei nodi, al versore dell'asse di precessione, al versore dell'asse di figura, e le p_{rl} restano semplicemente espresse da

$$\begin{cases} p_{11} = \cos\varphi & , \quad p_{12} = -\sin\varphi & , \quad p_{13} = 0 \\ p_{21} = \sin\theta\sin\varphi & , \quad p_{22} = \sin\theta\cos\varphi & , \quad p_{23} = \cos\theta \\ p_{31} = 0 & , \quad p_{32} = 0 & , \quad p_{33} = 1. \end{cases} \tag{15}$$

Stante le (13), dalle (9) subito si ricava che è

$$\left[\frac{\partial \varepsilon_l^*}{\partial \varphi_r'}\right]_{\mathfrak{K}'\equiv\mathfrak{K}} = 2\sum_1^3{}_t \, \mathrm{E}_t \cdot \boldsymbol{i}_l \times \boldsymbol{i}_t \cdot \boldsymbol{i}_l \times (\boldsymbol{\omega}_r \wedge \boldsymbol{i}_t) = 2\sum_1^3{}_t \, \mathrm{E}_t \cdot \boldsymbol{i}_l \times \boldsymbol{i}_t \cdot \boldsymbol{\omega}_r \times (\boldsymbol{i}_t \wedge \boldsymbol{i}_l) \; (l = 1, 2, 3),$$

cioè

$$\left[\frac{\partial \varepsilon_l^*}{\partial \varphi_r'}\right]_{\mathfrak{K}'\equiv\mathfrak{K}} = 0 \qquad (r, l = 1, 2, 3), \tag{16}$$

perché per ogni l e t si annulla o $\boldsymbol{i}_l \times \boldsymbol{i}_t$ o $\boldsymbol{i}_l \wedge \boldsymbol{i}_t$.

Le (9) e (13) implicano inoltre

$$\left[\frac{\partial \varepsilon_{l+3}^*}{\partial \varphi_r'}\right]_{\mathfrak{K}'\equiv\mathfrak{K}} = 2\sum_1^3{}_t \, \mathrm{E}_t \{ \boldsymbol{i}_{l+1} \times (\boldsymbol{\omega}_r \wedge \boldsymbol{i}_t) \cdot \boldsymbol{i}_{l+2} \times \boldsymbol{i}_t + \boldsymbol{i}_{l+1} \times \boldsymbol{i}_t \cdot \boldsymbol{i}_{l+2} \times (\boldsymbol{\omega}_r \wedge \boldsymbol{i}_t) \},$$

ovvero

$$\left[\frac{\partial \varepsilon_{l+3}^*}{\partial \varphi_r'}\right]_{\mathfrak{K}'\equiv\mathfrak{K}} = 2\{ \mathrm{E}_{l+2} \cdot \boldsymbol{i}_{l+1} \times (\boldsymbol{\omega}_r \wedge \boldsymbol{i}_{l+2}) + \mathrm{E}_{l+1} \cdot \boldsymbol{i}_{l+2} \times (\boldsymbol{\omega}_r \wedge \boldsymbol{i}_{l+1}) \}$$

e in definitiva

$$\left[\frac{\partial \varepsilon_{l+3}^*}{\partial \varphi_r'}\right]_{\mathfrak{K}'\equiv\mathfrak{K}} = 2\, p_{rl}\, (\mathrm{E}_{l+1} - \mathrm{E}_{l+2}) \qquad (r, l = 1, 2, 3).$$

(6) Cfr. ad esempio A. SIGNORINI, *Meccanica razionale con elementi di Statica grafica*, Vol. I, 2ª ediz. (Roma, Perrella, 1952) Cap. III, n. 15.

(7) Cfr. ad esempio op. cit. nella nota prec., Cap. IV, n. 5.

D'altra parte l'identità (11) ha come necessaria conseguenza anche

$$\frac{\partial \mathcal{F}^{(\Delta)}}{\partial \varphi_r} \equiv \left[\frac{\partial \mathcal{F}^{(\Delta)}(\Delta \mid \varphi' \mid T, T_*; P_*)}{\partial \varphi'_r} \right]_{\mathcal{H}' \equiv \mathcal{H}} = \left[\sum_1^6{}_j \frac{\partial \mathcal{F}^*}{\partial \varepsilon_j^*} \frac{\partial \varepsilon_j^*}{\partial \varphi'_r} \right]_{\mathcal{H}' \equiv \mathcal{H}} \qquad (r = 1, 2, 3)$$

e così, con l'intervento delle (16) e delle ultime tre delle (10), si viene a riconoscere che $\partial \mathcal{F}^{(\Delta)}/\partial \varphi_r$ risulta sempre una combinazione lineare omogenea [8] delle sole Y_4^*, Y_5^*, Y_6^*:

$$(17) \qquad -k_* \frac{\partial \mathcal{F}^{(\Delta)}}{\partial \varphi_r} = 2 \sum_1^3{}_l p_{rl} \cdot (E_{l+1} - E_{l+2})\, Y_{l+3}^* \qquad (r = 1, 2, 3).$$

Accenniamo ora con P i reciproci [9] dei singoli p nel loro determinante $|p_{rl}|$ e poniamo

$$(18) \qquad \Phi_t^{(\Delta)} = \sum_1^3{}_r P_{rt} \frac{\partial \mathcal{F}^{(\Delta)}}{\partial \varphi_r} \qquad (t = 1, 2, 3);$$

ad esempio nel caso (14)–(15) si avrà

$$\begin{cases} \Phi_1^{(\Delta)} = \cos\varphi \dfrac{\partial \mathcal{F}^{(\Delta)}}{\partial \theta} + \dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta} \dfrac{\partial \mathcal{F}^{(\Delta)}}{\partial \psi} - \sin\varphi \cot\theta \dfrac{\partial \mathcal{F}^{(\Delta)}}{\partial \varphi}, \\ \Phi_2^{(\Delta)} = -\sin\varphi \dfrac{\partial \mathcal{F}^{(\Delta)}}{\partial \theta} + \dfrac{\cos\varphi}{\sin\theta} \dfrac{\partial \mathcal{F}^{(\Delta)}}{\partial \psi} - \cos\varphi \cot\theta \dfrac{\partial \mathcal{F}^{(\Delta)}}{\partial \varphi}, \\ \Phi_3^{(\Delta)} = \dfrac{\partial \mathcal{F}^{(\Delta)}}{\partial \varphi}. \end{cases}$$

Comunque la risoluzione delle (17) rispetto alle Y_{l+3}^* si concreta in

$$(19) \qquad Y_{l+3}^* = -\frac{k_* \Phi_l^{(\Delta)}}{2(E_{l+1} - E_{l+2})} \qquad (l = 1, 2, 3),$$

e dopo questo si ottiene la preannunziata equazione secolare per il calcolo delle tre tensioni principali B_r semplicemente eliminando le Y^* dalla (3), mediante le (19) e (12). Essa è

$$(II) \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{k_* \mathcal{F}_1^{(\Delta)}}{d_2 d_3} + B & \dfrac{k_* \Phi_3^{(\Delta)}}{2 d_3 (E_1 - E_2)} & \dfrac{k_* \Phi_2^{(\Delta)}}{2 d_2 (E_3 - E_1)} \\ \dfrac{k_* \Phi_3^{(\Delta)}}{2 d_3 (E_1 - E_2)} & \dfrac{k_* \mathcal{F}_2^{(\Delta)}}{d_3 d_1} + B & \dfrac{k_* \Phi_1^{(\Delta)}}{2 d_1 (E_2 - E_3)} \\ \dfrac{k_* \Phi_2^{(\Delta)}}{2 d_2 (E_3 - E_1)} & \dfrac{k_* \Phi_1^{(\Delta)}}{2 d_1 (E_2 - E_3)} & \dfrac{k_* \mathcal{F}_3^{(\Delta)}}{d_1 d_2} + B \end{vmatrix} = 0,$$

se si abbrevia $\partial \mathcal{F}^{(\Delta)}/\partial E_r$ in $\mathcal{F}_r^{(\Delta)}$ $(r = 1, 2, 3)$.

(8) In particolare appare ben chiaro che la condizione di isotropia in C_* equivale, [cfr. (4)] all'indipendenza della $\mathcal{F}^{(\Delta)}$ da tutti i φ_r.

(9) Direttamente mi riferisco solo a un generico orientamento della $\mathfrak{D}$ e, appresso, solo a valori generici delle E; ved. però la OSSERVAZIONE finale di questo numero.

Di una suggestiva interpretazione sono suscettibili i $\Phi_t^{(\Delta)}$, formalmente introdotti mediante le (18). Pensiamo infatti a una rotazione virtuale $\mathcal{R}_t$ della $\mathfrak{D}$ attorno all'asse $P_* \boldsymbol{i}_t$ $(t = 1, 2, 3)$ corrispondente a certe variazioni

$$\delta_t \varphi_r$$

dei φ_r: in modo che, chiamando $\delta\psi_t$ l'ampiezza (con segno) di $\mathcal{R}_t$ dovremo intendere

$$\sum_1^3{}_r \omega_r \cdot \delta_t \varphi_r = \delta\psi_t \cdot \boldsymbol{i}_t,$$

cioè

$$\sum_1^3{}_r p_{ru} \cdot \delta_t \varphi_r = \delta\psi_t \cdot \eta_{tu} \qquad (t, u = 1, 2, 3)$$

con $\eta_{tu} = 1$ per $u = t$ e $\eta_{tu} = 0$ per $u \neq t$.

Dall'essere simultaneamente

$$\sum_1^3{}_r p_{ru} \cdot P_{rt} = \eta_{tu} \qquad (t, u = 1, 2, 3)$$

risulta

$$\delta_t \varphi_r = P_{rt} \cdot \delta\psi_t$$

e quindi

$$\delta_t \mathcal{F}^{(\Delta)} \equiv \sum_1^3{}_r \mathcal{F}_r^{(\Delta)} \cdot \delta_t \varphi_r = \sum_1^3{}_r P_{rt} \mathcal{F}_r^{(\Delta)} \cdot \delta\psi_t,$$

cioè

$$\Phi_t^{(\Delta)} \delta\psi_t = \delta_t \mathcal{F}^{(\Delta)} \qquad (t = 1, 2, 3). \tag{20}$$

OSSERVAZIONE. – Stante le (20), appare ben naturale [cfr. (19)] che Φ_t debba annullarsi insieme a $E_{t+1} - E_{t+2}$: per $E_{t+1} = E_{t+2}$ una $\mathcal{R}_t$ non può cambiare il valore di $\mathcal{F}^{(\Delta)}$, potendosi allora pensare come $\mathfrak{D}$ una qualunque delle terne trirettangole di cui fa parte $P_* \boldsymbol{i}_t$.

Geodesia. — *Confronti fra i vari tipi di livellazione geometrica di precisione ottenuti con i valori delle gravità osservate nei singoli caposaldi.* Nota (*) del Socio Giovanni Boaga.

Nelle ultime Assemblee Generali della U.G.G.I. (Roma 1954, Toronto 1957) è stato consigliato l'impiego delle gravità osservate, anziché quello delle gravità teoriche, per il calcolo delle correzioni dei dati rilevati in campagna lungo le linee di livellazione geometrica di precisione, ed anzi nella Assemblea di Roma è stata accolta la proposta avanzata dal prof. Tardi (Parigi) della sostituzione delle *quote geopotenziali*, a quelle ordinariamente usate: *quote dinamiche* o *quote ortometriche*.

In relazione a ciò si ritiene opportuno un confronto concreto sui risultati della elaborazione delle misure effettuate sul terreno, che portano rispettivamente alle definizioni dei tre tipi di quote, utilizzando naturalmente i valori delle gravità osservate nei singoli caposaldi.

Tabella I.

Ubicazioni dei caposaldi.

N. ordine	N. I.G.M.	Località c. s.	Distanze progressive	Posizioni geografiche		Altezze sul livello marino
				Latitudine	Longitudine da M. Mario	
			Km	44°	− 3°	m
1	l. m.	Genova l. m.	0,00	24′ 43″	31′ 29″	0,00
2	9	Casa Cant. Teglia	8,96	27 14	33 16	51,10
3	18	Galleria delle Piane . . .	17,14	30 43	31 25	220,68
4	26	Galleria Littorio	24,37	33 31	30 20	412,80
5	34	Ronco Scrivia	32,68	36 54	30 05	324,74
6	42	Viadotto (Km 42)	40,61	39 49	30 19	288,83
7	52	Casello Vignole Arquata . .	49,31	42 09	33 53	231,94
8	63	Casa Oliano	59,56	46 19	35 11	181,78
9	72	Mangiaferro	67,46	50 18	35 58	149,99
10	80	Tortona (Duomo)	74,82	53 52	35 12	121,19

(*) Presentata nella seduta dell'8 novembre 1958.

Per questo confronto si sono utilizzati i risultati di campagna ottenuti dallo I.G.M. con le operazioni del 1942–43 e pubblicati alla fine del 1955 lungo la linea n. 1 di livellazione geometrica di precisione nazionale, limitatamente ai primi 80 Km, che da Genova (livello del mare) porta a Tortona lungo l'itinerario segnato dalla autostrada Genova–Serravalle, e poi da Serravalle a Tortona lungo la strada nazionale per Cassano Spinola, Villavernia, Castellar Ponzano, Mangiaferro, ecc. I caposaldi stabiliti dall'I.G.M. – nel tratto considerato – sono ottanta e di questi abbiamo scelti soltanto dieci, alla equidistanza media di circa 7,5 Km, l'uno dall'altro, includendo in questi naturalmente il caposaldo origine (Genova – livello marino).

I nomi delle località dei caposaldi prescelti assieme al loro numero, assegnato dall'I.G.M., alle loro distanze dall'origine computate sull'itinerario descritto, le loro posizioni geografiche e le loro altezze sul livello del mare, provenienti dalle misurazioni ricordate sono raccolte nella Tabella I.

Ciò premesso, indicando rispettivamente con:

$d\mathrm{W}$ la variazione del potenziale terrestre nel passare da una superficie equipotenziale di potenziale W all'altra infinitamente vicina di potenziale $\mathrm{W} - d\mathrm{W}$;

dz lo spostamento lungo la normale alla W, nel punto P che si considera, per passare da una superficie all'altra;

g la gravità in P;

sussiste come è noto la relazione:

$$d\mathrm{W} = -g \cdot dz . \tag{1}$$

In particolare, se P_1 e P_2 sono due punti della superficie topografica della Terra posti su due superfici equipotenziali (W_1 e W_2), dalla precedente, integrando, si trae:

$$\mathrm{W}_1 - \mathrm{W}_2 = \int_{\mathrm{P}_1}^{\mathrm{P}_2} g \cdot dz \tag{2}$$

dove g deve intendersi funzione di z.

Immaginando ora di collegare i due punti P_1 e P_2 con una *livellazione geometrica di precisione* suddividendo l'intero percorso in un numero n di tratte, il differenziale dz della precedente si può assimilare alla differenza di livello Δz_i dei due punti P_{i-1}, P_i della tratta i–esima. Se g_{i-1} e g_i rappresentano le gravità osservate rispettivamente in detti due punti e z_{i-1}, z_i le distanze dei punti anzidetti dalla superficie equipotenziale di riferimento (passante per il livello medio del mare) contate sulle linee di forza (normali alle superfici equipotenziali) si potrà scrivere la relazione

$$\mathrm{W}_1 - \mathrm{W}_2 = \sum_1^n{}_i \, g_{m/i} \cdot \Delta z_i \tag{3}$$

del tipo (2), ma in termini finiti, dove

$$g_{m/i} = \frac{1}{2}(g_{i-1} + g_i) \qquad \Delta z_i = z_i - z_{i-1}.$$

È ovvio che i secondi membri delle (2) e (3) non sono numericamente identici, ma la loro differenza risulta del tutto trascurabile ai fini delle operazioni pratiche (cfr. C. F. Baeschlin, *Lehrbuch der Geodäsie*, Zurigo 1948).

Se il punto P_1 si trova sulla superficie equipotenziale W_0 passante per il livello medio marino, sostituendo a P_2 il solo simbolo P, la (3) fornisce la:

$$W_0 - W_P = \sum_0^n{}_i \, g_{m/i} \cdot \Delta z_i . \tag{4}$$

La differenza $C = W_0 - W_P$ è chiamata *quota geopotenziale del punto* P (prof. Tardi).

Dalla (4) risulta chiaro che: *tutti i punti di* W_0 *risultano di quota geopotenziale zero; quando i punti* P *sono interni a* W_0 *le quote geopotenziali risultano negative, e quando sono esterni, positive.*

Come *unità delle quote geopotenziali* (*u g p*) è stato convenuto di prendere il *Kilogalmetro*, eppertanto $1\ (u\,g\,p) \equiv 10^5\,\mathrm{cm^2 \cdot sec^2}$.

La quota geopotenziale di un punto qualsiasi P della superficie topografica terrestre espressa in (*u g p*) è sempre inferiore di circa il 2‰ della sua altitudine espressa in metri e riferita al livello marino.

La quota dinamica Q_P del punto P è definita dalla:

$$Q_P = \frac{C_P}{\gamma_{0/45^\circ}} \tag{5}$$

dove $\gamma_{0/45^\circ}$ rappresenta il valore teorico 0,9806295 Kgal della gravità al livello del mare ed alla latitudine 45°.

Inoltre, poiché C_P è indipendente dall'itinerario percorso, per andare dalla superficie W_0 al punto P, si può immaginare anche di percorrere l'itinerario coincidente con il tratto di linea di forza che da P′ su W_0 va a P su W; in tal modo:

$$C_P = \int_0^P g \cdot dz = \int_{P'}^P g \cdot dz .$$

Indicando con $\bar{g}_P$ il *valore medio della gravità lungo il tratto* P′ P *di linea di forza*, l'ultimo termine della precedente prende la forma

$$\bar{g}_P \cdot \int_{P'}^P dz$$

dove l'integrale messo così in evidenza esprime la quota ortometrica H_P del punto P, eppertanto essa risulta definita dalla

$$H_P = \frac{C_P}{\bar{g}_P} . \tag{6}$$

La gravità $g_{P'}$ rappresenti la gravità in P'; essa si identifica, con grande approssimazione, alla gravità $\bar{g}_P$ in P corretta per l'altezza (correzione di Faye) e per l'effetto delle masse interposte fra la superficie equipotenziale passante per P e la W_o (correzione di Bouguer), eppertanto;

$$(7) \qquad g_{P'} = g_P + \frac{2g_P}{R} \cdot z - \frac{3}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta_m} \cdot \frac{g_P}{R} \cdot z$$

con: δ densità del materiale compreso tra le due superfici equipotenziali ora dette, δ_m densità media terrestre, R raggio medio della Terra, z lunghezza del segmento P' P della linea di forza passante per tali punti.

Ponendo negli ultimi due addendi della precedente per g_P il valore approssimato 981 gal, per R il valore 6371200 m e per densità media il valore 5,52, generalmente accettato, la (7) diviene:

$$g_{P'} = g_P + (0{,}3086 - 0{,}04184 \cdot \delta) z$$

e conseguentemente

$$(8) \qquad \bar{g}_P = g_P + (0{,}1543 - 0{,}02092 \cdot \delta) \cdot z$$

dove esprimendo z in metri il prodotto risulta espresso in *milligal.*

TABELLA II.

Valori gravimetrici.

N. ordine	Gravità osservate g	Correzioni		Gravità ridotte		Gravità medie lungo PP' $\bar{g}_P$	Gravità normale γ	Anomalie	
		Faye	Bouguer	g_o	g''_o			Faye	Bouguer
	gal	mgal	mgal	gal	gal	gal	gal	mgal	mgal
	980,			980,	980,	980,	980,		
1	57660	0,0	0,0	5766	5766	57660	5762	+ 0,4	+ 0,4
2	56192	+ 15,8	— 4,7	5777	5730	56745	5800	— 2,3	— 7,0
3	51139	+ 68,1	— 20,4	5795	5591	53526	5854	— 5,9	— 26,3
4	46392	+127,4	— 38,1	5913	5532	50858	5896	+ 1,7	— 36,4
5	46898	+100,2	— 30,0	5692	5392	50411	5947	— 25,5	— 55,5
6	45900	+ 89,1	— 26,6	5486	5220	49025	5989	— 40,3	— 76,9
7	46701	+ 71,6	— 21,4	5386	5170	49210	6025	— 63,9	— 85,3
8	44983	+ 56,1	— 16,8	5059	4891	46950	6088	—102,9	—119,7
9	45140	+ 46,3	— 13,8	4977	4839	46762	6148	—117,1	—130,9
10	46212	+ 37,4	— 11,2	4995	4883	47523	6210	—120,6	—131,8

Nella Tabella II sono state trascritte rispettivamente i valori delle gravità osservate g nelle dieci località prescelte, gli importi delle correzioni di Faye e di Bouguer, le gravità g_0 ridotte per la sola correzione di Faye, quelle g_0'' ridotte per entrambe le correzioni di Faye e di Bouguer, le gravità medie $\bar{g}_P$ lungo le linee di forza da P a P' per tutte le località considerate, le gravità normali γ calcolate con la formula internazionale (1930):

$$\gamma = 978{,}049\,(1 + 0{,}0052884\,\mathrm{sen}^2\,\varphi - 0{,}0000059\,\mathrm{sen}^2\,2\varphi)$$

con φ latitudine del caposaldo, ed infine le anomalie di Faye $(g_0 - \gamma)$ e di Bouguer $(g_0'' - \gamma)$.

Nella Tabella III, sono riportate le differenze di livello Δz_i fra due caposaldi consecutivi, le gravità medie $g_{m/i}$, i prodotti $g_{m/i} \cdot \Delta z_i$, le *quote geopotenziali* C per tutti e dieci i caposaldi considerati e le corrispondenti *quote dinamiche* Q ed *ortometriche* H, dedotte dalle precedenti (4), (5) e (6) rispettivamente.

Nella Tabella IV sono riportate infine le differenze C — Q, C — H, Q — H. A dire il vero non ha senso considerare le prime due differenze in quanto le quote geopotenziali non hanno le dimensioni di una lunghezza, ma di un lavoro, ci sia tuttavia consentita la licenza, anche perché la U. G. G.I. ha consigliato di usare nei lavori geodetici le quote geopotenziali anziché quelle dinamiche e ortometriche finora utilizzate e generalmente ottenute con i valori teorici della gravità.

TABELLA III.

Quote geopotenziali, quote dinamiche, quote ortometriche.

N. ord.	Differenze di livello Δz_i	Gravità medie $g_{m/i}$	$g_{m/i} \cdot \Delta z_i$	Quote geopotenziali C	Quote dinamiche Q	Quote artometriche H
	m	gal	Kgalm	Kgalm	m	m
1	—	—	—	0,00000	0,00000	0,00000
2	+ 51,09751	980,56926	+ 50,10465	50,10465	51,09438	51,09761
3	+169,58678	53665	+166,28605	216,39070	220,66511	220,68631
4	+192,11899	48765	+188,37030	404,76100	412,75632	412,80720
5	— 88,06258	46645	— 86,34241	318,41859	324,70838	324,74988
6	— 35,91019	46399	— 35,20865	283,20994	288,80424	288,84524
7	— 56,89304	46300	— 55,78152	227,42842	231,92086	231,95335
8	— 50,15853	45842	— 49,17835	178,25007	181,77108	181,80073
9	— 31,78729	45061	— 31,16587	147,08420	149,98958	150,01434
10	— 28,79738	45676	— 28,23459	118,84961	121,19727	121,21633

Dalle differenze riportate nella Tabella IV, si constata che le differenze C—Q e C—H sono molto sensibili, mentre le differenze Q — H raggiungono importi in valore assoluto compresi nello intervallo 0 cm – 5 cm. Le quote dinamiche inoltre risultano sempre maggiori delle ortometriche.

TABELLA IV.

Confronti.

N. ord.	C — Q	C — H	Q — H
			m
1	0,00000	0,00000	0,00000
2	— 0,98973	— 0,99296	— 0,00323
3	— 4,27441	— 3,69561	— 0,02120
4	— 7,99532	— 8,04620	— 0,05088
5	— 6,28979	— 6,33129	— 0,04150
6	— 5,59430	— 5,63530	— 0,04100
7	— 4,49244	— 4,52493	— 0,03249
8	— 3,52101	— 3,55068	— 0,02965
9	— 2,90538	— 2,93014	— 0,02476
10	— 2,34766	— 2,36672	— 0,01906

Sarebbe interessante estendere i confronti anche con i valori delle quote dinamiche ed ortometriche determinate con i valori gravimetrici teorici e constatare se le differenze fra le dette quote – determinate sia con valori teorici sia con quelli osservati per le gravità – risultano in correlazione con le anomalie gravimetriche che si riscontrano nei singoli caposaldi. Ciò è quanto ci proponiamo di sviluppare in seguito considerando sempre la medesima linea di livellazione ed un più grande numero di caposaldi, intanto osserviamo che il *coefficiente di correlazione*, fra le anomalie gravimetriche di Bouguer e le differenze Q — H sopra scritte, risulta dell'importo + 0,334 in perfetta corrispondenza alla interpretazione geofisica della differenza fra quote dinamiche e quote ortometriche.

Chimica. — *Analisi dello spettro vibrazionale dello ione complesso* $Cr(CN)_6^{3-}$ (*). Nota di Vincenzo Caglioti, Guido Sartori e Claudio Furlani, presentata (**) dal Socio V. Caglioti.

In una Nota precedente [1] abbiamo calcolato le costanti di forza dello ione complesso $Cr(CN)_6^{---}$ in confronto con quelle di $Cr(CO)_6$.

Lo scopo del lavoro era essenzialmente quello di stabilire se, come ci si aspettava, il legame Cr—C nel cianuro possedeva una costante di forza inferiore allo stesso legame nel carbonile, data la minor possibilità di formare doppio legame nel complesso cianidrico rispetto a quello carbonilico.

Il calcolo era stato fatto sulla base di alcune frequenze determinate sperimentalmente a mezzo dello spettro I. R. e sulla base di altre valutate dalle bande di combinazione, in modo perfettamente analogo a quanto Hawkins e collaboratori [2] hanno fatto per l'assegnazione delle bande di assorbimento di $Cr(CO)_6$.

L'approssimazione adottata era quella di considerare il problema come involvente sette masse, vale a dire di considerare il gruppo CN^- come un unico atomo.

Nel frattempo Hiromu Murata e Kiyoyasu Kawai [3] hanno ripreso il calcolo delle costanti di forza del cromocarbonile dai dati spettroscopici di Hawkins e hanno trattato il problema con il campo di forza di Urey e Bradley [4], considerando tutte e tredici le masse presenti.

Nella loro valutazione si sono accorti che due bande di combinazione e precisamente la ν_{10} del tipo T_{2g} e la ν_{12} del tipo T_{2u} non potevano avere il valore proposto da Hawkins, rispettivamente di 213 e 310 cm^{-1}, ma devono essere 598 e 570 cm^{-1}.

Con queste variazioni e, come si è detto, con una funzione potenziale di Urey e Bradley, essi calcolano le seguenti costanti di forza

stretching	C—O	$16.02 \cdot 10^5$
stretching	Cr—C	$1.83 \cdot 10^5$
bending	Cr—C—O	$0.41 \cdot 10^5$
bending	C—Cr—C	$0.03 \cdot 10^5$

Noi avevamo impiegato nel calcolo il metodo di Wilson determinando le matrici F e G in modo analogo a K. Venkateswarlu e S. Sundaram [5].

C. Pistorius [6], rivedendo dette matrici si è accorto che alcune espressioni adottate dagli Autori indicati erano affette da qualche imprecisione in

(*) Lavoro eseguito negli Istituti di Chimica delle Università di Roma e di Trieste.
(**) Nella seduta dell'8 novembre 1958.

conseguenza della quale pertanto, anche le costanti da noi calcolate avrebbero dovuto subire un ritocco parallelo sia per $Cr(CN)_6^{3-}$ che per $Cr(CO)_6$. Poiché inoltre, le approssimazioni da noi adottate nella precedente trattazione del problema non potevano dare altro che una prima indicazione dell'ordine di grandezza delle costanti, abbiamo deciso di riprendere lo studio a fondo, computando invece di sette, tutte e tredici le masse in gioco.

Nel calcolo presente, per analogia con il lavoro precedente, abbiamo adottato una funzione potenziale del tipo delle forze di valenza.

Adottando la stessa numerazione degli atomi della Nota precedente,

le coordinate interne dell'ottaedro a 13 masse sono 36, di cui 3 sono le coordinate ridondanti:

6 distanze Cr—C che indichiamo con x_i;

6 distanze C—N che indichiamo con y_i;

12 angoli C—Cr—C che indichiamo con α_{ij} (i, j sono i lati che delimitano l'angolo α);

12 angoli Cr—C—N che indichiamo con β_{ij} (ad esempio $\beta\, 4_5$ è l'angolo fra i legami $Cr—C_4$ e $C_4—N_4$ nel piano dei legami 4 e 5. L'angolo è rivolto verso il lato 5; notare che ad esempio $\beta\, 4_5 = -\beta\, 4_3$).

Le coordinate di simmetria tipiche, ove con i simboli $x_i, y_i, \alpha_{ij}, \beta_{ij}$ sono indicate direttamente le loro variazioni, sono:

$$A_{1g} \quad S_1^x = \sqrt{1/6}\,(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)$$

$$S_1^y = \sqrt{1/6}\,(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6)$$

$$E_g \quad S_1^x = 1/2\,(x_3 - x_4 + x_5 - x_6)$$

$$S_2^y = 1/2\,(y_3 - y_4 + y_5 - y_6)$$

$$T_{1g} \quad S_1^\beta = 1/2\,(\beta\, 4_5 + \beta\, 56 + \beta 6_3 + \beta\, 34)$$

$$T_{1u} \quad S_1^x = \sqrt{1/2}\,(x_1 - x_2)$$

$$S_1^y = \sqrt{1/2}\,(y_1 - y_2)$$

$$S_1^\alpha = \sqrt{1/8}\,(-\alpha_{13} - \alpha_{14} - \alpha_{15} - \alpha_{16} + \alpha_{23} + \alpha_{24} + \alpha_{25} + \alpha_{26})$$

$$S_2^\beta = 1/2\,(-\beta\, 4_2 + \beta\, 5_1 + \beta 6_1 - \beta\, 3_2)$$

$$T_{2g} \quad S_1^\alpha = 1/2\,(\alpha_{34} - \alpha_{36} - \alpha_{45} + \alpha_{56})$$

$$S_1^\beta = 1/2\,(\beta\, 4_5 - \beta\, 56 + \beta 6_3 - \beta\, 34)$$

$$T_{2u} \quad S_1^\alpha = \sqrt{1/8}\,(\alpha_{13} - \alpha_{14} + \alpha_{15} - \alpha_{16} - \alpha_{23} + \alpha_{24} - \alpha_{25} + \alpha_{26})$$

$$S_2^\beta = 1/2\,(-\beta\, 4_2 - \beta\, 5_1 + \beta 6_1 + \beta\, 3_2)$$

La funzione potenziale comprende 14 costanti, tra principali e miste:

$$2V = \sum_{1}^{6}{}_{x} f_x \Delta x_i^2 + \sum_{1}^{6}{}_{y} f_y \Delta y_i^2 + 2 \sum_{1}^{6}{}_{x_i \neq x_j} f_{xx} \Delta x_i \Delta x_j + 2 \sum_{1}^{6}{}_{y_i \neq y_j} f_{yy} \Delta y_i \Delta y_j +$$

$$+ 2 \sum_{1}^{6}{}_{y_i, iy_i} f_{iyy} \Delta y_i \Delta iy_i + 2 \sum_{1}^{6}{}_{x_i, y_i} f_{xy} \Delta x_i \Delta y_i + \sum_{1}^{12}{}_{\alpha} x^2 f_\alpha \Delta\alpha_i^2 + \sum_{1}^{12}{}_{\beta} xyf_\beta \Delta\beta_i^2 +$$

$$+ 2 \sum_{1}^{12}{}_{\alpha_i \neq \alpha_j} x^2 f_{\alpha\alpha} \Delta\alpha_i \Delta\alpha_j + 2 \sum_{1}^{12}{}_{\alpha_i \neq \alpha_j} x^2 f_{\varphi\alpha\alpha} \Delta\alpha_i \Delta\alpha_j + 2 \sum_{1}^{12}{}_{\beta_i \neq \beta_j} xyf_{\beta\beta} \Delta\beta_i \Delta\beta_j +$$

$$+ 2 \sum_{1}^{12,12}{}_{\alpha_i, \beta_j} x^{3/2} y^{1/2} f_{\alpha\beta} \Delta\alpha_i \Delta\beta_j + 2 \sum_{1}^{6,12}{}_{x_i, \alpha_j} x f_{x\alpha} \Delta x_i \Delta\alpha_j + 2 \sum_{1}^{6,12}{}_{x_i, \beta_j} \sqrt{xy}\, f_{x\beta} \Delta x_i \Delta\beta_j$$

dove:

f_x è lo stretching principale Cr—C;

f_y è lo stretching principale C—N;

f_{xx} è l'interazione tra due stretching Cr—C adiacenti;

f_{yy} è l'interazione tra due stretching C—N adiacenti;

f_{iyy} è l'interazione tra due stretching C—N opposti;

f_{xy} è l'interazione tra uno stretching C—N e lo stretching Cr—C situato sullo stesso lato;

f_α è la costante principale di bending α (C—Cr—C);

f_β è la costante principale di bending β (Cr—C—N);

$f_{\alpha\alpha}$ è l'interazione tra due bending C—Cr—C (α) con un lato in comune (adiacenti) situati nello stesso piano (esempio α_{34} con α_{35});

$f_{\varphi\alpha\alpha}$ è l'interazione tra due bending α (C—Cr—C) con un lato in comune (adiacenti) e situati su piani perpendicolari (esempi: α_{34} con α_{31});

$f_{\alpha\beta}$ è l'interazione tra un bending α (C—Cr—C) e un bending β (Cr—C—N) situato su uno dei due lati di α e diretto nel piano di α; positiva se β è diretto verso l'interno di α, negativa se diretto fuori di α; (esempio: α_{34} con $\beta 34_1^!$, interazione positiva; α_{34} con $\beta 36$, interazione negativa; α_{34} con $\beta 3_1$, interazione nulla);

$f_{\beta\beta}$ è l'interazione tra due bending β (Cr—C—N) situati su legami adiacenti, indifferentemente se i due β sono diretti su uno stesso piano o su piani paralleli (ma non su piani perpendicolari); l'interazione è positiva se i due β giacciono nello stesso piano e sono diretti in senso concorde (orario o antiorario per ambedue), oppure se giacciono in piani paralleli e sono diretti ambedue verso lo stesso lato; (esempio: $\beta 4_5$ con $\beta 56$, oppure $\beta 4_1$ con $\beta 5_1$, interazione positiva; $\beta 4_5$ con $\beta 5_4$ o $\beta 4_1$ con $\beta 5_2$, interazione negativa; $\beta 4_5$ con $\beta 5_1$ o con $\beta 6_3$, interazione nulla;

$f_{x\alpha}$ è l'interazione tra uno stretching x (Cr—C) e uno dei 4 bending α (C—Cr—C) adiacenti;

$f_{x\beta}$ è l'interazione tra uno stretching x (Cr—C) e uno dei 4 bending β (Cr—C—N) che partono dal piano perpendicolare ad x; interazione positiva se β è rivolto verso x, negativa in caso contrario (esempio: x_1 con $\beta 4_1$, interazione positiva).

Gli elementi di matrice G così calcolati sono quindi:

A_{1g} : $G_{xx} = \mu_C$ $G_{yy} = \mu_C + \mu_N$ $G_{xy} = -\mu_C$

E_g : $G_{xx} = \mu_C$ $G_{yy} = \mu_C + \mu_N$ $G_{xy} = -\mu_C$

T_{1g} : $G_{\beta\beta} = \dfrac{\mu_N}{y^2} + \mu_C \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)^2$

T_{1u}: $G_{xx} = 2\mu_{Cr} + \mu_C$ $\quad G_{yy} = \mu_C + \mu_N$ $\quad G_{xy} = -\mu_C$

$$G_{\alpha\alpha} = \frac{2\mu_C}{x^2} + \frac{8\mu_{Cr}}{x^2} \qquad G_{\beta\beta} = \frac{\mu_N}{y^2} + \mu_C\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 + \frac{4\mu_{Cr}}{x^2}$$

$$G_{\alpha\beta} = \sqrt{2}\left[\mu_C\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy}\right) + 4\frac{\mu_{Cr}}{x^2}\right]$$

$$G_{x\alpha} = \frac{4\mu_{Cr}}{x} \qquad G_{x\beta} = \frac{2\sqrt{2}\,\mu_{Cr}}{x}$$

$$G_{y\alpha} = G_{y\beta} = 0$$

T_{2g}: $G_{\alpha\alpha} = \dfrac{4\mu_C}{x^2}$ $\quad G_{\beta\beta} = \dfrac{\mu_N}{y^2} + \mu_C\left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x}\right)^2$

$$G_{\alpha\beta} = 2\mu_C\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy}\right)$$

T_{2u}: $G_{\alpha\alpha} = 2\dfrac{\mu_C}{x^2}$ $\quad G_{\beta\beta} = \dfrac{\mu_N}{y^2} + \mu_C\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)^2$

$$G_{\alpha\beta} = \sqrt{2}\,\mu_C\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy}\right).$$

Gli elementi di matrice F sono:

A_{1g}: $F_{xx} = f_x + 4f_{xx}$ $\quad F_{yy} = f_y + f_{iyy} + 4f_{yy}$ $\quad F_{xy} = f_{xy}$

E_g: $F_{xx} = f_x - 2f_{xx}$ $\quad F_{yy} = f_y + f_{iyy} - 2f_{yy}$ $\quad F_{xy} = f_{xy}$

T_{1g}: $F_{\beta\beta} = (f_\beta + 2f_{\beta\beta})\,xy$

T_{1u}: $F_{xx} = f_{xx}$ $\quad F_{yy} = f_y - f_{iyy}$ $\quad F_{xy} = f_{xy}$

$F_{\alpha\alpha} = (f_\alpha + 2f_{\varphi\alpha\alpha})\,x^2$ $\quad F_{\beta\beta} = (f_\beta + 2f_{\beta\beta})\,xy$ $\quad F_{\alpha\beta} = -x^{3/2}\,y^{1/2}\,2f_{\alpha\beta}$

$F_{x\alpha} = -x \cdot 2f_{x\alpha}$ $\quad F_{x\beta} = +\sqrt{xy} \cdot 2\sqrt{2}\,f_{x\beta}$ $\quad F_{y\alpha} = F_{y\beta} = 0$

T_{2g}: $F_{\alpha\alpha} = (f_\alpha - 2f_{\alpha\alpha})\,x^2$ $\quad F_{\beta\beta} = xy\,(f_\beta - 2f_{\beta\beta})$ $\quad F_{\alpha\beta} = -x^{3/2}\,y^{1/2}\,2f_{\alpha\beta}$

T_{2u}: $F_{\alpha\alpha} = x^2\,(f_\alpha - 2f_{\varphi\alpha\alpha})$ $\quad F_{\beta\beta} = xy\,(f_\beta - 2f_{\beta\beta})$ $\quad F_{\alpha\beta} = -x^{2/3}\,y^{1/2}\sqrt{2}\,f_{\alpha\beta}$

Nota 1: H. Murata e K. Kawai (loc. cit.) dànno un unico elemento G differente, e precisamente il $G_{\alpha\beta}$ in T_{1u}, che secondo loro sarebbe $-\sqrt{2}\left(\mu_C\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 + 4\frac{\mu_{Cr}}{x^2}\right)$; altri elementi di matrice G d'interazione differiscono solo per il segno, ma ciò non ha importanza in quanto, il segno dipende dalla scelta (arbitraria) della fase delle coordinate di simmetria.

Nota 2: Nelle equazioni secolari le distanze x e y che compaiono negli elementi F e G si elidono dimensionalmente, ma restano dei rapporti tipo x/y o y/x; perciò si è posto:

per $Cr(CN)_6^{3-}$:	per $Cr(CO)_6$ [7]:
$x = 1{,}95$ Å	$x = 1{,}92$ Å
$y = 1{,}15$ Å	$y = 1{,}16$ Å

ELENCO DELLE FREQUENZE $\bar{\nu}$ (cm^{-1}).

Tipo	Rappres.	Num.	$Cr(CN)_6^{3-}$	$Cr(CO)_6$
Stretching Cr—C	A_{1g}	ν_2	374	393
» C—N	A_{1g}	ν_1	2137	2108
» Cr—C	E_g	ν_4	336	373
» C—N	E_g	ν_3	2063	2019
» Cr—C	T_{1u}	ν_8	457	436
» C—N	T_{1u}	ν_6	2127	2000
Bending α	T_{1u}	ν_9	124	102
» β	T_{1u}	ν_7	694	661
» α	T_{2g}	ν_{11}	106	90
» β	T_{2g}	ν_{10}	536(*)	535(*)
» α	T_{2u}	ν_{13}	95(*)	80
» β	T_{2u}	ν_{12}	496(*)	506(*)
Pseudorotazione β	T_{1g}	ν_5	536	539

Le frequenze segnate con (*) risultano diverse rispetto al lavoro precedente: infatti, la bending ν_{13}, per cui manca evidenza sperimentale, è stata portata da 110 a 95 per far sì che le due bending α (T_{2g} e T_{2u}) stessero nello stesso rapporto di frequenza in cui stanno nel carbonile (dove sono 90 e 80 rispettivamente).

Inoltre le bending β ν_{10} e ν_{12} sono vicine ai valori dati da Murata e Kawai, per quanto non proprio eguali; i valori dati da Hawkins e coll. sono palesemente troppi bassi per poter essere spiegati con una funzione potenziale semplice: basti pensare che ν_7, ν_5, ν_{10} e ν_{12} hanno quasi gli stessi elementi di matrice G e F, e devono quindi corrispondere a frequenze molto vicine (la ν_7 è un po' più alta perché ha un G più grande). Le nuove ν_{10} e ν_{12} sono state dedotte per il carbonile dalle frequenze di tutte le combinazioni permesse e trovate effettivamente nello spettro; così si ha:

	Combinazione	teorico	trovato [2]		Combinazione	teorico	trovato [2]
con $\nu_{10} = 535$	$\nu_{10} + \nu_6$	2535	2544 *w*	con $\nu_{12} = 506$	$\nu_{12} + \nu_3$	2525	2544 *w*
	$\nu_{10} + \nu_7$	1196	1196 *s*		$\nu_{12} + \nu_4$	879	875 *s*
	$\nu_{10} + \nu_8$	971	963 *m*		$\nu_{12} + \nu_5$	1045	1055 *w*, 1932 *s*
	$\nu_{10} + \nu_9$	637	635 *s*				
	$\nu_{10} + \nu_{12}$	1041	1032 *s*		$\nu_{12} + \nu_{10}$	1041	1032 *s*
	$\nu_{10} + \nu_{13}$	625	635 *s*		$\nu_{12} + \nu_{11}$	586	595 *w*

Per il cromicianuro mancano dati sperimentali egualmente abbondanti; comunque si trova:

$\nu_{10} + \nu_8$: teorico 992, trovato 993		$\nu_{10} = 536$
$\nu_{10} + \nu_{12}$: teorico 1030, trovato 1030		$\nu_{10} = 536$
	media :	$\nu_{10} = 536$
$\nu_{12} + \nu_4$: teorico 832, trovato 833		$\nu_{12} = 497$
$\nu_{12} + \nu_{10}$: teorico 1030, trovato 1030		$\nu_{12} = 494$
	media :	$\nu_{12} = 496$

Considerazioni sul procedimento per il calcolo delle costanti di forza:

Da notare anzitutto che abbiamo 13 frequenze da cui si vogliono ricavare 14 costanti; poiché con 13 equazioni non si possono calcolare più di 13 incognite, per ricavare la quattordicesima costante si formula il seguente ragionamento: la separazione tra ν_1 e ν_3 (stretching C—N) è determinata esclusivamente dalla costante f_{yy}, il cui valore è relativamente indipendente dal metodo di calcolo seguito e dalle altre approssimazioni introdotte; perciò si è calcolata tale f_{yy} separando le frequenze ν_1 e ν_3 col metodo della separazione delle alte frequenze, e questo valore è stato poi inserito arbitrariamente nella funzione potenziale, che è risultata contenere quindi solo 13 costanti incognite.

Vogliamo ancora osservare che probabilmente le costanti di interazione f_{yy} e f_{iyy} non hanno un preciso significato fisico nello schema delle forze di valenza; esse possono render conto di effetti dovuti ad anarmonicità di vibrazione o al campo cristallino attorno al complesso $Cr(CN)_6^{3-}$ e possono essere utilizzate per poter ricalcolare le frequenze sperimentali. Effettivamente c'è da attendersi che le frequenze stretching C—N siano le più perturbate (in quanto esterne) del campo cristallino, ovvero che l'approssimazione delle forze di valenza non sia applicabile con esattezza estrema allo studio di tali frequenze perturbate.

Costanti di forza:

	$Cr(CN)_6^{3-}$	$Cr(CO)_6$	Tipo
f_x	+ 1,9279·10⁵ dine/cm	+ 2,5071·10⁵	Stretching Cr—C
f_y	+16,4223·10⁵	+15,6496·10⁵	» C—N o C—O
f_α	+ 0,16547·10⁵	+ 0,1467·10⁵	Bending C—Cr—C
f_β	+ 0,2925·10⁵	+ 0,3227·10⁵	» Cr—C—N o Cr—C—O
f_{xx}	+ 0,0731·10⁵	+ 0,0448·10⁵	Interazione
f_{yy}	+ 0,1750·10⁵	+ 0,2322·10⁵	»
f_{iyy}	— 0,3208·10⁵	+ 0,4667·10⁵	»
f_{xy}	+ 0,0620·10⁵	— 0,0046·10⁵	»

Segue: *Costanti di forza:*

	$Cr(CN)_6^{3-}$	$Cr(CO)_6$	Tipo
$f_{\alpha\alpha}$	$+ 0{,}0199 \cdot 10^5$	$+ 0{,}0290 \cdot 10^5$	Interazione
$f_{\varphi\alpha\alpha}$	$- 0{,}00173 \cdot 10^5$	$+ 0{,}0119 \cdot 10^5$	»
$f_{\beta\beta}$	$+ 0{,}0309 \cdot 10^5$	$+ 0{,}0255 \cdot 10^5$	»
$f_{\alpha\beta}$	$- 0{,}0173 \cdot 10^5$	$- 0{,}0141 \cdot 10^5$	»
$f_{x\alpha}$	$- 0{,}0552 \cdot 10^5$	$- 0{,}0053 \cdot 10^5$	»
$f_{x\beta}$	$- 0.00366 \cdot 10^5$	$- 0{,}2458 \cdot 10^5$	»

Per verificare l'attendibilità della funzione potenziale proposta abbiamo provato a ricalcolare le frequenze di $Cr(CN)_6^{3-}$ con una funzione potenziale semplificata, ottenuta da quella completa mantenendo le *quattro* costanti di forza principali col loro valore, e ponendo invece eguali a zero *tutte* le costanti di interazione. Le frequenze così ricalcolate cadono effettivamente abbastanza vicine ai valori sperimentali; ciò dimostra che lo schema della funzione potenziale proposta è corretto, e che le costanti di interazione hanno solo funzione di affinamento.

Frequenza	Rappresentazione	Tipo	Valore sper. ovvero calcolato con la funzione potenziale completa	Valore ricalcolato ponendo tutte le costanti di interazione eguali a zero
ν_2	A_{1g}	Stretching Cr—C	374 cm^{-1}	348 cm^{-1}
ν_1	A_{1g}	Stretching C—N	2137	2111
ν_4	E_g	Stretching Cr—C	336	348
ν_3	E_g	Stretching C—N	2063	2111
ν_5	T_{1g}	Pseudorotazione	536	487
ν_8	T_{1u}	Stretching Cr—C	457	448
ν_6	T_{1u}	Stretching C—N	2127	2161
ν_9	T_{1u}	Bending $\overline{C\widehat{Cr}C}$	124	134
ν_7	T_{1u}	Bending $\overline{Cr\widehat{C}N}$	694	609
ν_{10}	T_{2g}	Bending $\overline{Cr\widehat{C}N}$	536	558
ν_{11}	T_{2g}	Bending $\overline{C\widehat{Cr}C}$	106	134
ν_{12}	T_{2u}	Bending $\overline{Cr\widehat{C}N}$	496	522
ν_{13}	T_{2u}	Bending $\overline{C\widehat{Cr}C}$	95	101

Conclusioni.

Il metodo di calcolo completo, adottato nel presente lavoro, ha permesso di affinare ulteriormente il valore delle costanti di forza dei complessi $Cr(CN)_6^{3-}$ e $Cr(CO)_6$.

I valori numerici naturalmente variano essenzialmente con il significato fisico che le costanti assumono nei diversi metodi e con le approssimazioni del calcolo. Comunque, dai calcoli nostri precedenti e di questa Nota, rimane fisso che la costante stretching del legame Cr—C è nel cianuro circa del 22% inferiore a quella dello stesso legame nel carbonile.

Bibliografia.

[1] « Rendiconti Acc. Naz. Lincei », VII, vol. XXIII, 355 (1957).
[2] « J. Chem. Phys. », *23*, 2422 (1955).
[3] « J. Chem. Phys. », *27*, 605 (1957).
[4] « Phys. Rev. », *38*, 1969 (1931).
[5] « Z. Phys. Chem. », *9*, 174 (1956).
[6] Comunicazione personale di C. W. F. T. Pistorius.
[7] L. O. Brockway, R. V. G. Ewens e M. W. Lister, « Trans. Farad. Soc. », *34*, 1350 (1937).

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla determinazione di un sistema completo di vettori* (*). Nota (**) di MARIA PIA COLAUTTI, presentata dal Socio M. PICONE.

Sia A un campo (insieme aperto e connesso) limitato dello spazio euclideo S_n e Σ la sua frontiera, che supponiamo composta da porzioni di ipersuperficie regolari.

Considereremo il seguente problema (1):

Dato un sistema $\{w_m\}$ *di funzioni di classe due in un campo contenente* $A+\Sigma$, *determinare sotto quali condizioni il sistema di vettori* $\{\Phi_m\} \equiv \{[\Delta_2 w_m , w_m]\}$ *è completo nello spazio hilbertiano* $\mathfrak{H}$, *costituito dai vettori* $\Psi \equiv [\psi_1 , \psi_2]$ *a due componenti, la prima hilbertiana in* A, *la seconda hilbertiana su* Σ, *ed in cui la norma è data da:*

$$\| \Psi \| = \left(\int_A \psi_1^2 \, dx + \int_\Sigma \psi_2^2 \, d\sigma \right)^{1/2} .$$

È intanto evidente che la sola completezza hilbertiana di $\{w_m\}$ in A, non basta ad assicurare quella del sistema trasformato $\{\Phi^m\}$. Si consideri, infatti, il sistema completo $\{w_m\}$ costituito dalle autosoluzioni del problema:

$$\Delta_2 w_m + \lambda_m w_m = 0 \quad \text{in A} \quad , \quad w_m = 0 \quad \text{su } \Sigma .$$

La considerazione di esso prova quanto asserito.

Daremo, per $\{w_m\}$, una condizione, assai generale, verificata da tutti i sistemi che d'ordinario si impiegano nelle applicazioni, atta ad assicurare la richiesta completezza di $\{\Phi^m\}$ in $\mathfrak{H}$.

Ciò sarà fatto concedendo alla frontiera Σ del campo A sufficiente generalità (presenza di punti angolosi, spigoli, ecc.) ai fini delle applicazioni. Precisamente, supporremo che A sia un campo *propriamente regolare di classe* $C_H^{(1)}$, secondo la definizione data da G. Fichera (2).

Sia R un dominio rettangolare e le funzioni di $\{w_m\}$ siano di classe due in R. Diremo che $\{w_m\}$ *verifica l'ipotesi* α) *in* R, se ogni funzione di classe due

(*) Lavoro eseguito per l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Pervenuta all'Accademia l'11 settembre 1958.

(1) Proposto all'I.N.A.C. dal prof. A. N. LOWAN (Radiation Laboratory – Livermore, Calif. U.S.A.).

(2) G. FICHERA, *Alcuni recenti sviluppi della teoria dei problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali lineari*, «Atti del Convegno Internazionale sulle equazioni alle derivate parziali», Trieste, agosto 1954, p. 207 – Ediz. Cremonese (Roma).

in R è il limite di una successione di combinazioni lineari di funzioni di $\{w_m\}$, convergente uniformemente in R assieme a tutte le successioni derivate parziali prime e seconde.

Il sistema costituito da tutti i monomi $x_1^{h_1} x_2^{h_2} \cdots x_n^{h_n}$ $(h_1, h_2, \cdots, h_n = 0, 1, 2, \cdots)$ verifica, come è noto, l'ipotesi α).

Altri esempi di sistemi verificanti l'ipotesi α) possono trovarsi in: M. Picone, *Appunti di Analisi Superiore*, Rondinella, Napoli 1940, pp. 516 e sgg.

Sussiste il seguente teorema:

Sia $A + \Sigma \subset R - \mathfrak{F}R$. *Se* $\{w_m\}$ *verifica l'ipotesi* α) *in* R, *il sistema* $\{\Phi^m\}$ *è completo in* $\mathfrak{S}$.

Sia $\Psi \in \mathfrak{S}$ tale che:

$$(1) \qquad \int_A \psi_1 \Delta_2 w_m \, dx + \int_\Sigma \psi_2 w_m \, d\sigma = 0$$

per ogni Φ^m di $\{\Phi^m\}$; occorre provare che $\psi_1 = 0$ quasi ovunque in A e $\psi_2 = 0$ quasi ovunque su Σ.

Indicato con x il punto di coordinate $x_1, x_2, \cdots, x_n$, si ponga:

$$s(x, y) \begin{cases} = \dfrac{1}{(n-2)\,\omega_n} \dfrac{1}{\overline{xy}^{n-2}} & \text{per } n > 2 \\ = \dfrac{1}{2\pi} \log \dfrac{1}{\overline{xy}} & \text{per } n = 2, \end{cases}$$

avendo indicato con ω_n la misura ipersuperficiale della ipersfera unitaria di S_n.

Sia y un punto fissato nel complementare di $A + \Sigma$, avente da Σ distanza positiva 2δ. Indichiamo con $I_\delta(y)$ il dominio ipersferico di centro y e raggio δ. La funzione di x così definita:

$$s_\delta^*(x, y) \begin{cases} = \begin{cases} s(x, y) & x \text{ esterno a } I_\delta(y) \\ & \text{per } n > 2 \\ a\,\overline{xy}^4 + b\,\overline{xy}^2 + c & x \in I_\delta(y) \end{cases} \\ = \begin{cases} s(x, y) & x \text{ esterno a } I_\delta(y) \\ & \text{per } n = 2 \\ \dfrac{\overline{xy}^4}{8\pi\delta^4} - \dfrac{\overline{xy}^2}{2\pi\delta^2} + \dfrac{1}{2\pi} \log \dfrac{1}{\delta} \dfrac{3}{8\pi} & x \in I_\delta(y) \end{cases} \end{cases}$$

con:

$$a = \frac{n}{8\,\omega_n} \frac{1}{\delta^{n+2}}, \quad b = -\frac{(n+2)}{4\,\omega_n} \frac{1}{\delta^n}, \quad c = \frac{1}{(n-2)\,\omega_n} \left[1 + \frac{(n-2)(n+4)}{8}\right] \frac{1}{\delta^{n-2}},$$

è, come facilmente si verifica, di classe due in S_n.

Per l'ipotesi α), esiste pertanto una successione di funzioni $\{w_r^*(x)\}$, con $w_r^*(x)$ combinazione lineare di funzioni di $\{w_m\}$, tale che, uniformemente in R:

$$\lim_{r \to \infty} w_r^*(x) = s_\delta^*(x, y) \quad , \quad \lim_{r \to \infty} \Delta_2 w_r^*(x) = \Delta_2 s_\delta^*(x, y).$$

Per le (1) e dato che è in $A : \Delta_2 s_\delta^* (x, y) = 0$, si ha:

$$0 = \lim_{r \to \infty} \left[\int_A \psi_1 \Delta_2 w_r^* \, dx + \int_\Sigma \psi_2 \, w_r^* \, d\sigma \right] = \int_\Sigma \psi_2 (t) \, s (t, y) \, d\sigma_t .$$

Consideriamo per ogni $y \in S_n - \Sigma$ la funzione:

$$v (y) = \int_\Sigma \psi_2 (t) \, s (t, y) \, d\sigma_t .$$

Per quanto ora dimostrato, essa si annulla nel complementare di $A + \Sigma$.

Supponiamo ora $y \in A$ e proviamo che la $v (y)$ è dotata di derivate parziali prime hilbertiane in A. Riesce, per $i = 1, 2, \cdots, n$:

$$\left| \frac{\partial v}{\partial y_i} \right| \leq K \int_\Sigma | \psi_2 (t) | \frac{1}{\overline{ty}^{n-1}} \, d\sigma_t$$

con K costante positiva.

Consideriamo la funzione:

$$f (x, t, y) = | \psi_2 (t) | | \psi_2 (x) | \frac{1}{\overline{ty}^{n-1}} \frac{1}{\overline{xy}^{n-1}}$$

definita nel prodotto topologico $\Sigma \times \Sigma \times A \; [x \in \Sigma, t \in \Sigma, y \in A]$; proviamo che essa è ivi sommabile.

Fissati t e x quasi ovunque su Σ, la funzione $\frac{1}{\overline{ty}^{n-1}} \frac{1}{\overline{xy}^{n-1}}$ è sommabile in A. Si ha:

$$\int_A \frac{1}{\overline{ty}^{n-1}} \frac{1}{\overline{xy}^{n-1}} \, dy \leq (n-2) M \frac{1}{\overline{tx}^{n-2}} + N \log \frac{N}{\overline{tx}} - H (t, x) ,$$

con M ed N costanti non negative [3].

Fissato quasi ovunque x su Σ, la funzione di t: $| \psi_2 (t) | H (t, x)$ è sommabile su Σ e poiché ψ_2 è hilbertiana, è anche hilbertiana su Σ la funzione: $\int_\Sigma | \psi_2 (t) | H (t, x) \, d\sigma_t$ [4].

Ne viene la sommabilità su Σ di $| \psi_2 (x) | \int_\Sigma | \psi_2 (t) | H (t, x) \, d\sigma_t$ e, per un teorema di Tonelli, la sommabilità in $\Sigma \times \Sigma \times A$ di $(f (x, t, y)$. Ciò implica, per il teorema di Fubini sull'invertibilità delle integrazioni, che $\partial v / \partial y_i$ è hilbertiana in A.

(3) Cfr. M. Picone, *Appunti di Analisi Superiore*, Rondinella, Napoli 1940, p. 806.

(4) Cfr. G. Fichera, *Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni*, «Annali di Mat. pura ed appl.», serie IV, tomo XXVII, fasc. 1, e 2, (1948), p. 21, teor. XIV.

Detta ν_x^+ (ν_x^-) la normale interna (esterna) nel punto regolare x di Σ, si ha per quasi tutti i punti x di Σ:

$$(2) \qquad \lim_{y \to x \left(\text{su } \nu_x^+\right)} v(y) = \lim_{y \to x \left(\text{su } \nu_x^-\right)} v(y) \ ^{(5)}$$

e quindi, per l'annullarsi di $v(y)$ all'esterno di A:

$$\lim_{y \to x \left(\text{su } \nu_x^+\right)} v(y) = 0 .$$

La funzione $v(y)$, essendo armonica in A, nulla (in senso generalizzato) su Σ e dotata di derivate prime hilbertiane in A, risulta, per un teorema di G. Fichera [6], identicamente nulla in A.

Si ha, per x quasi ovunque su Σ [7]:

$$(3) \qquad \lim_{y \to x \left(\text{su } \nu_x^+\right)} \frac{\partial}{\partial \nu_x} v(y) - \lim_{y \to x \left(\text{su } \nu_x^-\right)} \frac{\partial}{\partial \nu_x} v(y') = \begin{cases} -(n-2)\,\omega_n\,\psi_2(x) \\ \qquad \text{per} \quad n > 2 \\ -2\pi\,\psi_2(x) \\ \qquad \text{per} \quad n = 2 . \end{cases}$$

Poiché abbiamo dimostrato che $v(y)$ è nulla sia in A che nel complementare di $A + \Sigma$, dalla (3) si deduce che $\psi_2(x)$ è quasi ovunque nulla su Σ.

Le (1) si riducono ora alle seguenti:

$$(1') \qquad \int_A \psi_1(x)\,\Delta_2 w_m(x)\,dx = 0$$

per ogni w_m di $\{w_m\}$.

Sia $p_k(x)$ un arbitrario polinomio reale nelle variabili reali $x_1, x_2, \cdots, x_n$; la funzione:

$$g(x) = -\int_R p_k(y)\,s(x,y)\,dy$$

è di classe due in R e riesce: $\Delta_2 g = p_k$ in $R - \mathfrak{F}R$.

Per l'ipotesi α), esiste allora una successione di funzioni $\{g_r(x)\}$, con $g_r(x)$ combinazione lineare di funzioni del sistema $\{w_m\}$, tale che, uniformemente in R, $\lim_{r \to \infty} \Delta_2 g_r = \Delta_2 g$ e quindi, per le (1'):

$$\lim_{r \to \infty} \int_A \psi_1(x)\,\Delta_2 g_r(x)\,dx = \int_A \psi_1(x)\,p_k(x)\,dx = 0 .$$

Data l'arbitrarietà del polinomio $p_k(x)$, si deduce che ψ_1 è quasi ovunque nulla in A. Da ciò la tesi del teorema.

Il teorema di completezza in § del sistema $\{\Phi^m\} \equiv \{[\Delta_2 w_m, w_m]\}$, ora dimostrato, può venir generalizzato, sostituendo all'operatore Δ_2 di Laplace

(5) Cfr. loc. cit. nota [3], § 1, teor. I.
(6) Cfr. loc. cit. nota [2] p. 218, teor. XII.
(7) Cfr. loc. cit. nota [4], § 1, teor. VI.

un operatore del secondo ordine di tipo ellittico, e, precisamente, considerando in $\mathfrak{S}$ il sistema di vettori: $\{W^m\} \equiv \{[\mathfrak{E}(w_m), w_m]\}$, avendo posto:

$$\mathfrak{E}(u) \equiv \sum_{h,k}^{1,n} \frac{\partial}{\partial x_h}\left(a_{hk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \sum_{h=1}^{n} b_h \frac{\partial u}{\partial x_h} + cu.$$

Le a_{hk}, b_h e c sono funzioni del punto $x \equiv (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, definite in un campo $B \supset R$, sulle quali faremo le seguenti ipotesi:

1° Le a_{hk} e le b_h sono funzioni di classe uno in B, dotate di derivate parziali prime hölderiane in B [8]; c è una funzione continua in B ed ivi hölderiana, mai positiva in B.

2° La forma quadratica: $\sum_{h,k}^{1,n} a_{hk}(x)\lambda_h\lambda_k$ è definita positiva per ogni x di B.

Sotto le ipotesi sopra considerate [9], esiste una funzione $s(x, y)$, definita per ogni coppia di punti x e y $(x \neq y)$ di un campo B′ contenente R e contenuto, assieme alla sua frontiera, in B, la quale, come funzione di x, *è soluzione fondamentale* dell'equazione $\mathfrak{E}(u) = 0$ e, come funzione di y, soluzione fondamentale dell'equazione:

$$\mathfrak{E}^*(u) \equiv \sum_{h,k}^{1,n} \frac{\partial}{\partial x_h}\left(a_{hk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) - \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial (b_h u)}{\partial x_h} + cu = 0.$$

Possiamo enunciare il seguente teorema:

Sia $A + \Sigma \subset R - \mathfrak{F}R$. *Se esiste una funzione* w *di classe due in* $A + \Sigma$, *sempre positiva, tale che in* A:

$$\mathfrak{E}(w) + \left[c - \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_h} b_h\right] w \leq 0,$$

e se $\{w_m\}$ *verifica l'ipotesi* α) *in* R, *il sistema* $\{W^m\}$ *è completo in* $\mathfrak{S}$.

La dimostrazione di questo teorema procede in modo perfettamente analogo a quella del teorema precedente. L'ipotesi dell'esistenza della funzione w, verificante le ipotesi dell'enunciato, assicura, in questo caso, che ogni soluzione dell'equazione $\mathfrak{E}^*(u) = 0$ in A, di classe due in A, nulla (in senso generalizzato) su Σ, dotata di derivate parziali prime hilbertiane in A, è ivi identicamente nulla [10].

Facciamo notare che, nel caso generale, ν_x è da intendersi come la conormale (relativa all'operatore $\mathfrak{E}$) a Σ in x.

(8) Diremo che una funzione $u(x)$ è (uniformemente) hölderiana in un campo B se esistono una costante positiva L ed una costante β, con $0 < \beta \leq 1$, tali che, per ogni coppia di punti x ed x' di B, risulti verificata la seguente condizione (di Hölder):

$$|u(x) - u(x')| \leq L\,|x - x'|^{\beta}.$$

(9) Cfr. C. Miranda, *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*, Springer Verlag, 1955, pp. 49–59 e Bibliografia ivi citata.

(10) Cfr. M. L. Princivalli, *Sul sistema di equazioni lineari alle derivate parziali, relativo all'equilibrio delle volte cilindriche*, « Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa », Scienze Fis. e Mat., serie III, vol. VIII, fasc. III–IV (1954), p. 193.

Analisi matematica. — *Propriétés spectrales de l'opérateur* $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z} + d$ *à coefficients complexes.* Nota di Fernando Roldao Dias Agudo (*) et František Wolf, presentata (**) dal Socio M. Picone.

1. Soit Δ le Laplacien $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ et Ω tout l'espace. Δ est formellement autoadjoint et l'opérateur minimum correspondant, A_{min}, est la fermeture de Δ sur l'ensemble de fonctions infiniment différentiable à support compact.

Au moyen de la transformée de Fourier, il est aisé de montrer que, si $(\Delta - i)\, u = 0$ et $u \in L^2(\Omega)$, alors $u = 0$. Nous concluons, que les numéros de défaut de A_{min} sont nuls et par conséquent $A_{min} = A_{max} = A^*_{min}$. Désignons cet opérateur autoadjoint par A. Nous démontrerons le théorème suivant.

Théorème. – *La perturbation*

$$B = a(x, y, z)\frac{\partial}{\partial x} + b(x, y, z)\frac{\partial}{\partial y} + c(x, y, z)\frac{\partial}{\partial z} + d(x, y, z)$$

avec a, b, c, d *bornés, à valeurs complexes et de carré sommables en tout l'espace, est* A*–compact* (1).

Ainsi tout l'axe réel positif constitue le spectre continu de $A + B$. *Dans le reste du plan le spectre de* $A+B$ *est discret et consiste de numéros caractéristiques à multiplicités finies.*

2. Nous avons besoin de quelque lemmes.

Lemme 1 (Holmgren (2)). – Si $K(s, t)$ est mesurable et

$$\int_\Omega |K(s, t)|\, dt \leq k \quad , \quad \int_\Omega |K(s, t)|\, ds \leq k$$

pour quelque k, l'opérateur intégral **K** engendré par le noyau K est borné et $\| \mathbf{K} \| \leq k$.

(*) Boursiers de Fundação Calouste Gulbenkian et Instituto de Alta Cultura, Portugal.

La recherche a été subventionné partiellement par la National Science Foundation of the United States.

(**) Nella seduta dell'8 novembre 1958.

(1) Voir la définition et les propriétés des opérateurs A–compacts en Gokhberg et Krein, Uspekhi 12 (1957) 47–117 (en russe) ou dans un article en anglais par F. Wolf à paraître prochainement dans les Communications on Pure and Applied Mathematics. Voir aussi un article récent présenté à la même Académie par les mêmes auteurs.

(2) Voir un chapître dans *Theory of linear operators in Hilbert space* based on lectures by K. O. Friedrichs, New York Univ., 1951.

Démonstration. – Soit $u \in \mathfrak{L}^2$ à support compact, et écrivons

$$(\mathbf{K}u)(s) = \int_\Omega K(s,t)\,u(t)\,dt .$$

Nous avons

$$\int_\Omega |\mathbf{K}u(s)|^2\,ds = \int_\Omega \left| \int_\Omega K(s,t)\,u(t)\,dt \right|^2 ds \leq$$

$$\leq \int_\Omega \left[\int_\Omega |K(s,t)|\,dt \cdot \int_\Omega |K(s,t)| \cdot |u(t)|^2\,dt \right] ds \leq k \int_\Omega \int_\Omega |K(s,t)| \cdot |u(t)|^2\,dt\,ds =$$

$$= k \int_\Omega |u(t)|^2\,dt \int_\Omega |K(s,t)|\,ds \leq k^2 \|u\|^2,$$

ou $\|\mathbf{K}\| \leq k$.

Lemme 2. – B est A–compact si, et seulement si le domaine de B contient le domain de A et B $(u\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1} = \mathrm{B}\,\mathrm{R}_\lambda$ est compact pour quelque λ dans l'esemble résolvent de A [1].

3. Pour démontrer notre théorème prenons $\lambda = i$ et montrons que BR_i peut être approché en norme par des opérateurs compacts et, ainsi, est lui-même compact.

La fonction de Green $G(s,t)$, le noyau de l'opérateur $(\mathrm{A} - i)^{-1}$, est la solution de l'équation différentielle

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dG}{dr}\right) - ir^2 G = 0 , \quad r = |s - t| ,$$

avec

$$\lim_{r \to \infty} G(s,t) = 0 \quad , \quad \lim_{r \to \infty} r^2 G(s,t) = 0 \quad , \quad \lim_{r \to 0}\left(r^2 \frac{dG}{dr}\right) = -\frac{1}{4\pi}\Big)^{(3)}.$$

Ainsi nous obtenons $G(s,t) = \dfrac{e^{kr}}{4\pi r}$, où $k = -\sqrt{2}\,(1+i)/2$.

De

$$\mathrm{R}_i f(s) = \frac{1}{4\pi} \int_\Omega \frac{e^{kr}}{r} f(t_1, t_2, t_3)\,dt , \qquad r = |s - t|$$

on déduit que $4\pi\,\mathrm{BR}_i$ est un opérateur au noyau

$$K(s,t) = \{[a(s)(s_1 - t_1) + b(s)(s_2 - t_2) + c(s)(s_3 - t_3)](kr - 1) + r^2 d(s)\}\, e^{kr}/r^3 .$$

Mettons

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1(\delta) + \mathbf{K}_2(\delta)$$

(3) Voir B. Friedman, *Principles and Techniques of Applied Mathematics*, Wiley & Sons, New York, 1956, p. 258.

University of California, Berkeley, Calif.

avec

$$\mathbf{K}_i(\delta) = \int_\Omega \chi_i(s,t)\,\mathrm{K}(s,t) f(t)\,dt \quad , \quad \chi_1(s,t) \equiv 1 - \chi_2(s,t) = 1$$

pour $|s-t| \leq \delta$, autrement $= 0$. Nous montrerons que $\mathbf{K}_2(\delta)$ est un opérateur compact pour $\delta > 0$ quelconque et

$$\| \mathbf{K} - \mathbf{K}_2(\delta) \| = | \mathbf{K}_1(\delta) \| \to 0 \quad \text{pour} \quad \delta \to 0 .$$

On en déduit que $4\pi\,\mathrm{BR}_i$ est compact.

En $|\mathrm{K}(s,t)|^2$, il y a des termes des types suivants:

(a) $$|a(s)|^2 (s_1 - t_1)^2 (hr - 1)(\bar{h}r - 1)\, e^{(h+\bar{h})r}/r^6 =$$
$$= |a(s)|^2 (s_1 - t_1)^2 (r^2 + r\sqrt{2} + 1)\, e^{-r\sqrt{2}}/r^6$$

(b) $$[a(s)\,\overline{b(s)} + \overline{a(s)}\,b(s)]\,(s_1 - t_1)(s_2 - t_2)(r^2 + r\sqrt{2} + 1)\, e^{r\sqrt{2}}/r^6$$

(c) $$a(s)\,\overline{d(s)}\,(s_1 - t_1)(hr - 1)\, e^{-r\sqrt{2}}/r^4$$

(d) $$|d(s)|^2 e^{-r\sqrt{2}}/r^2 .$$

Il est facile de montrer que les parts correspondantes de $\mathrm{K}_2(\delta)$ sont de carré sommable.

Dans le cas de (a) nous avons par exemple:

$$\int_\Omega |a(s)|^2\,ds \int_{r>\delta} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos^2\theta \cos^2\varphi\,(r^2 + r\sqrt{2} + 1)\, r^{-6} e^{-r\sqrt{2}}\, r^2 \cos\theta\; d\theta =$$

$$= (4\pi/3) \int_\Omega |a(s)|^2\,ds \int_\delta^\infty \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{r} + \frac{1}{r^2}\right) e^{-r\sqrt{2}}\,dr < \infty .$$

De même pour les autres termes. Ainsi le noyau est de carré sommable et l'opérateur correspondant est compact pour $\delta > 0$ quelconque.

Il reste à prouver que $\| \mathbf{K}_1(\delta) \| \to 0$ pour $\delta \to 0$. Supposons $|a(s)|$, $|b(s)|$, $|c(s)|$, $|d(s)| < \mathrm{M}$. Alors

$$\int_\Omega |\mathrm{K}_1(s,t)|\,dt \leq \int_{|s-t|<\delta} \left(|a(s)|\,(s_1 - t_1)(hr - 1)\, e^{hr}/r^3 | + \cdots + |d(s)\, e^{hr}/r|\right) dt$$

et

$$\int_{|t-s|\leq\delta} |a(s)(s_1 - t_1)(hr - 1)\, e^{hr}/r^3|\,dt \leq \mathrm{M} \int_0^\delta dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (hr - 1)\, e^{hr}\,d\theta$$

$$\leq 4\pi\,\mathrm{M} \int_0^\delta (r + 1)\, e^{-r\sqrt{2}/2}\,dr \to 0 .$$

De même pour les autres expressions et la démonstration est complète.

Geometria. — *Sulla varietà che rappresenta le coppie di punti di due spazi.* Nota di DIONISIO GALLARATI, presentata (*) dal Corrisp. E. G. TOGLIATTI.

In una Nota recente (1), che fa seguito a mie precedenti ricerche sulle varietà differenziabili i cui spazi tangenti si appoggiano irregolarmente a spazi assegnati, ho dimostrato tra l'altro che la varietà di C. Segre prodotto di una retta per un piano, e cioè la V_3^3 di S_5, può essere caratterizzata tra tutte le V_3 differenziabili di S_r con $r \geq 5$, dalla proprietà di avere tutti gli S_3 tangenti appoggiati a quattro rette a tre a tre indipendenti.

Il desiderio di vedere se un teorema di questo tipo sussista per ogni varietà di C. Segre prodotto di due o più spazi lineari, ha dato origine ad alcuni miei lavori in corso di pubblicazione; e non mi sembra inutile presentare qui riuniti i principali risultati ottenuti, accennando molto in succinto ai procedimenti dimostrativi seguiti.

L'estensione al caso della V_{p+1} prodotto di una retta per un S_p si fa abbastanza agevolmente; e vale il seguente

TEOREMA I. – *Se una* V_{p+1} $(p \geq 2)$ *differenziabile appartenente allo spazio* S_r *con* $r \geq 2p + 1$, *non è un cono e non si compone di spazi lineari* S_{p+1}, *e se i suoi* S_{p+1} *tangenti sono incidenti a* $p + 2$ *rette congiunte a* $p + 1$ *a* $p + 1$ *da un* S_{2p+1}, *gli* S_{p+1} *tangenti di* V_{p+1} *incontrano* ∞^p *rette, ed anzi* V_{p+1} *è la* $S_p - V_{p+1}^{p+1}$ *razionale normale che al modo di C. Segre rappresenta le coppie di punti estratti da una retta e da un* S_p.

La dimostrazione si ottiene in tre tempi:

a) si osserva che una V_{p+1} di S_{2p+1} avente gli S_{p+1} tangenti appoggiati a $p + 1$ rette indipendenti, è situata su $\binom{p+1}{2}$ coni W_{2p}, ciascuno dei quali ha come vertice l'S_{2p-3} che congiunge $p - 1$ delle rette date. Ciò consente di riconoscere in modo assai rapido che esistono in S_{2p+1} due famiglie, dipendenti rispettivamente da p e da $p + 1$ funzioni arbitrarie di una variabile, di V_{p+1} non coniche aventi gli S_{p+1} tangenti appoggiati a $p + 1$ rette indipendenti; la prima di queste famiglie è costituita da tutte le serie semplicemente infinite di spazi S_p appoggiati alle $p + 1$ rette;

b) con metodo simile a quello impiegato in (1) e sfruttando alcune osservazioni ivi contenute, si dimostra che una sola di queste famiglie (quella costituita da serie di ∞^1 S_p) può contenere delle V_{p+1} i cui spazi tangenti

(*) Nella seduta dell'8 novembre 1958.

(1) D. GALLARATI, *Una proprietà caratteristica della varietà cubica a tre dimensioni dello spazio* S_5, « Rend. Sem. Matem. Univ. di Torino », vol. 17, pp. 1–14 (1957–58).

incontrino un'altra retta generica di S_{2p+1}; e che una siffatta V_{p+1} è necessariamente la V_{p+1}^{p+1} di C. Segre;

c) si osserva infine che una V_{p+1} non cono avente gli S_{p+1} tangenti tutti appoggiati a $p+2$ rette, a $p+1$ a $p+1$ indipendenti, appartiene ad S_{2p+1}.

Difficoltà nuove sorgono quando si voglia caratterizzare in modo simile la varietà V_{p+q} prodotto di un S_p per un S_q con $p \geq 2$, $q \geq 2$.

Già il caso $p = q = 2$, che sembra di speciale interesse, dà luogo a numerose questioni che non si presentano quando $(p-1)(q-1) = 0$. Innanzitutto, se un piano π è appoggiato a tutti gli S_4 tangenti di una V_4 di S_8 non conica, occorre distinguere il caso in cui i punti di π situati su qualche S_4 tangente di V_4 siano ∞^2, da quello in cui questi punti siano soltanto ∞^1; ed inoltre occorre distinguere il caso in cui ogni S_4 tangente di V_4 abbia a comune un sol punto con π, oppure una retta. Ed ancora, se π_1 e π_2 sono due piani di S_8 appoggiati a tutti gli S_4 tangenti di V_4, conviene distinguere il caso in cui l'$S_5\,\pi_1\,\pi_2$ abbia a comune con ogni S_4 tangente di V_4 un piano appoggiato a π_1 ed a π_2 (caso che si presenta, ad esempio, quando uno dei due piani è segato in rette da ogni S_4 tangente di V_4), oppure soltanto una retta, come avviene in generale.

Dopo aver determinato tutte le V_4 differenziabili di S_8 i cui S_4 tangenti si appoggiano a due piani generici, ho dimostrato che esistono nello spazio S_8 due diverse famiglie $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ (dipendenti rispettivamente da quattro e da cinque funzioni arbitrarie di due variabili indipendenti) di varietà V_4 non coniche i cui S_4 tangenti, senza segare in piani un medesimo S_5, sono tutti appoggiati a tre piani indipendenti.

Per ciò che concerne le V_4 di S_8 i cui S_4 tangenti incontrano tre piani ma segano in piani qualche S_5, mi sono limitato a considerare alcuni tipi particolari che sono interessanti per il seguito della ricerca; e precisamente le V_4 di S_8 i cui S_4 tangenti incontrano tre piani indipendenti avendo in comune una retta con uno di essi (le quali V_4 si distribuiscono in tre distinte famiglie), e le V_4 di S_8 i cui S_4 tangenti, pur avendo (in generale) uno ed un solo punto a comune con ciascuno dei tre piani π_1, π_2, π_3, segano secondo piani ciascuno dei tre S_5 $\pi_i\,\pi_k$. Queste altre varietà si distribuiscono in due famiglie: una costituita da particolari V_4 luoghi di ∞^2 piani, un'altra costituita da particolari V_4 che contengono ∞^3 curve piane.

Il metodo impiegato per giungere a questo risultato conduce rapidamente al seguente:

TEOREMA II. – *Condizione necessaria e sufficiente affinché gli spazi tangenti di una* V_4 *di* S_8 *taglino secondo piani quattro* S_5 *generici,* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$, *è che* V_4 *sia l'intersezione – eventualmente parziale – di quattro* S_5, *coni aventi come vertici* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$. *Una tale* V_4 *ha gli* S_4 *tangenti tutti appoggiati ai sei piani* $\varepsilon_i\,\varepsilon_j$ (*a tre a tre indipendenti*), *su ciascuno dei quali è due* (*in generale*) *la dimensione dell'insieme dei punti d'appoggio.*

Ciò premesso, determino le condizioni affinché una V_4 appartenente ad una delle due famiglie $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ abbia tutti gli S_4 tangenti che, senza segare in piani un medesimo S_5, incontrino un quarto piano generico e dimostro che tra le varietà della famiglia $\mathfrak{A}$ c'è solo la V_4^6 di C. Segre per cui tali condizioni sono verificate; esse invece sono soddisfatte da due diversi tipi di V_4 contenute in $\mathfrak{B}$, aventi gli S_4 tangenti appoggiati a quattro curve piane: le V_4 ricoperte da ∞^1 S_3 appoggiati a quattro piani, ed inoltre certe V_4 che si possono ottenere come proiezioni generiche di particolari V_4 di S_{11} aventi gli S_4 tangenti incidenti a quattro piani indipendenti. Dimostro poi che la ipotesi che gli S_4 tangenti di una di queste ultime V_4 incontrino un quinto piano generico di S_8 porta di conseguenza ch'essi abbiano a comune un piano con un medesimo S_5.

Si hanno cioè i seguenti teoremi:

TEOREMA III. – *La varietà di C. Segre prodotto di due piani può essere caratterizzata tra tutte le* V_4 *differenziabili e non coniche dello spazio* S_8 *dalla proprietà di avere gli* S_4 *tangenti che, senza segare in piani un medesimo* S_5, *si appoggiano a quattro piani di* S_8 *a tre a tre indipendenti, ciascuno dei quali contenga* ∞^2 *punti situati ognuno su qualche* S_4 *tangente di* V_4.

TEOREMA IV. – *Le* V_4 *differenziabili e non coniche di* S_8 *i cui* S_4 *tangenti, senza segare in piani un medesimo* S_5, *si appoggiano a cinque piani a tre a tre indipendenti, sono: la* V_4^6 *di C. Segre e le serie semplicemente infinite di spazi* S_3 *appoggiati ai cinque piani dati.*

Il teorema II assicura che tutte le ipotesi ammesse sono indispensabili per la validità dei risultati.

Per estendere il teorema III si può osservare anzitutto che una V_{p+q} dello spazio S_{pq+p+q} i cui S_{p+q} tangenti si appoggiano a $p+1$ S_q indipendenti $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_p$, appartiene a $\binom{p+1}{2}$ coni di dimensione $pq+p$ aventi come vertici degli spazi di dimensione $(p-1)(q+1)-1$. Ciò consente di dimostrare che in S_{pq+p+q} esistono due famiglie di V_{p+q} non coniche, dipendenti rispettivamente da pq e da $pq+1$ funzioni arbitrarie di q variabili indipendenti, i cui S_{p+q} tangenti, senze segare in spazi S_p un medesimo S_{pq+p-1}, si appoggiano a $p+1$ S_q indipendenti.

Per proseguire la ricerca introduco l'ipotesi che V_{p+q} sia di classe differenziale $\mathcal{C}^{(2)}$, e dimostro che in tale ipotesi una sola delle due famiglie suddette può contenere qualche V_{p+q} i cui S_{p+q} tangenti incontrano un altro S_q generico di S_{pq+p+q}, α_{p+1}, in modo tale che ciascuno degli spazi α_i contenga ∞^q punti situati ciascuno su qualche S_{p+q} tangente di V_{p+q}, giungendo al seguente:

TEOREMA V. – *La varietà di C. Segre* $V_{p+q} = S_p \times S_q$, *con* $p \geq 2$, *può essere caratterizzata tra tutte le* V_{p+q} *di classe differenziale* $\mathcal{C}^{(2)}$ *appartenenti allo spazio* S_{pq+p+q} *e non coniche, dalla proprietà di avere tutti gli* S_{p+q} *tangenti che, senza segare secondo spazi* S_p *un medesimo* S_{pq+p-1}, *sono tutti appoggiati a*

$p+2$ *spazi* S_q *a* $p+1$ *a* $p+1$ *indipendenti, su ciascuno dei quali sia* q *la dimensione dell'insieme dei punti d'appoggio.*

L'ipotesi che V_{p+q} sia di classe differenziale $\mathcal{C}^{(2)}$, utile per la dimostrazione, è probabilmente inessenziale, come certo accade quando $p = q = 2$; invece le altre ipotesi ammesse sono indispensabili se si vuole che il teorema enunciato sussista per ogni coppia di interi $p \geq 2$, $q \geq 2$. Ma mentre si trovano subito delle V_{p+q} i cui S_{p+q} tangenti si appoggiano a $p+2$ V_{q-j} $(j \geq 1)$ situate negli spazi α_i (basta considerare, ad esempio, una qualunque V_{p+q} che sia luogo di ∞^{q-j} spazi S_{p+j} appoggiati agli spazi α_i), non sembra facile ottenere un risultato che estenda il teorema II, il quale assicuri che anche per $p \geq 2$ l'ipotesi che gli S_{p+q} tangenti di V_{p+q} non seghino secondo spazi S_p un medesimo spazio S_{pq+p-1}, sia essenziale per la validità del teorema V.

Fisica matematica. — *Sulla velocità di gruppo nei conduttori in moto.* Nota di GIOVANNI CRUPI, presentata (*) dal Socio B. FINZI.

In questa Nota si stabilisce una semplice relazione tra la velocità di gruppo e la velocità di fase delle onde elettromagnetiche propagantisi in un corpo conduttore, animato da moto traslatorio uniforme rispetto al sistema inerziale S ($Oxyzt$) di osservazione.

Tale relazione generalizza ai conduttori mobili un risultato stabilito da Nardini (1) nel caso dei conduttori in quiete.

Nella parte preliminare, avrò anche occasione di estendere ai conduttori in moto una nota formula che misura quantitativamente l'effetto Fizeau–Fresnel sul parziale trascinamento della luce da parte dei dielettrici mobili.

1. Come è noto, una propagazione per onde elettromagnetiche in un conduttore animato da moto traslatorio uniforme è governata dalle seguenti equazioni di Maxwell–Minkowski

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{B}} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E} \\ \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{I} = c \operatorname{rot} \mathbf{H} \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{D} + \beta \wedge \mathbf{H} = \varepsilon (\mathbf{E} + \beta \wedge \mathbf{B}) \\ \mathbf{B} - \beta \wedge \mathbf{E} = \mu (\mathbf{H} - \beta \wedge \mathbf{D}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{I} = \alpha\sigma (\mathbf{E} + \beta \wedge \mathbf{B}) \\ \rho = \frac{\alpha\sigma}{c^2} \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{E} \end{cases} \qquad \beta = \frac{\boldsymbol{v}}{c} \ , \ \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

dove $\mathbf{B}$ è l'induzione magnetica, $\mathbf{D}$ l'eccitazione elettrica, $\mathbf{I}$ la densità di corrente di conduzione, $\mathbf{E}$ l'intensità del campo elettrico, $\mathbf{H}$ l'intensità del campo magnetico, $\boldsymbol{v}$ la velocità costante del mezzo, c la velocità della luce nel vuoto, ε la costante dielettrica, μ la permeabilità magnetica, σ la conducibilità elettrica e ρ la densità di carica spaziale.

In un lavoro del 1955, Carini (2), estendendo ai conduttori un precedente lavoro di Lampariello (3), ha dimostrato che le quattro grandezze fondamentali $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$ soddisfano all'equazione del secondo ordine

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\Phi}}{\partial t^2} - \Delta \boldsymbol{\Phi} + \frac{n^2 - 1}{c^2 - v^2} \frac{d^2 \boldsymbol{\Phi}}{dt^2} + \frac{\sigma\mu}{c \sqrt{c^2 - v^2}} \frac{d\boldsymbol{\Phi}}{dt} = 0$$

(*) Nella seduta dell'8 novembre 1958.

(1) R. NARDINI, *Sulla velocità di gruppo nei mezzi elettricamente conduttori*, « Boll. U.M.I. », vol. 12, pp. 523–525 (1957).

(2) G. CARINI, *Sulle equazioni di Minkowski per i conduttori in moto*, « Rend. Ist. Lomb. », Classe di Scienze, vol. LXXXVIII (1955).

(3) G. LAMPARIELLO, *L'equazione generale delle onde elettromagnetiche nei corpi in moto*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », serie 8, 17, 222 (1954).

$\left(n^2 = \varepsilon\mu\,,\ \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\right)$ che in prima approssimazione si particolarizza nella

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\Phi}}{\partial t^2} - c^2\,\Delta\boldsymbol{\Phi} + (n^2 - 1)\frac{d^2\boldsymbol{\Phi}}{dt^2} + \sigma\mu\frac{d\boldsymbol{\Phi}}{dt} = 0. \tag{1}$$

Tentiamo di soddisfare alla (1) con una

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0\, e^{i(k\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u} - \omega t)} \tag{2}$$

dove k è un parametro da determinarsi opportunamente, $\boldsymbol{u}$ il versore della direzione di propagazione dell'onda ed ω un parametro conosciuto.

Sostituendo la (2) nella (1) ed indicando con ϑ l'angolo che il versore $\boldsymbol{u}$ della direzione di propagazione forma con la velocità costante $\boldsymbol{v}$ del conduttore si ottiene che k dev'essere radice della seguente equazione

$$c^2 k^2 + \beta\cos\vartheta\,[i\sigma\mu + 2\,\omega\,(n^2 - 1)]\,ck - (n^2\,\omega^2 + i\sigma\mu\omega) = 0.$$

Risolvendo rispetto a k, e trascurando i termini in β^2, si ha

$$k = \frac{-\beta\cos\vartheta\left[i\,\frac{\sigma\mu}{2} + \omega\,(n^2 - 1)\right] \pm \omega\,(a + ib)}{c}\,, \tag{3}$$

dove a e b sono due parametri reali che soddisfano al sistema

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = \varepsilon\mu \\ a\cdot b = \dfrac{\sigma\mu}{2\,\omega}\,. \end{cases} \tag{4}$$

Dalle (4) si ottiene subito che

$$\begin{cases} a = \sqrt{\dfrac{\varepsilon\mu}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2\,\omega^2}}\right)} \\ b = \sqrt{\dfrac{\varepsilon\mu}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2\,\omega^2}}\right)}\,. \end{cases} \tag{5}$$

Il doppio segno nel numeratore della (3) allude alla presenza di onde progressive e retrograde nella direzione caratterizzata da $\boldsymbol{u}$. Limitando le nostre considerazioni alle sole onde progressive, poiché quelle relative alle onde retrograde sono analoghe, da qui in poi tratterremo solo il segno positivo.

Sostituendo la (3) nella (2), si ottiene

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0\, e^{-\gamma\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u}}\, e^{i\omega\left(\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u}}{w} - t\right)}\,,$$

dove i parametri W ed γ, definiti dalle formule

$$w = \frac{c}{a - (\varepsilon\mu - 1)\,\beta\cos\vartheta} \tag{6}$$

$$\gamma = \frac{\omega b}{c} - \frac{\mu\sigma}{2c}\,\beta\cos\vartheta\,, \tag{7}$$

indicano rispettivamente la velocità di fase ed il fattore di attenuazione delle onde propagantisi nel conduttore mobile nella direzione positiva di $\boldsymbol{u}$.

Dalla (6), mettendo in evidenza c/a, applicando lo sviluppo in serie geometrica e trattenendo solo il termine di primo ordine in β, si ha

$$W = \frac{c}{a}\left(1 + \frac{\varepsilon\mu - 1}{a}\,\beta\cos\vartheta\right),$$

e questa, tenendo conto della prima delle (5), si specializza nella formula annunciata nella premessa

$$(6') \qquad W = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+A}}\,\frac{c}{n} + 2\,\frac{1 - \frac{1}{n^2}}{1+A}\,v\cos\vartheta, \qquad A = \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}.$$

La (6') estende ai conduttori mobili la seguente formula

$$(6'') \qquad W = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v\cos\vartheta$$

che misura quantitativamente l'effetto Fizeau–Fresnel sul parziale trascinamento delle onde da parte dei dielettrici in moto.

La (6''), la quale si può ottenere particolarizzando la (6') al caso dei dielettrici, ossia ponendo $\sigma = 0$, è stata trovata da Carini [4] come velocità di propagazione delle onde piane armoniche e da Clauser [5] come velocità di propagazione dei fronti d'onda nei dielettrici animati da moto uniforme.

La (6') esprime che il contributo del moto della sede conduttrice alla velocità di propagazione delle onde, che in essa si propagano, si attenua via via che la direzione di propagazione $\boldsymbol{u}$ tende a divenire normale alla velocità costante $\boldsymbol{v}$ del conduttore. In particolare, ci permette di affermare che la velocità di fase delle onde propagantisi in direzione ortogonale alla direzione del moto del conduttore è la stessa di quella che si avrebbe se la sede conduttrice fosse in quiete.

2. Per calcolare la velocità di gruppo W_g ci serviamo della nota formula [6]

$$(8) \qquad \frac{1}{W_g} = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega}{W_f}\right),$$

dove con W_f, per maggiore chiarezza, indichiamo la velocità di fase.

Tenendo conto della (6) e della prima delle (5), si trova che

$$\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega}{W_f}\right) = \frac{1}{W_f} - \frac{\sigma^2\mu}{4\omega^2 c\varepsilon a\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}},$$

(4) G. Carini, *Intorno alle omografie elettrica e magnetica associate alle onde nei corpi in moto*, « Rend. Lincei », ser. VIII, vol. XVII, fasc. 6 (1954).

(5) E. Clauser, *Velocità della luce nei corpi isotropi in moto*, « Rend. Lincei », vol. XVII, fasc. 6 (1954).

(6) J. A. Stratton, *Teoria dell'elettromagnetismo*, Torino, Einaudi, 1952.

e questa, in virtù della seconda delle (4) e della relazione

$$a^2 + b^2 = \varepsilon\mu \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \omega^2}},$$

che si ottiene quadrando e sommando le (5), può essere posta nella forma

$$\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega}{W_f}\right) = \frac{1}{W_f}\left(1 - \frac{b^2 a W_f}{c(a^2 + b^2)}\right). \tag{9}$$

D'altra parte, dalla (6) si ottiene che

$$\frac{a W_f}{c} = \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon\mu - 1}{a}\beta \cos\vartheta},$$

e da questa, applicando lo sviluppo in serie geometrica e trattenendo solo il termine di primo ordine in β, si deduce

$$\frac{a W_f}{c} = 1 + m\beta \cos\vartheta, \tag{10}$$

avendo posto $m = \frac{\varepsilon\mu - 1}{a}$.

In virtù delle (8) e (10), dalla (9) si ricava che

$$W_g = \frac{1 + \frac{b^2}{a^2}}{1 - \frac{b^2}{a^2} m\beta \cos\vartheta} W_f,$$

e questa, sviluppando in serie geometrica $\left(1 - \frac{b^2}{a^2} m\beta \cos\vartheta\right)^{-1}$ e trattenendo il solo termine di primo ordine in β, fornisce la formula

$$W_g = \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)\left(1 + \frac{b^2}{a^2} m\beta \cos\vartheta\right) W_f, \tag{11}$$

che esprime la relazione, annunciata nella premessa, tra la velocità di gruppo e la velocità di fase delle onde che nel conduttore mobile si propagano in una direzione generica $\boldsymbol{u}$.

Ponendo $\beta = 0$ nella (11), si ritrova la relazione stabilita da Nardini nel caso dei conduttori in quiete.

La (11) mostra che il contributo del moto della sede conduttrice sulla velocità di gruppo varia con l'angolo ϑ che la direzione di propagazione delle onde $\boldsymbol{u}$ forma con la velocità $\boldsymbol{v}$ del mezzo. Questo contributo è massimo per $\vartheta = 0$ ed è minimo per $\vartheta = \pi$. In particolare, si può enunciare il seguente Teorema:

Per le onde che si propagano in direzione ortogonale a quella del moto del conduttore, la velocità di gruppo è la stessa di quella che si avrebbe se la sede conduttrice fosse in quiete.

Chimica fisica. — *Costanti di forza degli esafluoruri* XF_6 (*). Nota di Salvatore Califano, presentata (**) dal Socio F. Giordani.

In una serie di recenti ricerche spettroscopiche [1, 2, 3, 4, 5] è stato, ampiamente dimostrato che gli esafluoruri del tipo XF_6 (X = S, Se, Te, Mo, W, U, Re, Ir, Np, Pu) appartengono al gruppo di simmetria O_h, posseggono cioè la struttura di un ottaedro regolare.

Questa conclusione è essenzialmente basata sul fatto che, in accordo con le previsioni teoriche, nello spettro Raman compaiono al massimo tre bande e nello spettro IR al massimo due, assegnabili ad oscillazioni fondamentali (vedi Tabella I).

Tabella I.

N.	Simmetria	Attività
ν_1	a_{1g}	R *p*
ν_2	e_g	R *dp*
ν_3	f_{1u}	IR
ν_4	f_{1u}	IR
ν_5	f_{2g}	R *dp*
ν_6	f_{2u}	inattiva

Numerosi tentativi sono stati fatti per calcolare le costanti di forza degli esafluoruri adottando come base del calcolo funzioni potenziali semplificate. D. F. Heath e J. W. Linnett hanno eseguito i calcoli per esafluoruri di S, Se e Te utilizzando sia un potenziale semplice di forze di valenza (s.v.f.f.) nel quale vengono trascurate le costanti di interazione, sia il potenziale o.v.f.f. (orbital valency force field) di Linnett [7]. Nessuno dei due tipi di potenziale permette in realtà di riprodurre le frequenze sperimentali con sufficiente accuratezza. Adottando il potenziale di Linnett le prime cinque frequenze calcolate sono in buon accordo con i valori sperimentali, mentre per la sesta la deviazione eccede ogni limite accettabile. Quando si adotta invece il potenziale semplice delle forze di valenza, la concordanza viene meno anche per la ν_4 e per la ν_5.

J. Gaunt [8] ha esteso i calcoli anche alle molecole MoF_6, WF_6, ReF_6 ed UF_6 confermando i risultati di Heath e Linnett ed anzi constatando

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico dell'Università di Napoli – Centro Studi di Chimica Applicata del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'8 novembre 1958.

che nel caso dell'UF_6 e dello ReF_6 il disaccordo è notevole per entrambi i tipi di potenziale.

K. Venkateswarlu ed S. Sundaran [9] hanno tentato di eseguire il calcolo con un campo di forze più generale, utilizzando le prime cinque frequenze (e tralasciando senza alcun giustificato motivo la sesta) per calcolare 5 costanti di forza.

È facile vedere però che, tra l'altro, gli elementi della matrice **G** di simmetria utilizzati per il calcolo sono sbagliati; per esempio negli elementi di matrice di tipo a_{1g} ed e_g figura la massa m_x dell'atomo centrale, il quale evidentemente non prende parte all'oscillazione. In conseguenza di tali errori, i valori numerici delle costanti di forza ottenuti non hanno nessun significato.

Abbiamo pertanto creduto opportuno di istituire una nuova serie di calcoli per tutte le dieci molecole di esafluoruri sopra ricordate, adoperando due tipi di potenziale e cioè: un potenziale quadratico comprendente quattro costanti di interazione come definite in seguito, ed un potenziale del tipo di Urey–Bradley [10]. Le costanti di forza calcolate nel primo caso, permettono di rappresentare con esattezza le frequenze sperimentali, mentre quelle calcolate nel secondo caso permettono di rappresentare con buona approssimazione le frequenze sperimentali per cinque soltanto delle molecole prese in esame come sarà successivamente spiegato.

CALCOLO DELLE COSTANTI DI FORZA.

1. *Funzione potenziale quadratica.*

Le costanti di forza sono state calcolate adoperando il ben noto metodo delle matrici **FG** di Wilson. Le coordinate di simmetria [1] usate per le differenti specie di vibrazione che compaiono per il gruppo di simmetria O_h sono le seguenti (vedi fig. 1):

a_{1g} $$S_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\Delta r_1 + \Delta r_2 + \Delta r_3 + \Delta r_4 + \Delta r_5 + \Delta r_6)$$

e_g $$S_2 = \frac{1}{\sqrt{12}}(2\Delta r_1 - \Delta r_2 + 2\Delta r_3 - \Delta r_4 - \Delta r_5 - \Delta r_6)$$

f_{1u} $$S_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Delta r_1 - \Delta r_3)$$

$$S_4 = \frac{1}{\sqrt{8}}(\Delta\alpha_{12} + \Delta\alpha_{15} + \Delta\alpha_{14} + \Delta\alpha_{16} - \Delta\alpha_{32} - \Delta\alpha_{35} - \Delta\alpha_{34} - \Delta\alpha_{36})$$

f_{2g} $$S_5 = \frac{1}{2}(\Delta\alpha_{12} - \Delta\alpha_{23} + \Delta\alpha_{34} - \Delta\alpha_{14})$$

f_{2u} $$S_6 = \frac{1}{4}(2\Delta\alpha_{12} - \Delta\alpha_{15} - \Delta\alpha_{16} - 2\Delta\alpha_{34} + \Delta\alpha_{35} + \Delta\alpha_{36} + \Delta\alpha_{45} + \Delta\alpha_{46} - \Delta\alpha_{25} - \Delta\alpha_{26}).$$

(1) Per le oscillazioni degeneri una sola componente delle coordinate di simmetria è stata riportata.

Utilizzando queste coordinate di simmetria si ottengono le seguenti espressioni per gli elementi delle matrici di simmetria **F** e **G**:

$$a_{1g} \quad G_{11} = \frac{1}{m_F} \qquad ; \; F_{11} = F_r + 4F_{rr} + F^*_{rr}$$

$$e_g \quad G_{22} = \frac{1}{m_F} \qquad ; \; F_{22} = F_r - 2F_{rr} + F^*_{rr}$$

$$f_{1u} \quad G_{33} = \frac{2}{m_X} + \frac{1}{m_F} \qquad ; \; F_{33} = F_r - F^*_{rr}$$

$$G_{34} = -4/r \cdot m_X \qquad ; \; F_{34} = r\,(2F_{r_i\,\alpha_{ij}} - 2F'_{r_i\,\alpha_{kl}})$$

$$G_{44} = \frac{2}{r^2}\left(\frac{4}{m_X} + \frac{1}{m_F}\right) ; \; F_{44}\,r^2\,(F_\alpha + 2F_{\alpha_{ij}\,\alpha_{jl}} - 2F_{\alpha_{ij}\,\alpha_{kl}} - F'_{\alpha_{ij}\,\alpha_{kl}})$$

$$f_{2g} \quad G_{55} = 4/r^2\,m_F \qquad ; \; F_{55} = r^2\,(F_\alpha - 2F'_{\alpha_{ij}\,\alpha_{il}} + 2F'_{\alpha_{ij}\,\alpha_{kl}})$$

$$f_{2u} \quad G_{66} = 2/r^2\,m_F \qquad ; \; F_{66} = r^2\,(F_\alpha - 2F_{\alpha_{ij}\,\alpha_{il}} - F'_{\alpha_{ij}\,\alpha_{kl}} + 2F_{\alpha_{ij}\,\alpha_{kl}}).$$

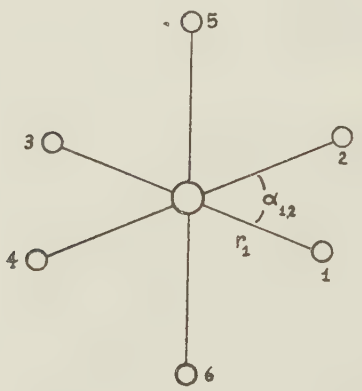


Fig. 1.

Le F' indicano costanti di interazione relative a coordinate complanari, mentre la F^*_{rr} indica la costante di interazione corrispondente a legami che fanno tra di loro un angolo di 180°.

Poiché si dispone di sole sei frequenze fondamentali, cinque delle costanti di interazione tra coordinate aventi un solo atomo in comune sono state assunte eguali a zero e cioè: F^*_{rr}, $F'_{r_i\,\alpha_{kl}}$, $F_{r_i\,\alpha_{kl}}$, $F_{\alpha_{ij}\,\alpha_{kl}}$, $F'_{\alpha_{ij}\,\alpha_{kl}}$. L'eliminazione delle ultime due costanti è giustificata dai valori molto piccoli ottenuti per la $F_{\alpha_{ij}\,\alpha_{il}}$ e per la $F'_{\alpha_{ij}\,\alpha_{jl}}$, mentre per le altre tre la opportunità della scelta può essere soltanto giustificata a posteriori attraverso il perfetto accordo tra le frequenze calcolate e quelle sperimentali.

Nella Tabella II sono riportate le frequenze fondamentali degli esafluoruri ed il loro assegnamento alle diverse classi di simmetria, con le seguenti

modifiche rispetto ai dati della letteratura: nello spettro IR del WF_6 compare una banda a 796 cm^{-1} che è la più intensa dello spettro dopo le due fondamentali a 712 e 258 cm^{-1}; tale banda è stata assegnata da J. Gaunt [2] alla combinazione $\nu_1 + \nu_3 - \nu_2 = 811$ e da T. G. Burke, D. F. Smith e A. H. Nielsen [1] alla $3\,\nu_4 = 774$ cm^{-1}. Entrambi gli assegnamenti sembrano poco probabili dovendosi avere per una combinazione ternaria una intensità molto minore di quella registrata: per di più il valore calcolato di 774 cm^{-1}, richiederebbe una forte anarmonicità negativa.

TABELLA II.

Frequenze fondamentali degli esafluoruri XF_6.

Composto	ν_1	ν_2	ν_3	ν_4	ν_5	ν_6	Bibliografia
SF_6	775	644	932	613	524	344	[2, 14, 15]
SeF_6	708	662	780	437	405	260	[2]
TeF_6	701	674	752	327	313	197	[2, 3]
MoF_6 . . .	736	641	742	269	319	240	[1, 2]
WF_6	769	670	760*	256	322	216	[1, 2]
ReF_6 . . .	753	600	716	245	246	174	[12]
IrF_6	696	643	718	276	260	205	[4]
UF_6	665	536	623	186	202	136	[1, 2, 16, 8]
NpF_6 . . .	648	528	624	200	206	164	[5]
PuF_6 . . .	628	523	615	203	211	171	[5, 17]

* Vedi testo.

Noi pensiamo che la forte intensità di questa banda possa essere spiegata solo ammettendo che si verifichi una risonanza di Fermi tra la fondamentale ν_3 e la $3\,\nu_4$; in tale ipotesi si è assunto nei calcoli come frequenza della fondamentale ν_3 il valore di 760 cm^{-1} anziché di 712 cm^{-1}.

Per l'ReF_6 J. Gaunt [12] ha calcolato, dalla banda di combinazione $\nu_2 + \nu_4 = 993$ cm^{-1}, un valore di 393 cm^{-1} per la ν_4, troppo alto se paragonato a quelli delle molecole MoF_6, WF_6 ed IrF_6; assegnando invece la banda a 993 cm^{-1} alla combinazione $\nu_1 + \nu_4$, si ottiene per la ν_4 un valore di 245 cm^{-1} molto più plausibile. Nella Tabella III è riportato l'assegnamento modificato secondo tal modo di vedere, accanto a quello di J. Gaunt.

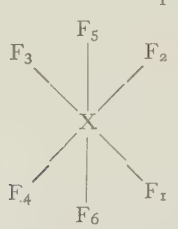
Nella Tabella IV sono poi riportate le costanti di forza calcolate a partire dai valori delle frequenze contenuti nella Tabella II: le frequenze ricalcolate usando tali costanti coincidono esattamente con le sperimentali.

TABELLA III.

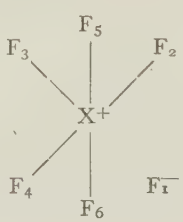
Assegnamento dello spettro IR *e Raman dell'esafluoruro di Renio.*

ν (cm^{-1})	J. Gaunt	Questo lavoro
246 (R)	ν_5	ν_5
413	$\nu_5 + \nu_6 = 416$	$\nu_5 + \nu_6 = 420$
549	$\nu_1 + \nu_4 - \nu_2 = 546$	$\nu_2 + \nu_3 - \nu_1 = 563$
600 (R)	ν_2	ν_2
641	$\nu_4 + \nu_5 = 639$	$2\nu_4 + \nu_6 = 664$
716	ν_3	ν_3
753 (R)	ν_1	ν_1
867	$\nu_1 + \nu_3 - \nu_2 = 869$	$\nu_1 + \nu_3 - \nu_2 = 869$
916	$\nu_1 + \nu_4 - \nu_5 = 900$	
956	$\nu_3 + \nu_5 = 962$	$\nu_3 + \nu_5 = 962$
993	$\nu_2 + \nu_4 = 993$	$\nu_1 + \nu_4 = 999$
1064	$2\nu_5 + \nu_3 = 1064$	$2\nu_6 + \nu_3 = 1064$
1306	$\nu_2 + \nu_3 = 1316$	$\nu_2 + \nu_3 = 1316$
1368	$2\nu_2 + \nu_6 = 1370$	$2\nu_2 + \nu_6 = 1374$
1471	$\nu_1 + \nu_3 = 1469$	$\nu_1 + \nu_3 = 1469$
1973	$3\nu_2 + \nu_6 = 1970$	$3\nu_2 + \nu_6 = 1970$

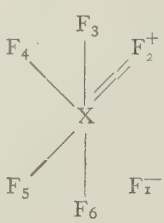
Le notevoli variazioni nella struttura elettronica dell'elemento centrale, quando si passa dallo zolfo al plutonio, non permettono di constatare una variazione regolare delle costanti di forza nella intera serie esaminata, bensì nei tre primi e negli ultimi tre termini di essa. Una importante deduzione può essere tratta per quanto riguarda il segno positivo che assume in ogni caso la costante di interazione F_{rr}. In accordo con le considerazioni svolte da C. A. Coulson, J. Duchesne e C. Manneback [13], se si prendono in esame le forme risonanti più probabili della molecola XF_6:



(I)



(II)



(III)

si vede che se uno degli atomi di F, per esempio F_1, si allontana dall'atomo centrale, le forme risonanti (II) e (III) vengono stabilizzate rispetto alla (I) ed i legami X—F vengono ad essere rinforzati, il che corrisponde ad un valore positivo della F_{rr} in accordo con i risultati del calcolo.

TABELLA IV.

Costanti di forza degli esafluoruri (*) *con un campo di forze quadratico* (**).

Composto	F_r	F_α	F_{rr}	$F_{r\alpha}$	$F_{\alpha\alpha}$	$F'_{\alpha\alpha}$
SF_6	5,337	0,839	0,347	0,484	0,088	0,035
SeF_6	5,141	0,519	0,118	0,326	0,070	0,030
TeF_6	5,224	0,330	0,069	0,279	0,056	0,028
MoF_6	5,088	0,257	0,244	0,257	— 0,033	— 0,014
WF_6	5,557	0,277	0,266	0,201	0,008	— 0,007
ReF_6	4,417	0,232	0,386	— 0,164	0,032	0,032
IrF_6	4,893	0,278	0,132	0,082	0,022	0,045
UF_6	3,795	0,129	0,289	0,058	0,013	0,007
NpF_6	3,648	0,168	0,263	— 0,066	0,009	0,025
PuF_6	3,513	0,181	0,226	— 0,088	0,009	0,028

(*) $F_{r\alpha} = F_{r_i \alpha_{ij}}$, $F_{\alpha\alpha} = F_{\alpha_{ij} \alpha_{jl}}$, $F'_{\alpha\alpha} = F'_{\alpha_{ij} \alpha_{jl}}$.

(**) Costanti di forza espresse in unità di 10^5 dine/cm.

Queste semplici considerazioni spiegano anche la regolare diminuzione della costante F_{rr} nella serie SF_6, SeF_6, TeF_6, poiché al crescere del carattere metallico dell'atomo centrale, la forma (III) diviene sempre meno probabile rispetto alla (II).

2. *Funzione potenziale di Urey–Bradley.*

Le costanti di forza degli esafluoruri sono state anche calcolate utilizzando una funzione potenziale di Urey–Bradley comprendente oltre le solite costanti di « stretching » e di « bending », anche termini di repulsione tra atomi non direttamente legati tra di loro.

Utilizzando le coordinate di simmetria prima riportate si ottengono le seguenti espressioni per gli elementi della matrice **F**:

$$a_{1g} \quad F_{11} = K + 4F$$

$$e_g \quad F_{22} = K + F + 3F'$$

$$f_{1u} \quad F_{33} = K + 2F + 2F'$$
$$F_{34} = r(F + F')$$
$$F_{44} = r^2\left(H + \tfrac{1}{2}F - \tfrac{1}{2}F'\right) + k/2$$

$$f_{2g} \quad F_{55} = r^2\left(H + \tfrac{1}{2}F - \tfrac{1}{2}F'\right)$$

$$f_{2u} \quad F_{66} = r^2\left(H + \tfrac{1}{2}F - \tfrac{1}{2}F'\right) - k/2$$

in cui K rappresenta la costante di « stretching » dei legami X—F, ed H la costante di « bending » degli angoli α_{ij}. I simboli F ed F' rappresentano ora rispettivamente i termini di repulsione, quadratico e lineare, tra due atomi di fluoro vicini ed infine k indica la cosiddetta costante di tensione intramolecolare introdotta da Shimanouchi [18].

Le costanti di forza ottenute utilizzando il potenziale di Urey–Bradley per le molecole SF_6, SeF_6, TeF_6, MoF_6 e WF_6 sono riportati nella Tabella V.

TABELLA V.

Costanti di forza del potenziale di Urey–Bradley (*).

Composto	K	H	F	F'	k/r^2	ν_3 calc.	Δ	ν_4 calc.	Δ
							%		%
SF_6	4,05	0,44	0,66	0,00	0,24	992	6,4	567	7,5
SeF_6	4,90	0,41	0,12	0,00	0,18	834	6,9	401	8,2
TeF_6	5,03	0,24	0,10	0,00	0,14	778	3,5	306	6,4
MoF_6	4,26	0,04	0,45	—0,04	—0,07	766	3,2	256	3,4
WF_6	4,90	0,02	0,43	—0,11	—0,06	760	0,0	244	4,7

(*) Costanti di forza espresse in unità di 10^5 dine/cm.

Il confronto dei valori calcolati per le frequenze a partire da tali costanti di forza, dimostra che c'è perfetta concordanza nel caso delle frequenze ν_1, ν_2, ν_5 e ν_6, mentre per le frequenze ν_3 e ν_4 i valori calcolati (colonne 7 e 9) concordano soltanto con buona approssimazione: nelle colonne 8 e 10 figurano i valori Δ delle deviazioni percentuali tra i valori calcolati e quelli sperimentali, deviazioni non superiori all'8 %.

Per le altre cinque molecole invece il calcolo eseguito adottando il potenziale di Urey–Bradley non permette di giungere alla rappresentazione delle frequenze sperimentali con una approssimazione accettabile, senza cadere nel campo dei valori negativi di H.

Sebbene il potenziale di Urey–Bradley sia stato applicato con eccellenti risultati a circa un centinaio di molecole, senza che mai si presentasse il caso di un valore negativo di H, bisogna tener presente che alla costante F_α del potenziale quadratico generale, non corrisponde direttamente la costante H, bensì la sua combinazione con F ed F'

$$F_\alpha = H + \frac{1}{2}F - \frac{1}{2}F'$$

e quindi un valore negativo di H non sarebbe assurdo fisicamente, sempre che i valori di F ed F' siano tali da dare come risultato un valore positivo di F_α. Questo lato del problema, che merita un ulteriore approfondimento, sarà discusso in una prossima Nota.

BIBLIOGRAFIA.

[1] T. G. BURKE, D. F. SMITH and A. H. NIELSEN, « J. Chem. Phys. », *20*, 447 (1952).
[2] J. GAUNT, « Trans. Faraday Soc. », *49*, 1122 (1953).
[3] J. GAUT, « Trans. Faraday Soc. », *51*, 893 (1955).
[4] H. C. MATTRAW, N. J. HAWKINS, D. R. CARPENTER and W. W. SABOL, « J. Chem. Phys. », *23*, 985 (1955).
[5] J. C. MALM, B. WEINSTOCK and H. H. CLAASSEN, « J. Chem. Phys. », *23*, 2191 (1955).
[6] D. F. HEATH and J. W. LINNETT, « Trans. Faraday Soc. », *45*, 264 (1949).
[7] D. F. HEATH and J. W. LINNETT, « Trans. Faraday Soc. », *44*, 873 (1948).
[8] J. GAUNT, « Trans. Faraday Soc. », *50*, 546 (1954); H. H. CLAASSEN, B. WEINSTOCK and J. G. MALM, « J. Chem. Phys. », *25*, 426 (1956).
[9] K. VENKATESWARLU and S. SUNDARAN, « Z. Phys. Chem. », N. F., *9*, 174 (1956).
[10] H. C. UREY and C. A. BRADLEY, « Phys. Rev. », *38*, 1969 (1930).
[11] E. B. WILSON Jr. « J. Chem. Phys. », *7*, 1047 (1939); *9*, 76 (1941).
[12] J. GAUNT, « Trans. Faraday Soc. », *50*, 209 (1954).
[13] C. A. COULSON, J. DUCHESNE and C. MANNEBACK, « V. Henri Memorial Volume », Liegi, *33* (1948).
[14] R. T. LAGEMANN and E. A. JONES, « J. Chem. Phys. », *19*, 534 (1951)
[15] D. EDELSON and K. B. MCAFEE, « J. Chem. Phys. », *19*, 1311 (1951).
[16] J. BIGELEISEN, M. G. MAYER, P. C. STEVENSON and J. TURKEVICH, « J. Chem. Phys. », *16*, 442 (1948).
[17] N. J. HAWKINS, H. C. MATTRAW and W. W. SABOL, « J. Chem. Phys. », *23*, 2192 (1955).
[18] T. SHIMANOUCHI, « J. Chem. Phys. », *17*, 245 (1949); *17*, 734 (1949); *17*, 848 (1949).
[19] Vedi per esempio: D. E. MANN, T. SHIMANOUCHI, J. H. MEAL and L. FANO, « J. Chem. Phys. », *27*, 43 (1957).

Chimica fisica. — *Osservazioni sul calcolo delle frequenze di oscillazione di molecole* MeX_6 *a simmetria ottaedrica*(*). Nota di ORIANO SALVETTI, presentata (**) dal Socio G. B. BONINO.

L'interpretazione degli spettri ultrarossi e Raman di molecole ed ioni complessi del tipo $[MeX_6]$ a simmetria ottaedrica (gruppo O_h) ha occupato già da tempo Autori diversi i quali hanno sviluppato alcune approssimazioni per giungere dall'esame degli spettri alla valutazione delle costanti di forza sia di « valenza » che di « deformazione ». La necessità che si è presentata in questo Centro Studi di approfondire in modo più dettagliato l'esame degli spettri Raman ed ultrarossi dei cianuri complessi appunto del tipo generale MeX_6 ci ha portati ad una indagine su queste precedenti ricerche.

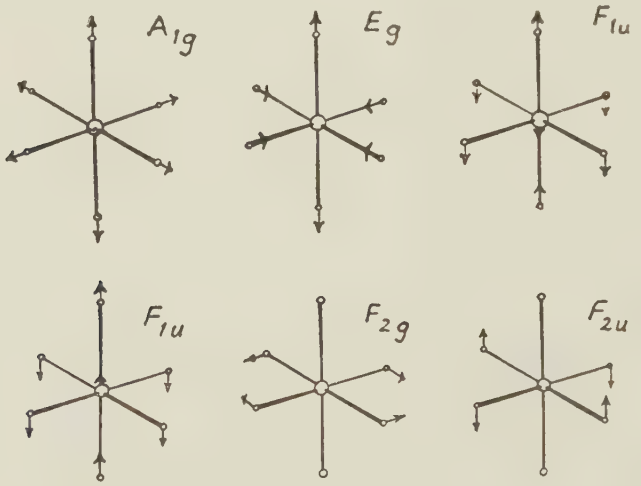


Fig. 1.

Effettivamente i vari Autori hanno trattato il caso delle oscillazioni di molecole del tipo MeX_6 a simmetria ottaedrica considerando (salvo in un caso riferito da H. Murata e K. Kawai [1], però per gli esacarbonili) il gruppo X come costituito da una unica massa mentre nel caso dei cianuri complessi ci si deve raffigurare il gruppo X come costituito da due masse $-C\equiv N$ allineate (nella molecola allo stato di riposo) sulle rette congiungenti il centro ai vertici dell'ottaedro.

(*) Lavoro eseguito nel Centro Studi di Chimica fisica del Consiglio Nazionale delle Ricerche presso l'Istituto Chimico « G. Ciamician » dell'Università di Bologna diretto dal prof. G. B. Bonino.

(**) Nella seduta dell'8 novembre 1958.

Onde valutare con più esattezza questo particolare, nel caso dei cianuri complessi ho ripreso in considerazione la trattazione teorica svolta da K. Venkateswarlu e S. Sundaran [2] sulla base del così detto metodo delle matrici F—G di Wilson [3].

Ma un esame della citata pubblicazione dei due Autori indiani (che considerano ancora i gruppi X come costituiti da una sola massa) mi ha lasciate alcune perplessità. Per esempio nella matrice G_{11} (di tipo A_{1g}) e corrispondente dunque alla oscillazione totalmente simmetrica dell'ottaedro e nella equazione secolare conseguente, figura (nelle formule date dagli Autori indiani) la massa dell'atomo centrale della struttura ottaedrica; così anche per le stesse grandezze che si riferiscono alla oscillazione di tipo E_g.

Ma si può qui osservare che, in base alle caratteristiche di simmetria delle due oscillazioni il valore della massa dell'atomo centrale dell'ottaedro, viene automaticamente escluso dalle formule, come già avevano esplicitamente indicato D. F. Heath e J. W. Linnett [4].

Nella figura seguente riproduco per comodità del lettore gli schemi delle oscillazioni della molecola MeX_6 ottaedrica, come sono date da questi ultimi Autori.

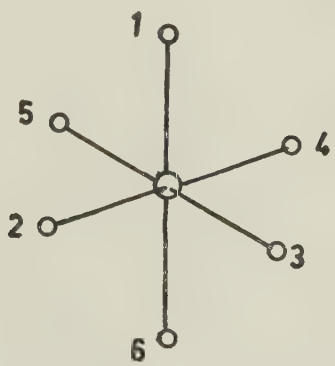


Fig. 2.

Per giungere al risultato che compare nelle formule pubblicate dai due Autori indiani citati si dovrebbe calcolare la G_{11} come se si trattasse delle oscillazioni di una molecola biatomica Me—X, ma ciò sarebbe in contraddizione con la forma della coordinata di simmetria che compete alla oscillazione A_{1g} nel caso della molecola ottaedrica MeX_6.

Anche l'espressione della coordinata di simmetria data dai due Autori per una delle oscillazioni di tipo F_{1u} può lasciare qualche incertezza.

Queste considerazioni mi hanno indotto a riprendere, sulla base del metodo di Wilson, il calcolo delle oscillazioni in molecole MeX_6, con X unica massa, prima di procedere all'estensione sovra ricordata al caso dei cianuri complessi.

Sia le matrici G che le F dipendono come si sa dall'insieme di coordinate di simmetria scelte per la descrizione degli stati di oscillazione. Tali

coordinate vengono costruite come combinazioni lineari di coordinate interne valutate come spostamenti dall'equilibrio delle distanze e degli angoli dei legami, indicati rispettivamente con Δr_i e $\Delta\alpha_{ji}$.

Assumendo per le 6 masse X legate all'atomo centrale dell'ottaedro la numerazione indicata nella figura 2, tenendo conto della tabella dei caratteri delle varie rappresentazioni irriducibili del gruppo di simmetria O_h che compete alla molecola isolata in questione (ved. per esempio Bonino e Salvetti [5]) si ottengono le seguenti coordinate di simmetria.

$$A_{1g} \qquad R_1 = 6^{-1/2}(\Delta r_1 + \Delta r_2 + \Delta r_3 + \Delta r_4 + \Delta r_5 + \Delta r_6)$$

$$E_g \begin{cases} R_{2a} = 2^{-1}(\Delta r_2 - \Delta r_3 + \Delta r_4 - \Delta r_5) \\ R_{2b} = 12^{-1/2}(2\Delta r_1 - \Delta r_2 - \Delta r_3 - \Delta r_4 - \Delta r_5 + 2\Delta r_6) \end{cases}$$

$$F_{1u} \begin{cases} R_{3x} = 2^{-1/2}(\Delta r_2 - \Delta r_4) \\ R_{3y} = 2^{-1/2}(\Delta r_3 - \Delta r_5) \\ R_{3z} = 2^{-1/2}(\Delta r_1 - \Delta r_6) \\ R_{4x} = 8^{-1/2}(\Delta\alpha_{12} + \Delta\alpha_{23} + \Delta\alpha_{25} + \Delta\alpha_{26} - \Delta\alpha_{14} - \Delta\alpha_{34} - \Delta\alpha_{45} - \Delta\alpha_{46}) \\ R_{4y} = 8^{-1/2}(\Delta\alpha_{13} + \Delta\alpha_{23} + \Delta\alpha_{36} + \Delta\alpha_{34} - \Delta\alpha_{15} - \Delta\alpha_{45} - \Delta\alpha_{56} - \Delta\alpha_{25}) \\ R_{4z} = 8^{-1/2}(\Delta\alpha_{12} + \Delta\alpha_{13} + \Delta\alpha_{14} + \Delta\alpha_{15} - \Delta\alpha_{26} - \Delta\alpha_{36} - \Delta\alpha_{46} - \Delta\alpha_{56}) \end{cases}$$

$$F_{2g} \begin{cases} R_{5a} = 2^{-1}(\Delta\alpha_{12} - \Delta\alpha_{26} + \Delta\alpha_{46} - \Delta\alpha_{14}) \\ R_{5b} = 2^{-1}(\Delta\alpha_{13} - \Delta\alpha_{36} + \Delta\alpha_{56} - \Delta\alpha_{15}) \\ R_{5c} = 2^{-1}(\Delta\alpha_{23} - \Delta\alpha_{34} + \Delta\alpha_{45} - \Delta\alpha_{25}) \end{cases}$$

$$F_{2u} \begin{cases} R_{6a} = 8^{-1/2}(\Delta\alpha_{12} - \Delta\alpha_{23} + \Delta\alpha_{26} - \Delta\alpha_{25} + \Delta\alpha_{45} - \Delta\alpha_{14} + \Delta\alpha_{34} - \Delta\alpha_{46}) \\ R_{6b} = 8^{-1/2}(\Delta\alpha_{23} - \Delta\alpha_{13} + \Delta\alpha_{34} - \Delta\alpha_{36} + \Delta\alpha_{56} - \Delta\alpha_{25} + \Delta\alpha_{15} - \Delta\alpha_{45}) \\ R_{6c} = 8^{-1/2}(\Delta\alpha_{12} - \Delta\alpha_{13} + \Delta\alpha_{14} - \Delta\alpha_{15} + \Delta\alpha_{56} - \Delta\alpha_{26} + \Delta\alpha_{36} - \Delta\alpha_{46}) \end{cases}$$

Da queste coordinate si risale immediatamente agli elementi di matrice G_{ij}. Il risultato da me ottenuto è riportato, per ciascun tipo di oscillazione, nella Tabella I, nella quale sono date nella prima colonna le indicazioni delle caratteristiche di simmetria della oscillazione, nella seconda colonna gli elementi della matrice G come risultano dal nostro calcolo, e nella terza colonna gli stessi elementi di matrice forniti dagli Autori indiani [2] nella loro pubblicazione.

Per pervenire alle relazioni fra le costanti di forza e le frequenze fondamentali è necessario discutere la forma della energia potenziale ed il passaggio dalla sua espressione in coordinate interne a quella in coordinate di simmetria.

Detto (R) il complesso verticale formato dalle 15 coordinate di simmetria (quindi (R)' l'analogo complesso orizzontale) l'energia potenziale assume la forma:

$$(1) \qquad 2V = (R)'(F)(R)$$

dove (F) è la matrice delle costanti di forza che agiscono sulle coordinate di simmetria, fattorizzata quindi secondo i vari tipi di oscillazione. Se indichiamo con (s) il complesso verticale formato dalle 18 coordinate interne da noi considerate, e con $(\mathcal{F})$ la matrice delle costanti di forza relative alle coordinate interne, possiamo analogamente scrivere:

$$2\,V = (s)'\,(\mathcal{F})\,(s)\,. \tag{2}$$

TABELLA I.

Elementi di matrice G_{ij} *in complessi del tipo* MeX_6.

Tipo di oscillazione	Elementi di matrice G_{ij} secondo l'attuale calcolo	Elementi di matrice G_{ij} secondo il calcolo di Venkatesvarlu e Sundaran
A_{1g}	$G_{11} = \mu_x$	$G_{11} = \mu_o + \mu_x$
E_g	$G_{22} = \mu_x$	$G_{22} = \mu_o + \mu_x$
F_{1u}	$G_{33} = 2\,\mu_o + \mu_x$ $G_{34} = 4\,\varepsilon\mu_o$ $G_{44} = 8\,\varepsilon^2\,\mu_o + 2\,\varepsilon^2\,\mu_x$	$G_{33} = \mu_o + \mu_x$ $G_{34} = -\sqrt{2}\,\varepsilon\mu_o$ $G_{44} = 2\,\varepsilon^2\,(\mu_o + \mu_x)$
F_{2g}	$G_{55} = 4\,\varepsilon^2\,\mu_x$	$G_{55} = 2\,\varepsilon^2\,\mu_x$
F_{2u}	$G_{66} = 2\,\varepsilon^2\,\mu_x$	G_{66} non calcolato

μ_o e μ_x sono rispettivamente l'inverso della massa dell'atomo centrale Me e dei coordinati X; ε è l'inverso della distanza di equilibrio Me—X.

Tenendo conto della simmetria del complesso, la (2), scritta per esteso, è

$$\begin{aligned} 2\,V = {} & K_r\,\Sigma\Delta r_i^2 + d^2\,K_\alpha\,\Sigma\,(\Delta\alpha_{ij})^2 + 2\,K_{rr}\,(\Delta r_1\,\Delta r_2 + \cdots) + \\ & + 2\,K'_{rr}\,(\Delta r_1\,\Delta r_6 + \cdots) + 2\,d^2\,K_{\alpha\alpha}\,(\Delta\alpha_{12}\,\Delta\alpha_{26} + \cdots) + \\ & + 2\,d^2\,K'_{\alpha\alpha}\,(\Delta\alpha_{12}\,\Delta\alpha_{46} + \cdots) + 2\,d^2\,K''_{\alpha\alpha}\,(\Delta\alpha_{12}\,\Delta\alpha_{13} + \cdots) + \\ & + 2\,d^2\,K'''_{\alpha\alpha}\,(\Delta\alpha_{12}\,\Delta\alpha_{34} + \cdots) + 2\,d\,K_{r\alpha}\,(\Delta r_1\,\Delta\alpha_{12} + \cdots) + \\ & + 2\,d\,K'_{r\alpha}\,(\Delta r_1\,\Delta\alpha_{26} + \cdots) \end{aligned}$$

dove $d = 1/\varepsilon$ indica la distanza Me—X all'equilibrio.

Se chiamiamo (B) la matrice a 15 righe e 18 colonne mediante la quale si passa dalle coordinate interne a quelle di simmetria, e teniamo conto delle relazioni di primo ordine fra i 12 spostamenti angolari $\Delta\alpha_{ij}$, possiamo scrivere:

$$(R) = (B)\,(s) \quad , \quad (s) = (B)'\,(R)\,. \tag{3}$$

Sostituendo la (3) nella (2) si ottiene:

$$2\,V = (s)'\,(\mathcal{F})\,(s) = (R)'\,(B)\,(\mathcal{F})\,(B)'\,(R) = (R)'\,[(B)\,(\mathcal{F})\,(B)']\,(R)\,. \tag{4}$$

Confrontando la (4) con la (1) si ha:

$$(F) = (B)\,(\mathfrak{F})\,(B)' \,. \tag{5}$$

La (5) dà le relazioni cercate fra le costanti di forza relative alle coordinate interne e gli elementi della matrice F di Wilson [2].

Sviluppando i calcoli si ottiene:

$$(6)\quad \begin{cases} \text{per il tipo} & A_{1g} & F_{11} = K_1 = K_r + 4K_{rr} + K'_{rr} \\ \text{»} \quad \text{»} & E_g & F_{22} = K_2 = K_r - 2K_{rr} + K'_{rr} \\ \text{»} \quad \text{»} & F_{1u} & \begin{cases} F_{33} = K_3 = K_r - K'_{rr} \\ F_{34} = d\,K_{34} = 2d\,(K_{r\alpha} - K'_{r\alpha}) \\ F_{44} = d^2 K_4 = d^2 (K_\alpha - K'_{\alpha\alpha} + 2\,K''_{\alpha\alpha} - 2\,K'''_{\alpha\alpha}) \end{cases} \\ \text{»} \quad \text{»} & F_{2g} & F_{55} = d^2 K_5 = d^2 (K_\alpha - 2K_{\alpha\alpha} + K'_{\alpha\alpha}) \\ \text{»} \quad \text{»} & F_{2u} & F_{66} = d^2 K_6 = d^2 (K_\alpha - K'_{\alpha\alpha} - 2K''_{\alpha\alpha} + 2K'''_{\alpha\alpha}) \,. \end{cases}$$

Posto $\lambda = 4\pi^2 c^2 \sigma^2$ (σ in cm^{-1}) si ottengono in fine le equazioni:

$$(7)\quad \begin{cases} \text{per il tipo} & A_{1g} & K_1 \mu_x = \lambda_1 \\ \text{»} \quad \text{»} & E_g & K_2 \mu_x = \lambda_2 \\ \text{»} \quad \text{»} & F_{1u} & \begin{cases} K_3 (2\mu_o + \mu_x) + 2K_4 (4\mu_o + \mu_x) - 8\mu_o K_{34} = \lambda_3 + \lambda_4 \\ 2(2\mu_o + \mu_x)(4\mu_o + \mu_x)(K_3 K_4 - K_{34}^2) = \lambda_3 \lambda_4 \end{cases} \\ \text{»} \quad \text{»} & F_{2g} & 4\mu_x K_5 = \lambda_5 \\ \text{»} \quad \text{»} & F_{2u} & 2\mu_x K_6 = \lambda_6 . \end{cases}$$

Le costanti di forza introdotte formalmente nella (2) e nella (6) sono in numero superiore alle frequenze; alcune sono certamente legate fra loro; comunque, anche introducendo le relazioni che le legano, ne rimangono, nella forma quadratica più generale del potenziale, in numero ancora superiore alle frequenze fondamentali. Per ovviare questo inconveniente alcuni Autori pongono uguali a zero un certo numero di costanti di accoppiamento lasciandone indeterminate un numero inferiore o uguale alle frequenze fondamentali note, altri impostano un calcolo unitario delle costanti a partire da una forma meno generale del potenziale. Fra questi ultimi molto favore ha incontrato il metodo di Urey e Bradley [6] il quale consiste nel considerare il campo che agisce sulla molecola o ione complesso come una combinazione di quello delle forze di valenza con quello detto delle forze centrali. A quest'ultimo tipo appartiene il calcolo di Heath e Linnett già citato [4]. L'approssimazione di Venkateswarlu e Sundaran consiste invece nel prendere

$$K'_{rr} = K'_{\alpha\alpha} = K''_{\alpha\alpha} = K'''_{\alpha\alpha} = K'_{r\alpha} = 0 \tag{8}$$

calcolando le 5 rimanenti costanti a partire dalle 5 frequenze attive in ultrarosso o Raman.

Allo scopo di verificare l'effettiva influenza numerica sui valori delle costanti di forza della diversa valutazione delle matrici G, ho ripetuto i calcoli per SF_6, confrontando i valori da me ottenuti con quelli calcolati da Venkateswarlu e Sundaran e con gli analoghi che si possono dedurre dal calcolo di Heath e Linnett. Il potenziale è stato approssimato nello stesso modo dei due Autori indiani. I risultati sono riportati nella successiva Tabella II.

TABELLA II.

Costanti di forza nell'SF_6 *in* 10^5 dine/cm.

Costanti di forza calcolate	Valori ottenuti con le attuali formule	Valori ottenuti da Venkateswarlu e Sundaran	Valori dedotti dai calcoli di Heat e Linnett
K_r	5,34	3,3624	5,27
K_{rr}	0,33	0,2167	0,38
K_α	0,57	3,0450 3,7695	0,83
$K_{\alpha\alpha}$	— 0,10	0,1398 1,1120	non confrontabile
$K_{r\alpha}$	0,09	0,7500 1,1122	» »

Dal valore della costante K_α sopra calcolato si può risalire, mediante la (7) e tenuto conto delle approssimazioni di Venkateswarlu (8), al valore della ν_6 di tipo F_{2u}. Prendendo $K_\alpha = 0{,}57$ si ottiene $\nu_6 = 320$ cm^{-1}, mentre partendo dal minore dei due valori dati da Venkateswarlu e Sundaran si ottiene $\nu_6 = 738$ cm^{-1}. Il valore sperimentale della ν_6, ricavato (sempre per SF_6) dalle frequenze di combinazione e dai dati sui calori specifici ([6] e [4]) viene apprezzato in 360 cm^{-1}, con un errore di circa 20 cm^{-1}. Risulta pertanto evidente che, pur partendo dalle approssimazioni sul potenziale di Venkateswarlu e Sundaran, si ottiene, attraverso le presenti formule, un valore in migliore accordo con l'esperienza mentre il valore di K_α dato dai citati Autori conduce ad un risultato in completo disaccordo con l'esperienza.

Come si vede le differenze numeriche sono tutt'altro che trascurabili e sono tali da portare conseguenze nell'analisi degli spettri.

In un lavoro di prossima pubblicazione svilupperò il calcolo generale fermandomi in particolare a discutere la forma che assume la funzione potenziale nel caso speciale degli esacianuri complessi ottaedrici. Saggerò quindi

le varie approssimazioni, ivi compresa anche quella adottata dagli Autori giapponesi citati [1] (per lo studio degli esacarbonili). I risultati verranno applicati in concreto allo studio degli spettri Raman ed ultrarossi del ferrocianuro, del ruteniocianuro e dell'osmiocianuro di potassio rilevati sperimentalmente in questo Centro Studi e pubblicati in precedenti lavori.

Ringrazio il prof. G. B. Bonino per i consigli datimi durante la presente ricerca.

Bibliografia.

[1] H. Murata e K. Kawai, « J. Chem. Phys. », *27*, 605 (1957).
[2] K. Venkateswarlu e S. Sundaran, « Z. physik. Chem. », *9*, 174 (1956).
[3] E. Brigt Wilson, Jr., « J. Chem. Phys. », *7*, 1047 (1939); *9*, 76 (1940).
[4] D. F. Heath e J. W. Linnett, « Trans. Far. Soc. », *45*, 264 (1949).
[5] G. B. Bonino e O. Salvetti, « Rend. Acc. Lincei », XX, 150 (1956); « La Ricerca Scientifica », 26°, *12*, 3627 (1956).
[6] Bartholomè e Sachse, « Z. physik. Chem. », B. *28*, 257 (1935).

Chimica. — *Spettro ultrarosso del Wolframio-ottocianuro di potassio allo stato cristallino e in soluzione acquosa* (*). Nota di Gianfranco Fabbri e Franco Cappellina, presentata (**) dal Socio G. B. Bonino.

Riferiamo in questa Nota i risultati di ricerche sullo spettro ultrarosso del Wolframio-ottocianuro di potassio biidrato. È nota dalla letteratura la stretta analogia chimica e chimico-fisica delle proprietà fra il sale in discussione ed il corrispondente complesso del molibdeno [1, 2, 3, 4], di cui è già stato pubblicato e discusso lo spettro ultrarosso in precedenti lavori di Bonino e coll. [5, 6].

Preparazione del sale. – Il Wolframio-ottocianuro di potassio è stato preparato seguendo il metodo di O. Olsson [7] modificato da Barbieri e Fiano [8] e purificato per ripetute cristallizzazioni. L'analisi ha confermato che il prodotto corrisponde alla formula $K_4[W(CN)_8] \cdot 2\,H_2O$. Esso si presenta sotto forma di cristalli di colore giallo scuro, stabili all'aria e non igroscopici, conformemente a quanto descritto nella letteratura.

Il contenuto di due molecole d'acqua per ogni molecola di complesso nel cristallo è stato confermato da nostre misure termogravimetriche eseguite con una termobilancia di Chevenard.

Il comportamento dei due sali al riscaldamento è stato esaminato nell'intervallo di temperature fra 20 e 300° C, ed una velocità di riscaldamento di 150° l'ora.

L'analisi delle curve termogravimetriche mostra che fino alla temperatura di 300° C non si ha decomposizione per riscaldamento all'aria. Fra 90° e 120–130° C si osserva una diminuzione in peso corrispondente alla perdita di 2 molecole di acqua per molecola di sale, in piena conferma con i risultati ottenuti per altra via [3, 7].

Spettri ultrarossi. – In precedenti lavori [5] [6] è stato esaminato e discusso lo spettro ultrarosso del molibdenoottocianuro di potassio biidrato.

È stato osservato che lo spettro di questo complesso allo stato cristallino risulta costituito da 6 assorbimenti intensi, più o meno risolti, attribuibili tutti ad oscillazioni fondamentali dello ione $[Mo(CN)_8]^{4-}$ e dell'acqua di cristallizzazione. In particolare furono osservate due bande a 3600 cm^{-1} e a 1621 cm^{-1} corrispondenti rispettivamente alle oscillazioni di valenza e di deformazione dell'acqua di cristallizzazione, una banda a 2100 cm^{-1} (costituita da 6 componenti) riferibile alle oscillazioni di valenza CN, una banda a 622 cm^{-1} attribuibile ad una oscillazione di valenza dei legami Mo—C, un

(*) Lavoro eseguito presso il Centro Studi di Chimica Fisica del C.N.R. nell'Istituto Chimico «G. Ciamician» dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta dell'8 novembre 1958.

largo assorbimento con massimo a 493 cm^{-1}, sovrapposizione di varie bande riferibili ad oscillazioni di valenza Mo—C e di deformazione C≡N; infine una banda a 407 cm^{-1} corrispondente ad una oscillazione di deformazione del legame C≡N.

La registrazione dello spettro del Wolframio-ottocianuro di potassio è stata eseguita su composto cristallino finemente polverizzato ed impastato con olio di vasellina e perclorobutadiene, ed in soluzione acquosa, usando uno spettrografo Beckman IR2 con ottica in LiF, NaCl e KBr.

TABELLA I.

$K_4[Mo(CN)_8]\cdot 2H_2O$		$K_4[W(CN)_8]\cdot 2H_2O$		
ν (cm^{-1})	I	ν (cm^{-1})	I	
3601	*f*	3596	*f*	ν O—H
3528	*f*	3527	*f*	ν O—H
2642	*dd*	2667	*dd*	
2615				
(2508)				
(2689)				
2470	*dd*	2475	*dd*	
		2538	*dd*	
(2135)		(2140)		ν C≡N
2126	*ff*	2131	*ff*	ν C≡N
2121	*ff*	2126	*ff*	ν C≡N
2103	*ff*	2096	*ff*	ν C≡N
(2080)		(2073)		ν C≡N
2061	*d*	2056	*d*	ν C≡N
1621	*f*	1618	*f*	δ H_2O
1113	*f*	1121	*f*	
982	*dd*			
941	*dd*	936	*dd*	
837	*dd*	822	*dd*	
723	*dd*	794	*dd*	
622	*m*	618	*m*	ν Me—C
493	*m*	488	*m*	ν Me—C e δ C≡N
407	*m*			δ C≡N

Soluzione acquosa:
$K_4[Mo(CN)_8]\cdot 2H_2O$ 2112 cm^{-1}
$K_4[W(CN)_8]\cdot 2H_2O$ 2116 cm^{-1}.

I risultati ottenuti sono schematizzati in Tabella I e fig. 1, accanto ai valori corrispondenti del molibdenoottocianuro di potassio. Un esame anche sommario di questi valori mostra la corrispondenza fra gli spettri dei due sali. In particolare la risoluzione delle bande attribuibili alle oscillazioni di valenza sia delle molecole di acqua di cristallizzazione che dei due gruppi C≡N (fig. 2) è identica nei due composti, con scarti delle frequenze dei mas-

cm⁻¹ 3600 3400 3200 3000 2800 2600 2400 2200 2000
μ 2.8 3.0 3.2 3.4 3.6 3.8 4.0 4.5 5.0
K4[Mo(CN)8]2H2O
K4[W(CN)8]2H2O
cm⁻¹ 2000 1800 1600 1400 1200 1000 800 600 400
μ 5.0 5.5 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 12.0 15.0 20.0 25.0
K4[Mo(CN)8]2H2O
K4[W(CN)8]2H2O

Fig. 1.

simi delle componenti che non eccedono i 7 cm^{-1}, superiori quindi di appena due o tre numeri d'onda all'errore sperimentale calcolato per le nostre nostre condizioni di lavoro.

Nel caso della soluzione acquosa il Wolframio–ottocianuro di potassio presenta una banda C≡N semplice, a frequenza pressoché uguale a quella del molibdenoottocianuro di potassio.

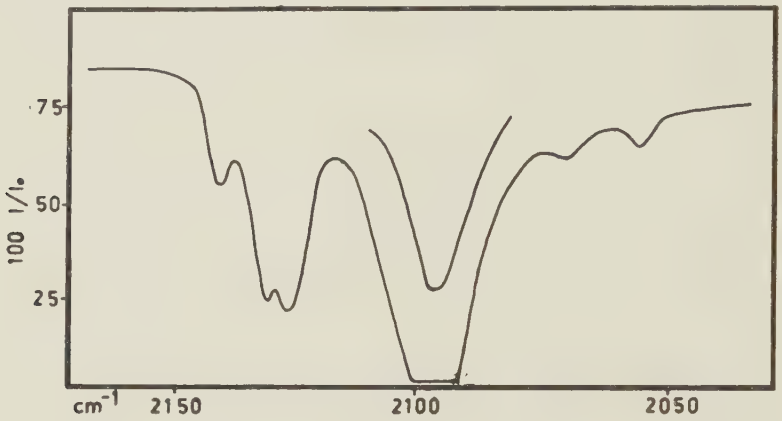


Fig. 2.

Anche la banda che corrisponde ad oscillazioni di valenza Me—C si trova nello spettro del Wolframio–ottocianuro di potassio nella stessa posizione di quella trovata per il molibdenoottocianuro di potassio. Unica differenza fra i due spettri può considerarsi l'assenza nello spettro del complesso del Wolframio della banda trovata a 407 cm^{-1} per il molibdenoottocianuro di potassio e riferibile con buona probabilità ad una oscillazione dei gruppi CN.

Probabilmente questa banda nel Wolframio–ottocianuro si trova a frequenza anche di poco inferiore e perciò non rilevabile dal nostro spettrometro essendo già la banda a 407 cm^{-1} ai limiti della sensibilità dello stesso verso le basse frequenze.

Desideriamo porgere i nostri più vivi ringraziamenti al prof. G. B. Bonino per averci proposto l'argomento di questa ricerca e per le discussioni e i consigli di cui ci è stato prodigo.

Bibliografia.

[1] Dissert. Hannover T. H. (1923).
[2] O. Collemberg, «Z. Anorg. Chem.», *136*, 246 (1924).
[3] «Z. Anorg. Chem.», *54*, 100 (1907).
[4] «Ber», *48*, 1168 (1915).
[5] G. B. Bonino, G. Fabbri, «Rend. Accad. Naz. Lincei» [VIII], *20*, 566 (1956).
[6] O. Salvetti, Comunicato all'VIII Congresso della Società Chimica Italiana, Torino (1958) (in corso di stampa).
[7] «Ber.», *47*, 917 (1914); «Z. Anorg. Chem.», *88*, 57 (1914).
[8] «Atti Acc. Sci. Istituto Bologna» [XI], *2* (1955).

Chimica biologica. — *Il comportamento della xantinossidasi del cuore e del muscolo scheletrico del colombo normale e del colombo bradicardico per inanizione assoluta o per malnutrizione orizanica* (*). Nota (**) di GAETANO LIVREA e GIUSEPPE RICCERI, presentata dal Corrisp. G. AMANTEA.

Uno di noi (Livrea), dopo aver dimostrato che la bradicardia, con o senza aritmia, da malnutrizione orizanica o calorica del colombo è funzionalmente, istochimicamente ed istopatologicamente identica alla bradicardia da inanizione assoluta, ha sostenuto che le alterazioni funzionali, istopatologiche ed istochimiche cardiache sono molto verosimilmente la conseguenza della mancata copertura dei bisogni globali del cuore in N e forse più particolarmente in N differenziato, necessario al tessuto miocardico e massimamente al sistema specifico del cuore [1–4].

A tale affermazione egli è pervenuto soprattutto sulla base della costatazione che il disordine funzionale nell'inanizione assoluta e nella malnutrizione orizanica è indipendente dall'azione delle vitamine chimicamente note e dei sali minerali, è indipendente dalle variazioni del tasso glicemico e dall'intensità delle combustioni tissulari ed è invece strettamente legato con l'abbassamento del quoziente di combustione. Precisamente il disordine funzionale del cuore da inanizione o del cosidetto cuore beriberico del colombo insorge e si accentua parallelamente all'insorgenza e all'accentuazione di quei quozienti di combustione, che sono tipicamente indicativi del prevalente impegno catabolico delle sostanze proteiche tissulari.

Dopo quanto precede e dopo aver già accertato il comportamento ponderale, dell'acqua e delle varie frazioni dell'N del cuore e di altri organi del colombo bradicardico per inanizione assoluta o malnutrizione orizanica [5–9], per continuare nello svolgimento sistematico del nostro piano di lavoro abbiamo ritenuto opportuno iniziare l'analisi dell'attività di alcuni enzimi connessi con ben definiti aspetti del metabolismo protidico e degli acidi nucleici.

In questa Nota e nelle successive esporremo appunto i risultati della misurazione dell'attività di questi enzimi e vedremo in ultimo se i dati ottenuti, insieme a quelli in merito alla qualità e alla quantità dei metaboliti intermedi presenti nel cuore e negli altri tessuti dei colombi in inanizione o in malnutrizione, permetteranno la formulazione di qualche conclusione di validità generale circa l'esistenza e il comportamento di eventuali enzimi adattativi del miocardio e circa alcuni aspetti del metabolismo protidico miocardico. Secondo noi, l'accertare se l'inanizione o la malnutrizione indu-

(*) Lavoro eseguito con un contributo del C.N.R. negli Istituti di Chimica Biologica e di Scienza dell'Alimentazione dell'Università di Messina, diretti da G. Livrea.

(**) Pervenuta all'Accademia il 7 luglio 1958.

cano o meno la formazione di aumentate quantità di determinati enzimi è uno dei primi passi obbligati per cercare di abbordare il problema maggiore delle modalità dell'usura e del rinnovamento delle proteine cardiache nell'inanizione o nella malnutrizione.

Per incominciare, riportiamo qui di seguito i risultati dello studio del comportamento della xantinossidasi (XO) del cuore e del muscolo scheletrico di colombi normali, digiunanti o in malnutrizione orizanica.

Come è noto, tale enzima ha una primaria importanza nel ciclo metabolico delle purine [10–22], cioè nel regolare le mutue trasformazioni tra nucleotidi purinici, nucleosidi e basi puriniche, catalizzando irreversibilmente la trasformazione della xantina in acido urico e catalizzando altresì la trasformazione dell'ipoxantina in xantina ed intervenendo per questa via nella sintesi della guanina. Ma non bisogna trascurare che la XO, oltre ad esplicare tali azioni principali, è capace di ossidare almeno altre 7 purine (fra cui l'adenina in 2–8–diossiadenina), 31 aldeidi (fra cui il piridossale), alcune pterine (tra cui la xantopterina) ed infine il difosfopiridinnucleotide ridotto (DPNH). Vogliamo infine ricordare che numerose ricerche dimostrano che la XO è un tipico enzima adattativo [23–34].

Materiali e metodi.

Sono stati adoperati 34 colombi adulti, di ambo i sessi, provenienti tutti da un medesimo allevamento dell'agro ed accuratamente scelti in modo da avere un materiale quanto più è possibile omogeneo per quanto riguarda il peso e l'età.

Prima di iniziare gli esperimenti, tutti gli animali sono stati tenuti in osservazione per almeno 10 giorni ad una dieta mista di grano e di mais *ad libitum*. Successivamente, 12 di essi, utilizzati come controlli, hanno continuato a ricevere la stessa dieta; 11 sono stati posti a digiuno, con acqua *ad libitum*, fino ad ottenere la perdita di peso corporeo e il grado di bradicardia desiderato, corrispondenti nel nostro caso, la prima al 23 % circa ed il secondo ad una riduzione della frequenza del 45 % circa; gli altri 11 sono stati sottoposti alla dieta di riso brillato e lavato, somministrato per imbeccamento, una o due volte al giorno, nella quantità di g. 30 *pro die* e *pro capite*, fino alla comparsa di conclamati segni nervosi del beri–beri, coincidenti nel nostro caso con una perdita di peso del 16 % circa e con una riduzione della frequenza cardiaca del 40 % circa. Al momento opportuno, i vari animali sono stati sacrificati per dissanguamento, dalle carotidi, curando che quelli di controllo e quelli a dieta orizanica fossero a digiuno da almeno 12 ore. A dissanguamento completato, si è proceduto al rapido prelievo dei frammenti necessari di cuore (parte apicale) e di muscolo scheletrico (m. pettorale superficiale). I frammenti sono stati lavati con soluzione di Ringer, asciugati accuratamente, esattamente pesati ed infine omogeneizzati per 2 minuti in micro-omogeneizzatore con 9 volumi di tampone di fosfati a pH 7,6 ghiacciato, mediante l'immersione in ghiaccio dell'apposita vaschetta.

L'attività XO degli omogenati è stata determinata con la seguente tecnica manometrica: nella cavità principale delle vaschette, ml 2 di omogenato + ml 0,2 di blu di metilene 0,0113 M; nell'appendice laterale, ml 0,5 di xantina 0,05 M in tampone + NaOH 0,1 N o, rispettivamente, di solo tampone; nel pozzetto centrale, ml 0,3 di KOH 20 %. Il substrato è stato versato nella cavità principale dopo 40 minuti di preincubazione a 38° C, secondo Axelrod ed Elvehjem [35]. Le letture del consumo di O_2 sono state eseguite ogni 10' per 1 h. In quasi tutti gli esperimenti, le determinazioni sono state eseguite in doppio.

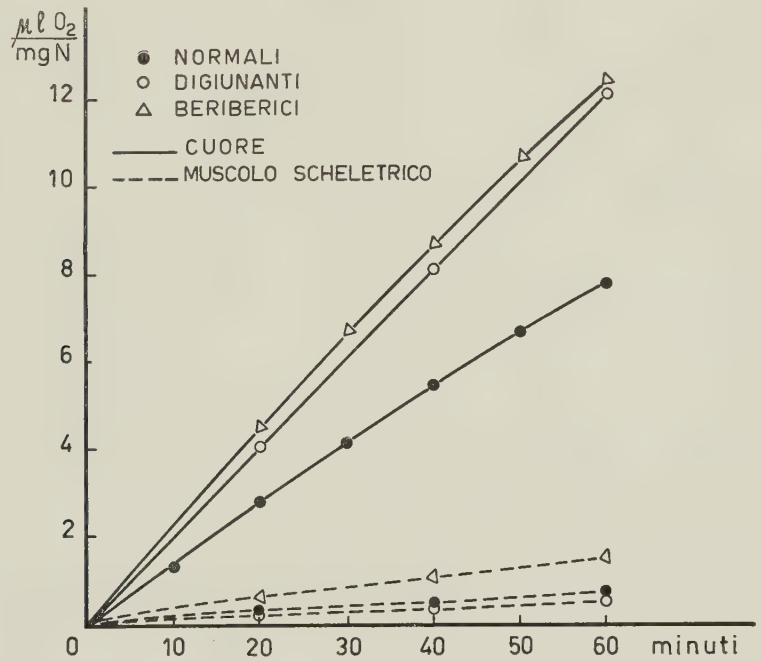


Fig. 1. – Attività xantinossidasica (μl extra O_2/mg N) del cuore e del muscolo scheletrico di colombi normali, digiunanti e beriberici.

Il contenuto in N totale è stato determinato su 2 ml dell'omogenato, mediante Kjeldahl, con l'apparecchio di Parnas–Wagner. L'attività della xantinossidasi è stata espressa come QO_2/N (cioè in μl di O_2 assorbito per mg di N dell'organo.

RISULTATI E DISCUSSIONE.

Nella tabella sono riportate le medie dei valori e l'analisi statistica dei confronti. Nella figura sono tracciate le curve dell'attività enzimatica. I risultati si possono riassumere come segue:

1° nei colombi normali, a dieta libera, l'attività xantinossidasica è più elevata nel cuore che nei muscoli scheletrici;

2° nei colombi digiunanti fino ad ottenere una perdita di peso corporeo del 23 % circa ed una riduzione della frequenza cardiaca del 45 %

Tabella I.

L'attività dell'a xantinossidasi del cuore e del muscolo scheletrico del colombo normale, digiunante o in malnutrizione orizanica. (Attività espressa come QO_2/N in 60 min.) (*).

Animali esaminati N°	I Controlli 12	II Digiunanti 11	III A dieta orizanica 11	Confronti e analisi statistica (**)								
				I e II			I e III			II e III		
Variazioni del peso corporeo °/o	—	— 22,8 ± 1,76	— 16,2 ± 2,26	differenza °/o	t	p	differenza °/o	t	p	differenza °/o	t	p
CUORE												
$\frac{\text{Azoto}}{g \text{ organo}} \cdot 100$	2,75 ± 0,0459	2,77 ± 0,099	2,88 ± 0,128	+ 0,76	0,19	non sign.	+ 4,7	1	non sign.	+ 3,9	0,6	non sign.
$\frac{QO_2}{N}$	7,73 ± 0,205	12,10 ± 0,539	12,30 ± 0,515	+ 56,5	7,7	< 0,001 sign.	+ 59,1	8,3	< 0,001 sign.	+ 1,6	0,27	non sign.
MUSCOLI SCHELETRICI												
$\frac{\text{Azoto}}{g \text{ organo}} \cdot 100$	2,98 ± 0,163	3,15 ± 0,073	3,21 ± 0,125	+ 5,7	0,90	non sign.	+ 7,7	1,1	non sign.	+ 1,9	0,42	non sign.
$\frac{QO_2}{N}$	0,84 ± 0,194	0,72 ± 0,233	1,51 ± 0,234	— 14,2	0,4	non sign.	+ 79,7	2,2	< 0,05 sign.	+ 109,7	2,46	< 0,05 sign.

(*) Tecnica di Warburg: omogenato al 10 °/o in tampone di fosfati a pH 7,6 ml 2; xantina 0,05 M (in tampone + NaOH) o tampone ml 0,5; blu di metilene 0,0113 M ml 0,2; versamento del substrato dopo 40 minuti di preincubazione a 38° C.

(**) Indice di Student $= t = \dfrac{X_A - X_B}{\sqrt{\dfrac{D_A + D_B}{g_A + g_B} \cdot \left(\dfrac{1}{N_A} + \dfrac{1}{N_B}\right)}}$

in cui X = media aritmetica dei valori
$D = \Sigma d^2$
$g = N - 1$
N = numero delle prove

circa, l'attività xantinossidasica del cuore, rispetto a quella dei controlli, è notevolmente e significativamente aumentata: precisamente l'aumento è del 56 % ed il p è $< 0{,}001$;

3° nei colombi digiunanti, l'attività xantinossidasica dei muscoli scheletrici rimane pressoché la stessa di quella dei controlli: la media dei valori degli animali digiunanti è leggermente inferiore, ma la differenza, rispetto ai controlli, non è significativa;

4° nei colombi beriberici, che per effetto della dieta orizanica hanno subìto una perdita di peso del 16 % circa ed una riduzione della frequenza cardiaca del 40 % circa, l'attività xantinossidasica è notevolmente e significativamente aumentata, rispetto ai controlli, sia nel cuore (aumento del 59 %; $p < 0{,}001$), sia nei muscoli scheletrici (aumento del 79 %; $p < 0{,}05$);

5° nei colombi digiunanti e nei colombi a dieta orizanica l'aumento della attività xantinossidasica del cuore risulta pressoché uguale: l'aumento leggermente maggiore osservato nei beriberici rispetto ai digiunanti non ha significanza statistica.

Gli anzidetti risultati si accordano con quelli di Ricceri [36] circa l'attività xantinossidasica del muscolo scheletrico del colombo normale e, confrontati con quelli ottenuti da Stirpe e De Stefano [37] per il rene del colombo normale, digiunante o beriberico, dimostrano che l'attività xantinossidasica del cuore è sempre inferiore a quella del rene.

Allo stato dei fatti e tenuto anche conto del comportamento dell'azoto non proteico del cuore dei colombi digiunanti e beriberici descritto precedentemente da uno di noi (Livrea e coll.) [8–9], è difficile precisare il significato dell'aumento dell'attività xantinossidasica.

Con ulteriori, adatte ricerche, soprattutto in merito alla qualità e alla quantità dei metaboliti intermedi presenti nel cuore e passibili dell'azione xantinossidasica, speriamo di poter precisare se l'aumento dell'attività è espressione di un'esaltazione *a*) del ciclo catabolico purinico, *b*) o del ciclo d'interconversione fra le purine, *c*) o dell'ossidazione di metaboliti diversi dalle purine, ma passibili dell'azione ossidativa della XO, *d*) o di un meccanismo tendente a compensare la rallentata sintesi degli acidi nucleici propria degli stati d'inanizione.

BIBLIOGRAFIA.

[1] LIVREA G., « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *15*, 453 (1953).
[2] LIVREA G. e CRAXÌ P., « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *16*, 508 (1954).
[3] LIVREA G., « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *16*, 763 (1954).
[4] LIVREA G., « Biologica Latina », *10*, 794 (1957).
[5] LIVREA G., « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *24*, 577 (1958).
[6] LIVREA G. e DE STEFANO F., « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *24*, 579 (1958).
[7] LIVREA G. e DE STEFANO F., « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *24*, 749 (1958).
[8] LIVREA G. e DE STEFANO F., « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *25*, fasc. 1–2 (1958).
[9] LIVREA G. e DE STEFANO F., « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *25*, fasc. 3–4 (1958).

[10] Bergel F. e coll., in Wolstenholme G. E. W. a. O' Connor C. M., *The Chemistry and Biology of Purines*. A Ciba Foundation Symposium, J. e A. Churchill ed., London, 1954.
[11] Abrams R. e Bentley M., « Arch. Biochem. a. Biophys. », *56*, 184 (1955); *58*, 109; (1955) « J. Am. Chem. Soc. », *77*, 4179 (1955).
[12] Feigelson P. e Davidson J. D., « Cancer Research », *16*, 352 (1956).
[13] Dixon M. e Thurlow S., « Biochem. J. », *18*, 971, 976, 989 (1924).
[14] Singer T. P. e Kearney E. B., in Neurath H. a. Bailey K., *The proteins*, II-A, Acad. Press Inc., New York, 1954.
[15] Booth V. H., « Biochem. J. », *32*, 494 (1938).
[16] Coombs H. I., « Biochem. J. », *21*, 1259 (1927).
[17] Harrison D. C., « Biochem. J. », *23*, 982 (1929).
[18] Klenow H., « Biochem. J. », *50*, 404 (1952).
[19] Hofstee B. H. J., « J. Biol. Chem. », *179*, 633 (1949).
[20] Schwartz R. e Kjeldgaard N. O., « Biochem. J. », *48*, 333 (1951).
[21] Ball E. G., « J. Biol. Chem. », *128*, 51 (1939).
[22] Green D. E., « Biochem. J. », *28*, 1550 (1934).
[23] Litwack G. e coll., « J. Biol. Chem. », *201*, 261 (1953).
[24] Litwack G. e coll., ibidem, *187*, 605 (1950).
[25] Litwack G. e coll., « J. Nutrition », *47*, 299 (1952).
[26] Litwack G. e coll., ibidem, *49*, 579 (1953).
[27] Williams J. N. jr. e coll., « J. Biol. Chem. », *202*, 607 (1953).
[28] Dinning J. S., « J. Biol. Chem. », *202*, 213 (1953).
[29] Keith C. K. e coll., « J. Biol. Chem. », *176*, 1095 (1948).
[30] Ricceri G., « Boll. Soc. Ital. Biol. Sper. », *32*, 1515 (1956).
[31] Villela G. G. e coll., « Nature », *175*, 1087 (1955).
[32] O'Dell B. L. e coll., « Arch. Biochem. a. Biophys. », *54*, 232 (1955).
[33] Roth J. S. e coll., « Arch. Biochem. a. Biophys. », *44*, 95 (1953).
[34] Bauer D. J. e coll., « Nature », *161*, 852 (1948).
[35] Axelrod A. E. e Elvehjem C. A., « J. Biol. Chem. », *140*, 725 (1941).
[36] Ricceri G., « Boll. Soc. Ital. Biol. Sper. », *28*, 29 (1952); « Arch. Sci. Biol. », *37*, 611 (1953).
[37] Stirpe F. e De Stefano F., « Lo Sperimentale », *107*, 471 (1957).

Fisiologia vegetale. — *Aumento del glutatione ridotto in segmenti di internodio di pisello trattati con acido gibberellico* (*). Nota di Erasmo Marrè e Oreste Arrigoni, presentata (**) dal Socio S. Tonzig.

In precedenti lavori abbiamo rilevato come il trattamento con auxina a concentrazioni stimolanti la crescita induca, nei tessuti di parti isolate di piante superiori, alcune ben definite reazioni metaboliche; tra cui particolarmente evidente e riproducibile quella di uno spostamento del rapporto glutatione ridotto/glutatione ossidato (GSH/GS–SG) a favore della forma ridotta [1, 2, 3, 4]. D'altra parte un aumento di questo rapporto non sembra strettamente caratteristico della crescita in quanto stimolata da sostanze di tipo auxinico: infatti esso compare pure quando lo stimolo di questa funzione si ottiene semplicemente per maggiore aereazione dei tessuti [1]. Poiché la scoperta delle gibberelline, come gruppo di ormoni di crescita chiaramente distinto da quello delle auxine, è venuto recentemente a fornire un nuovo strumento di indagine sul meccanismo del controllo correlativo dell'accrescimento e della differenziazione, abbiamo ritenuto utile l'eseguire alcune esperienze per appurare se anche nel caso della stimolazione con gibberellina la risposta della crescita fosse accompagnata da un aumento del tenore di glutatione ridotto. I risultati di queste esperienze vengono riferiti nella presente Nota.

Materiali e metodi.

Il materiale è stato fornito dalla parte apicale del terzo internodio di piantine di pisello (*Pisum sativum*, varietà Nano di Ingegnoli) coltivate per 8 giorni in camera termoregolata a 25° C, all'oscurità. Di ogni internodio è stato utilizzato soltanto un segmento apicale lungo 4 mm, che da ricerche orientative, e in accordo con i dati di altri Autori [5, 6,] è risultato come la parte più sensibile, per quanto riguarda la reazione di crescita, alla gibberellina. I segmenti, subito dopo recisi, venivano portati per 1 ora in acqua distillata, quindi trasferiti in gruppi di 50 in capsule di Petri contenenti tampone ai fosfati 0,02 M, pH 6,2, saccarosio 2 % e, nei saggi, acido gibberellico (Merk) a concentrazione di 10^{-5}; e ivi incubati per 3 ore a 25° C, all'oscuro. Al termine del periodo di incubazione una parte dei segmenti veniva immediatamente triturata in mortaio in presenza di acido solfosalicilico 2 % (concentrazione finale) e l'estratto ottenuto utilizzato per la determinazione del glutatione; su altri segmenti veniva parallelamente misurata la crescita.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano, Centro di studi del C.N.R. per le ossidoriduzioni nei vegetali.

(**) Nella seduta dell'8 novembre 1958.

La determinazione del glutatione ridotto è stata eseguita, come in precedenti ricerche, mediante il metodo amperometrico descritto Koltoff e Stricks [1]. La crescita è stata misurata come allungamento per cento dall'iniziale, su lotti di almeno 10 segmenti, in duplicato o in triplicato.

TABELLA I.

Azione dell'acido gibberellico sulla crescita di segmenti di internodio di pisello.

N. d'ordine dell'esperienza	Crescita, come aumento percentuale della lunghezza iniziale		Stimolazione da acido gibberellico
	Controlli	Acido gibberellico	
1	6,5	8,8	35 %
2	7	9	29 %
3	9	11,9	32 %
4	9	10,1	12 %
5	8,5	11	29 %
6	10,1	11,7	16 %
7	9,3	11,4	23 %
Media . . .	8,4	10,5	25 %

ESPERIENZE E RISULTATI.

Riportiamo nella Tabella I i risultati relativi all'azione del trattamento con acido gibberellico sulla crescita. Da tale tabella si rileva come l'ormone induca un costante effetto di stimolo su questo processo anche se tale effetto è molto più limitato di quello indotto, nelle stesse condizioni, dall'acido indolacetico. Questo risultato è nettamente inferiore a quello riportato recentemente da Purvis e Hillmann [6] che hanno rilevato incrementi di circa il 50 % rispetto la crescita dei controlli. D'altra parte l'acido gibberellico da noi usato è apparso pienamente attivo quando usato su piantine integre sia di pisello che di fagiolo: sembra quindi che la divergenza fra i nostri risultati e quelli dell'autore citato debba imputarsi a condizioni intrinseche al materiale, e difficilmente individuabili.

Nella Tabella II vengono riferiti i risultati delle determinazioni del tenore in glutatione ridotto nei segmenti trattati o meno con gibberellina, per un periodo di tre ore, per 7 esperienze condotte ognuno in duplicato e su lotti di almeno 30 segmenti in 7 giorni diversi, utilizzando quindi materiali provenienti da culture diverse. Come risulta dalla tabella, nei segmenti trattati con gibberellina il glutatione ridotto aumenta, anche se in misura molto modesta, ma pure costante in tutte le esperienze e statisticamente altamente significativa.

Tabella II.

Azione dell'acido gibberellico sul tenore in glutatione ridotto in segmenti di internodio di pisello.

N. d'ordine dell'esperienza	Contenuto in glutatione ridotto micromoli/gm peso fresco iniziale		Variazione percentuale indotta dall'ac. gibberellico
	controlli	ac. gibberellico	
1	0,72	0,75	+ 4,1
2	0,73	0,79	+ 8,2
3	0,79	0,85	+ 7,6
4	0,79	0,83	+ 5
5	0,73	0,81	+ 11
6	0,73	0,79	+ 8,2
7	0,73	0,78	+ 6,8
Media	0,745	0,80	+ 7,2 ± 2,1 (Deviazione standard)

Conclusioni.

I risultati delle esperienze sopra riferite dimostrano che la stimolazione della crescita ad opera della gibberellina è accompagnata da un aumento del tenore in glutatione ridotto. Tale aumento è in realtà molto limitato, e nettamente inferiore a quello osservabile nel caso del trattamento con auxina; ma, d'altro lato, anche lo stimolo della crescita da gibberellina è apparso, nelle nostre esperienze, modestissimo, in confronto a quello normalmente indotto dall'acido indolacetico.

Le possibilità di interpretazione di questa osservazione sono molteplici.

Se si ammette, con diversi Autori [8], che l'azione della gibberellina sia mediata dalla sua capacità di stimolare la sintesi di sostanze auxino – simili nei tessuti, allora l'aumento del glutatione ridotto potrebbe interpretarsi come diretta conseguenza di questa sintesi di auxina. Se invece si accetta l'idea che i due meccanismi di azione della gibberellina e della auxina siano, almeno, nelle loro prime fasi, del tutto distinti, i dati presenti acquisterebbero un significato di particolare interesse, in quanto suggerirebbero che le linee di azione dei due tipi di ormoni si incontrino e si fondano a livello di un sistema metabolico cui il metabolismo del glutatione è strettamente connesso.

Ulteriori ricerche sono quindi necessarie per una più valida discussione del significato dell'aumento del glutatione nel caso del trattamento con gibberellina: anche se fin d'ora il rilevamento di questo fenomeno viene ancora una volta a confermare e sottolineare l'importanza del sistema del glutatione nel gioco della regolazione della crescita.

Bibliografia.

[1] E. Marrè and O. Arrigoni, « Physiol. Plantarum », *10*, 284 (1957).
[2] E. Marrè, O. Arrigoni e G. Forti, « Rend. Acc. Naz. Lincei », *22*, 85 (1957).
[3] E. Marrè and G. Forti, « Physiol. Plantarum », *11*, 36 (1958).
[4] E. Marrè e O. Arrigoni, « Rend. Acc. Naz. Lincei », *23*, 414 (1957).
[5] J. Kato, « Physiol. Plantarum », *11*, 10 (1958).
[4] E. Marrè e O. Arrigoni, « Rend. Acc. Naz. Lincei », *23*, 414 (1957).
[5] J. Kato, « Physiol. Plantarum », *11*, 10 (1958).
[6] W. K. Purvis and W. S. Hillman, « Physiol. Plantarum », *11*, 29 (1958).
[7] I. M. Kolthoff and W. Stricks, « Analytical Chemistry », *25*, 1050 (1953).
[8] B. B. Stowe and T. Yamaki, « Ann. Rev. of Plant Physiol. », *8*, 181 (1957).

Fisiologia. — *Ricerche sulla Motilità dell'esofago Umano.* – VI. *Eccitabilità della peristalsi secondaria (o extradeglutitoria) anche nel tratto sovraortico dell'esofago* (*). Nota di Luigi Turano, Alfredo Curatolo e Enzo Salomoni, presentata (**) dal Corrisp. G. Amantea.

È generalmente ammesso che, in seguito alla stimolazione locale, l'esofago può manifestare un'attività peristaltica non preceduta da atti di deglutizione.

Meltzer [1,2], per primo, l'ha descritta definendola come *peristalsi secondaria* per distinguerla da quella che fa seguito alla deglutizione e che egli ha definito come primaria.

Benché recentemente Nemours–Auguste [3] non abbia riscontrato nell'uomo tale forma di peristalsi definita secondaria, noi l'abbiamo riconfermata ed inequivocabilmente dimostrata, come riportato in una precedente Nota [4].

Rimane tuttavia una certa controversia per quanto riguarda i livelli esofagei nei quali può essere eccitata l'insorgenza di questa forma di peristalsi.

Già Meltzer [2], sperimentando in un cane portatore di fistola, notò che un bolo collocato nell'esofago cervicale non progrediva fino a quando non sopraggiungeva un'onda peristaltica primaria scatenata da un atto di deglutizione, mentre, se il bolo veniva collocato nell'esofago toracico, esso era trasportato verso lo stomaco anche senza l'intervento di atti deglutitori. Implicitamente questo autore non ha potuto mettere in evidenza la possibilità che la peristalsi secondaria insorga anche a livello dell'esofago cervicale.

Danielopolu [5], più tardi, affermò che onde peristaltiche non precedute da atti di deglutizione possono insorgere a qualsiasi livello dell'esofago.

Tuttavia, non disponendo quest'ultimo autore di mezzi sufficientemente adeguati per una sicura ubicazione degli esploratori esofagei, non si può dare valore assoluto alla sua affermazione, la quale peraltro non ha ricevuto conferme, ma anzi smentite da parte dei ricercatori successivi.

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Radiologia dell'Università di Roma e presso l'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Roma.

(**) Seduta del 10 giugno 1958.

(1) S. J. Meltzer, « Am. J. Physiol. », *2*, 266 (1899).

(2) S. J. Meltzer, « Proc. Soc. Exp. Biol. and Med. », *4*, 35 (1907).

(3) M. Nemours–Auguste, « Journées de Gastroenterologies Franç. », Paris, *15*, VI, 1951 suppl. « Arch. Mal. App. Digestif ».

(4) L. Turano, A. Curatolo, E. Salomoni, questi « Rendiconti », vol. XXIV, fasc. 6, pp. 736–743 (1958).

(5) D. Danielopolu, D. Simici, C. Dimitriu, « Journ. de Physiol. et de Path. Gen. », *22*, 595 (1924).

Benché recentemente K. Hwang [6] e successivamente Motta [7] abbiano dimostrato l'esistenza della peristalsi secondaria anche nella porzione cervicale dell'esofago del cane, per quanto riguarda l'uomo tale possibilità viene recisamente negata dai ricercatori contemporanei. Infatti, ad esempio, Templeton [8] afferma che la peristalsi secondaria insorge nell'esofago toracico a partire dall'arco dell'aorta, ed anche Kramer ed Ingelfinger [9] più recentemente asseriscono, confermando le antiche osservazioni di Meltzer, che nella porzione sopra–aortica dell'esofago non si nota mai insorgenza di peristalsi secondaria. Lo stesso K. Hwang accetta come stabilito che la peristalsi secondaria si verifica nell'esofago inferiore a partire dalla regione dell'arco dell'aorta.

Fig. 1. – Radiogramma che dimostra l'ubicazione del palloncino–esploratore prossimale a livello sovraortico.

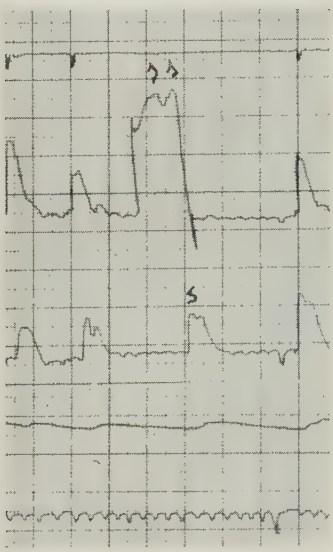
Nel corso delle nostre ricerche sulla motilità dell'esofago umano abbiamo studiato anche questo aspetto della peristalsi secondaria.

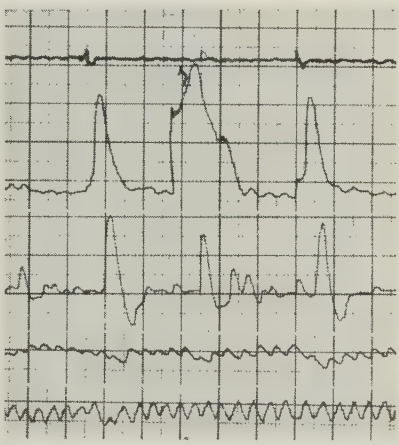
(6) Kao Hwang, « Journ. of appl. physiol. », *6*, 781 (1954).
(7) G. Motta, *Peristalsi ed antiperistalsi dell'esofago*. Cappelli Editore. Bologna 1956.
(8) F. E. Templeton, « Gastroenterology », *10*, 96 (1948).
(9) Ph. Kramer and F. J. Ingelfinger, « Amer. J. Med. », *7*, 168 (1949).

Metodo e procedimento. – Ci siamo serviti del metodo da noi stessi realizzato per lo studio della motilità esofagea, già dettagliatamente descritto in altra Nota [10] alla quale rimandiamo.

La sonda esofagea, munita di tre palloncini esploratori provvisti di repere radio-opaco, era introdotta e fissata in modo che il palloncino prossimale fosse esattamente situato nel tratto sovraortico dell'esofago e precisamente al disopra della proiezione del manubrio sternale (fig. 1). L'esatta ubicazione del palloncino veniva accertata radiologicamente e continuamente controllata attraverso l'oculare della macchina da presa roentgencinematografica.

La stimolazione dell'esofago cervicale, nel tentativo di determinare l'insorgenza della peristalsi secondaria, veniva attuata per distensione del palloncino esploratore prossimale che veniva gradatamente e bruscamente insufflato in modo da raggiungervi pressioni interne successivamente varianti da 10 a 40 cm di acqua.





Figg. 2 e 3. – Peristalsi secondaria (s) provocata da stimolazione dell'esofago sovraortico.

Intanto l'attività motoria dell'esofago era seguita oltre che mediante la registrazione meccanografica anche per mezzo dell'osservazione radioscopica, nonché con la registrazione roentgencinematografica quando richiesto dalla importanza degli eventi in corso.

Di solito, la brusca insufflazione del palloncino intraesofageo evocava nel soggetto in esame un atto deglutitorio; era però generalmente sufficiente

(10) L. Turano, A. Curatolo, E. Salomoni, questi « Rendiconti », vol. XXIV, fasc. 4, pp. 449-456 (1958).

un tempestivo e perentorio invito a non deglutire per inibire ogni deglutizione che ovviamente poteva complicare l'interpretazione della risposta esofagea allo stimolo distensivo.

Come descritto nel metodo, ogni atto di deglutizione restava comunque segnalato sul meccanogramma da una apposita penna collegata con un esploratore laringeo.

Risultati. – L'insufflazione iniziale dei palloncini esploratori ad una pressione di 6–10 cm d'acqua, non dava generalmente luogo ad insorgenza di peristalsi secondaria al livello esofageo corrispondente all'esploratore sovraortico. Solo raramente ed in soggetti particolarmente emotivi ed eccitabili si poteva notare, anche a questo livello, l'insorgenza di qualche sporadico evento peristaltico di tipo secondario.

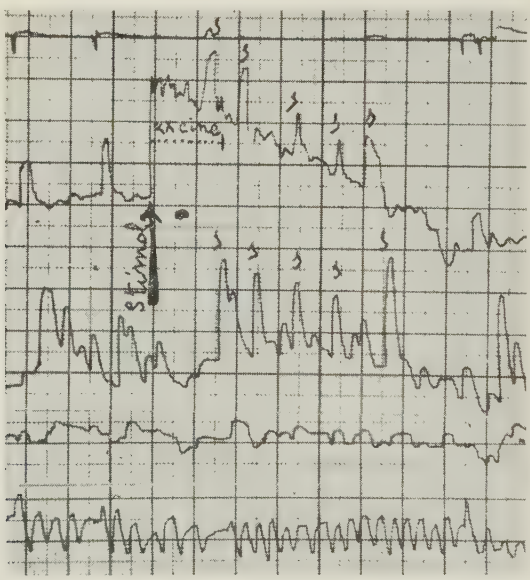


Fig. 4. – Serie di eventi peristaltici secondari (s) insorgenti dopo stimolazione dell'esofago sovraortico e durante la successiva, graduale detensione.

L'ulteriore insufflazione del palloncino esploratore prossimale fino alla pressione di 15–20 cm. d'acqua, non modificava l'eccitabilità dell'esofago sovraortico nei riguardi della peristalsi secondaria.

Spingendo però ulteriormente l'insufflazione sino a 25 cm d'acqua di pressione all'interno del palloncino prossimale, e mantenendo tale pressione per alcuni secondi (10 sec. o più), abbiamo quasi costantemente potuto notare (9 soggetti su 10) insorgenza di onde peristaltiche secondarie dal livello stimolato (figg. 2 e 3).

Inoltre dalle nostre esperienze è apparso che l'eccitabilità della peristalsi secondaria a livello sovraortico, una volta indotta per mezzo della

forte distensione, permane per parecchi secondi. Infatti, facendo diminuire progressivamente la tensione di distensione, si vedono ancora insorgere successive onde secondarie, anche a livelli di pressione di distensione più bassi, prima insufficienti a determinare l'insorgenza di peristalsi (fig. 4).

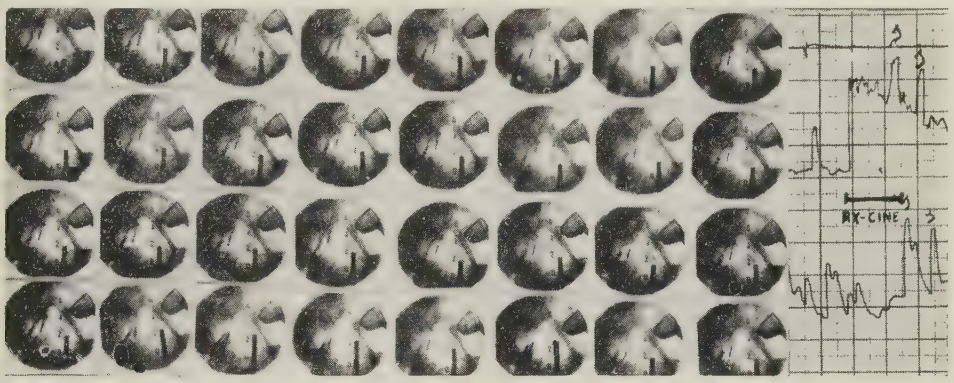


Fig. 5. – Sequenza roentgencinematografica (1 fotogramma ogni 9 dell'originale) e corrispondente meccanogramma relativo ad un evento peristaltico secondario a livello sovraortico.

Dall'indagine meccanografica e dalla simultanea registrazione roentgencinematografica (fig. 5) risulta definitivamente accertato che, anche nell'uomo, può verificarsi insorgenza di onde peristaltiche secondarie da stimolazione locale anche nel tratto sovraortico dell'esofago, benché la soglia di eccitabilità ne risulti notevolmente più alta nei confronti dell'esofago toracico, dove la peristalsi secondaria può essere evocata con pressioni di distensione molto più basse e perfino di appena 6–10 cm d'acqua.

Fisiologia. — *Contributo allo studio dell'azione tossica elettiva della streptomicina e della diidrostreptomicina sulle strutture nervose* (*). Nota (**) di Pietro D'Arcangelo e Marco Marchetti, presentata dal Corrisp. G. Amantea.

La streptomicina e la diidrostreptomicina esercitano, in determinate condizioni, un'azione inibente sui processi ossidativi delle cellule di tessuti animali (Umbreit e Tonhazy (1); D'Arcangelo (2)). Secondo Umbreit e Tonhazy l'effetto sarebbe dovuto alla inibizione di una reazione di condensazione tra piruvato e ossalacetato e può essere messo in evidenza solo se si realizzano certe condizioni sperimentali, che, a loro avviso, faciliterebbero la penetrazione dell'antibiotico all'interno delle strutture cellulari, per esso poco permeabili. Questi Autori osservarono che su fettine e su omogenati di organi (fegato, rene, cervello) di ratto preparati in mezzo isotonico la streptomicina e la diidrostreptomicina, aggiunte al mezzo fino a concentrazioni di 200–300 μg/ml, non esercitavano generalmente alcun effetto: solo per concentrazioni di 300 μg/ml si rese apprezzabile in qualche caso un certo grado di inibizione. Al contrario, su omogenati lasciati previamente a contatto con l'antibiotico per un tempo piuttosto lungo o su omogenati preparati in mezzo fortemente ipotonico (acqua distillata) si osservò un netto effetto inibente sull'ossidazione di miscele di piruvato + ossalacetato e di piruvato + fumarato. In queste condizioni la streptomicina si dimostrò più attiva della diidrostreptomicina. Secondo gli Autori la più profonda disintegrazione che subiscono le strutture cellulari nella omogeneizzazione in mezzo ipotonico e, nel caso degli omogenati allestiti in mezzo isotonico, il prolungato contatto con l'antibiotico, permetterebbero a questo di penetrare all'interno dei mitocondri, dove si troverebbe l'enzima attivante la suddetta reazione di condensazione tra ossalacetato e piruvato. Il minor grado di inibizione osservato dagli Autori con la diidrostreptomicina sarebbe dovuto, a loro avviso, ad una minore capacità di penetrazione di questa sostanza nell'intimo della struttura cellulare.

Successivamente uno di noi (D'Arcangelo (loc. cit.)), saggiando gli effetti di concentrazioni crescenti di streptomicina e di diidrostreptomicina su omogenati di cervello di ratto preparati in mezzo isotonico (3), aveva osservato che ad alte concentrazioni si rendeva costantemente evidente una

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Roma.

(**) Pervenuta all'Accademia il 25 ottobre 1958.

(1) W. W. Umbreit e N. E. Tonhazy, « Jour. Bact. », *58*, 769 (1949).

(2) P. D'Arcangelo, « Rend. Acc. Naz. Lincei », XXII (fasc. 5), 654 (1957).

(3) Soluzione di Krebs–Ringer glicosata e tamponata con fosfati a pH 7,4.

diminuzione del consumo di O_2 degli omogenati, senza che questi fossero stati previamente mantenuti a lungo in contatto con l'antibiotico. L'effetto era chiaramente apprezzabile già per concentrazioni di 400 μg/ml, immediatamente superiori a quelle massime esplorate da Umbreit e Tonhazy, e andò aumentando, entro certi limiti, col crescere della concentrazione. In quella occasione non furono rilevate significative differenze di attività tra la streptomicina e la diidrostreptomicina.

Muovendo da queste prime osservazioni sugli omogenati di cervello di ratto, abbiamo esteso l'esame degli effetti di forti concentrazioni dei due antibiotici ad altri organi dello stesso animale, allo scopo di stabilire se anche su questi, in condizioni sperimentali analoghe, si rendesse evidente una inibizione del consumo di O_2. A tal fine abbiamo condotto un'indagine comparativa esaminando parallelamente gli effetti di concentrazioni crescenti di streptomicina e di diidrostreptomicina su omogenati di cervello, di fegato, di rene e di milza di ratto. Riferiamo in questa nota i risultati ottenuti.

Abbiamo impiegato 26 ratti albini adulti (16 ♂ e 10 ♀), di peso corporeo variabile da 125 a 235 g, seguendo la stessa tecnica sperimentale adottata nelle precedenti esperienze. Uccisi gli animali per decapitazione, gli organi in esame (per il cervello, la milza ed il rene l'intero organo, per il fegato uno dei suoi lobi), asportati immediatamente dopo la morte, venivano rapidamente pesati e quindi omogeneizzati a bassa temperatura in liquido di Krebs–Ringer glicosato e tamponato con fosfati a pH 7,4 [4]. Il consumo di O_2 degli omogenati è stato misurato con l'impiego dell'apparecchio di Warburg, alla temperatura di 37° C e in ambiente di aria. L'omogenato, diluito con il liquido di Krebs–Ringer fino a raggiungere una concentrazione di 100–150 mg di organo fresco in 2,5 ml, veniva distribuito nelle vaschette manometriche in quantità di 2,5 ml per ciascuna di esse. In queste venivano poi aggiunti all'omogenato 0,5 ml di una soluzione di streptomicina o di diidrostreptomicina disciolte nello stesso liquido di Krebs–Ringer; nelle prove di controllo, si aggiungevano 0,5 ml del liquido di Krebs–Ringer, in luogo della soluzione di antibiotico.

Anche in queste esperienze, come nelle precedenti, abbiamo saggiato gli effetti di concentrazioni di antibiotico comprese tra 100 e 10.000 μg di sostanza base per ml di omogenato, impiegando streptomicina e diidrostreptomicina in forma di solfato (Squibb). La determinazione del consumo di O_2 da parte degli omogenati è stata eseguita sempre su campioni in doppio.

Le letture manometriche sono state effettuate ogni 30 min, per la durata di almeno 1 h. I dati ricavati da esse sono stati espressi in μl O_2/g di tessuto fresco.

(4) Preparato aggiungendo a 100 ml di una soluzione di NaCl 0,9 %: 4 ml KCl 1,15 %, 3 ml $CaCl_2$ 1,22 %, 1 ml KH_2PO_4 2,11 %, 1 ml $MgSO_4 \cdot 7\ H_2O$ 3,82 %, 12 ml di tampone fosfato 0,1 M pH 7,4 e glicoso in concentrazione dello 0,1 %.

TABELLA.

Concentrazione di antibiotico µg/ml	Cervello			Rene			Fegato			Milza		
	Controlli	Streptomicina	Diidrostreptomicina	Controlli	Streptomicina	Diidrostreptomicina	Controlli	Streptomicina	Diidrostreptomicina	Controlli	Streptomicina	Diidrostreptomicina
	µl O_2/g di tessuto fresco (*)											
100	280,0	299,0	282,5	160,0	148,2	147,2	220,0	221,6	206,6	70,0	73,6	72,0
200	280,0	268,6	277,0	160,0	166,4	162,4	235,5	229,6	241,8	78,0	79,2	83,6
300	330,0	293,1	300,2	172,4	182,7	161,2	220,0	213,3	210,0	78,0	75,2	80,3
400	330,0	274,2	252,8	172,4	169,8	181,9	235,5	253,2	222,6	72,5	76,7	70,0
500	298,7	253,6	242,8	157,5	151,2	170,5	220,3	241,6	217,2	70,0	66,4	67,0
800	298,7	245,4	255,1	158,0	161,9	150,9	220,3	230,8	224,2	72,5	69,3	67,8
1000	281,0	212,0	216,7	157,5	143,3	154,8	161,6	156,2	146,5	80,0	72,8	81,8
1500	283,5	216,7	218,9	155,0	148,1	166,6	161,6	150,0	158,5	81,5	80,1	84,4
2000	322,4	240,7	256,3	157,5	145,9	153,6	250,4	238,8	236,3	80,0	74,3	74,6
2500	322,4	210,2	228,6	155,0	160,4	151,2	250,4	234,1	254,6	81,5	78,5	77,0
3000	289,0	225,7	220,3	148,5	144,8	142,4	195,8	207,5	194,3	77,3	80,9	79,8
4000	289,0	220,3	216,8	148,5	146,3	139,2	195,8	178,8	197,1	77,3	71,5	70,8
5000	283,0	196,0	221,1	151,4	151,4	153,2	219,5	189,5	192,9	75,4	82,2	76,7
10000	283,0	207,0	209,8	151,4	183,7	163,7	219,5	190,8	190,3	75,4	68,3	84,0

(*) I valori si riferiscono alla prima 1/2 h di esperimento. Ognuno dei valori rappresenta la media di due determinazioni.

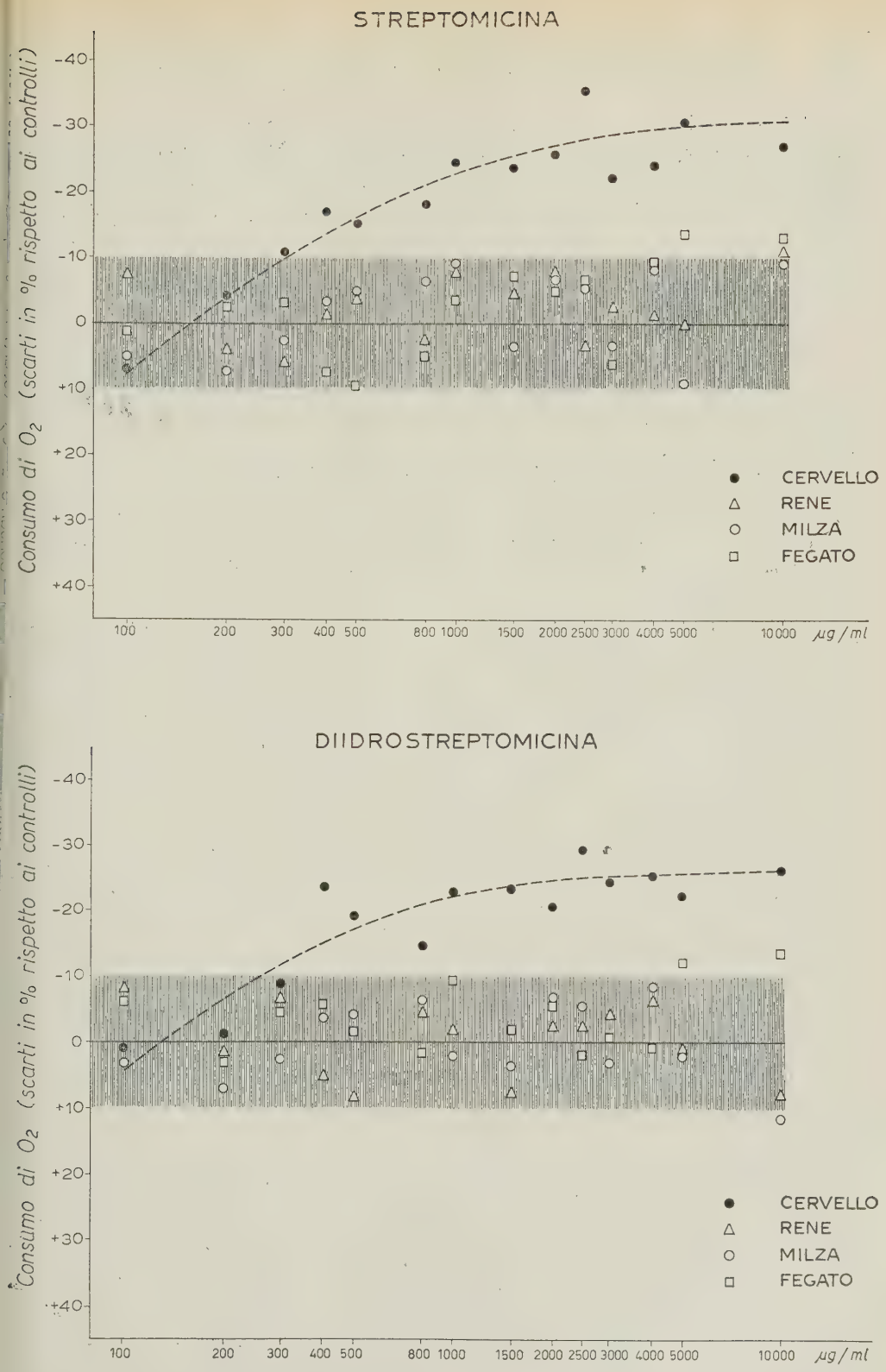


Fig. 1. – Effetti di varie concentrazioni di streptomicina e di diidrostreptomicina sul consumo di O_2 di omogenati di cervello, fegato, rene e milza di ratto. Le concentrazioni dei due antibiotici sono riportate in scala logaritmica. L'area tratteggiata rappresenta il campo degli scarti di $\pm$ 10 % rispetto ai controlli.

Per la valutazione comparativa degli effetti delle due sostanze sul consumo di O_2 degli omogenati dei vari organi presi in esame abbiamo ritenuto opportuno utilizzare solo i dati relativi ai primi 30 min di esperimento, poiché già nella seconda 1/2 h negli omogenati di rene, di fegato e di milza il consumo di O_2 è andato diminuendo sensibilmente, sia nelle prove di controllo sia in quelle con streptomicina o diidrostreptomicina, fino a scendere a valori molto bassi e talora trascurabili.

I risultati delle nostre esperienze sono i seguenti (ved. tabella e fig. 1):

a) sugli omogenati di cervello di ratto, preparati in mezzo isotonico secondo la tecnica su esposta, anche nelle presenti esperienze, a conferma di quanto era stato osservato in quelle precedenti, la streptomicina e la diidrostreptomicina hanno provocato, ad alte concentrazioni, una chiara e costante diminuzione del consumo di O_2. L'effetto dei due antibiotici si è reso evidente a partire da concentrazioni di 300–400 μg/ml ed è andato aumentando col crescere della concentrazione fino a 2000–2500 μg/ml; concentrazioni superiori a queste non hanno provocato un ulteriore aumento di intensità dell'effetto inibente;

b) sugli omogenati di fegato, di rene e di milza di ratto, allestiti con la stessa tecnica seguita per quelli di cervello, l'aggiunta di streptomicina o di diidrostreptomicina non ha, invece, provocato significative variazioni del consumo di O_2. Solo per concentrazioni di antibiotico molto elevate (5000–10.000 μg/ml) sembra talora evidenziarsi un lieve grado di inibizione;

c) in nessun caso abbiamo rilevato differenze significative tra gli effetti della streptomicina e quelli della diidrostreptomicina.

Questi risultati, oltre a confermare integralmente quanto già avevamo osservato nelle precedenti esperienze su omogenati di cervello, indicano che, nelle condizioni sperimentali da noi adottate, i processi ossidativi che si svolgono nelle intime strutture cellulari non vengono, nei differenti organi, ugualmente influenzati dall'aggiunta dei due antibiotici. Concentrazioni di streptomicina o di diidrostreptomicina che su omogenati di cervello esercitano un chiaro e costante effetto inibente sul consumo di O_2, risultano invece inattive su quelli di fegato, di rene e di milza.

Considerando il significato di questi nostri risultati alla luce delle ipotesi formulate da Umbreit e Tonhazy (loc. cit.) si potrebbe tentare la seguente interpretazione. Ammesso che l'effetto inibente delle due sostanze sui processi ossidativi della cellula animale sia condizionato dalla possibilità di superare determinate barriere della ultrastruttura cellulare, quale verrebbe offerta dal prolungato contatto di esse con i substrati o dalla più profonda disintegrazione in questi operata dalla omogeneizzazione in mezzo ipotonico, sembra lecito supporre che in senso egualmente favorente per l'attuazione dell'effetto agiscano le forti concentrazioni dei due antibiotici. Ciò varrebbe, però, secondo le nostre osservazioni e per le concentrazioni da noi esplorate, per la sostanza del tessuto cerebrale e non per quelle del fegato, del rene e della milza. Ovviamente un assai più esteso studio comparativo occorrerebbe per accertare se tale comportamento sia peculiare della sostanza nervosa

al confronto di quelle degli altri tessuti dell'organismo. Una simile permeabilità preferenziale delle ultrastrutture del tessuto nervoso nei confronti dei due antibiotici costituirebbe un elemento chiarificatore di grande importanza per interpretare l'azione elettivamente neurotossica che questi farmaci esercitano negli animali con essi trattati e che si evidenzia attraverso i noti e caratteristici danni funzionali (Donatelli e Galeotti–Flori [5]; Cerquiglini e Chiucini [6]; Molitor e Graessle [7]).

(5) L. Donatelli e A. Galeotti–Flori, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », *23*, 578 (1947); « Arch. Sc. Farm. », *1*, 183 (1948); L. Donatelli, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », *24*, 462 (1948).

(6) S. Cerquiglini e G. Chiucini, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », *25*, 1130 (1949); *26*, 1029 e 1366 (1950); G. Chiucini, ibidem, *26*, 1031, 1033, 1368 e 1371 (1950).

(7) H. Molitor e O. E. Graessle, « Pharmacol. Rev. », *2*, 1 (1950).

Fisiologia. — *Effetto delle micro–onde sulle scariche cerebellari post–rotatorie del piccione viaggiatore* (*). Nota (**) di TORQUATO GUALTIEROTTI e DINO PASSERINI, presentata dal Socio R. MARGARIA.

Alcune recenti osservazioni sul disorientamento nel volo di stormi di piccioni viaggiatori quando urtino contro reti radar hanno fatto pensare alla possibilità di una sensibilità elettromagnetica da parte di questi animali: se non che ci pare estremamente poco probabile che possano esistere recettori elettromagnetici in un mezzo liquido come quello dell'organismo.

Esperimenti sono stati eseguiti allo scopo di stabilire quale sia l'influenza delle micro–onde sulle risposte cerebellari all'accelerazione e sul comportamento in volo di piccioni viaggiatori.

Gli animali subivano irradiazione mediante radar con una potenza all'antenna di 200 Watt, ad una distanza di 1 m dall'antenna stessa. L'irradiazione era applicata sia al corpo *in toto*, sia alla sola testa, proteggendo il resto del corpo con uno schermo metallico. L'attitudine al volo degli animali nonché l'attività elettrica spontanea e le risposte rotatorie e post–rotatorie cerebellari erano misurate immediatamente dopo l'esposizione al radar. Mediante termocoppie poste alla base del cranio e nel sottocutaneo del dorso si controllava la temperatura durante il corso di tutto l'esperimento.

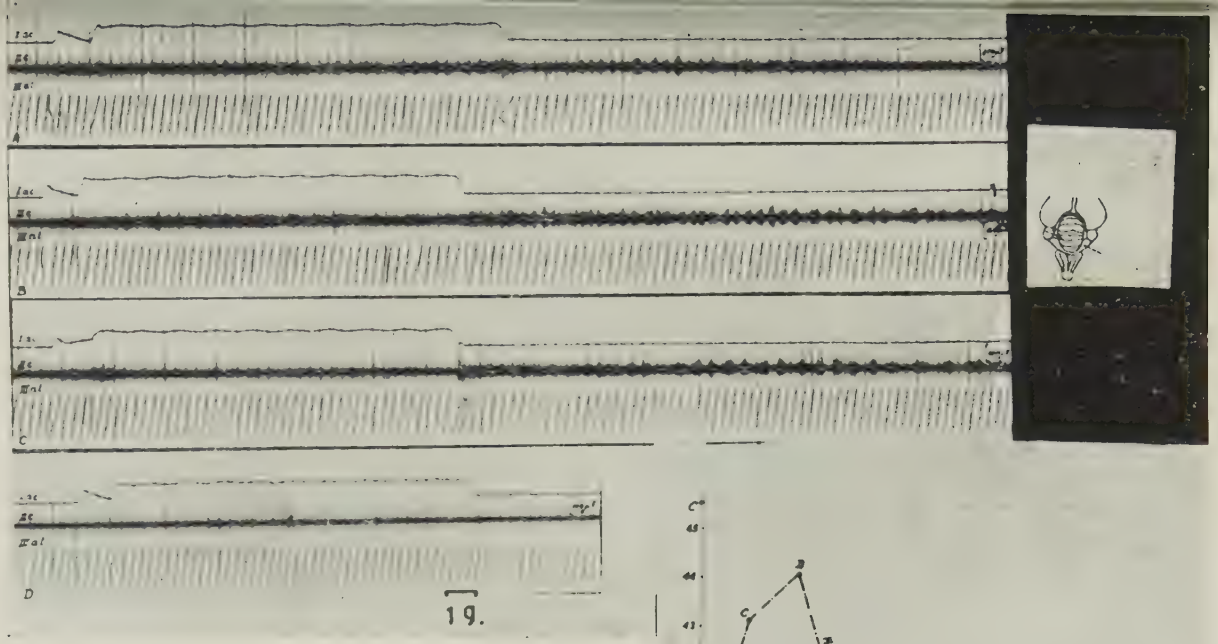
Un'esposizione al campo radar nelle condizioni suddette provocava, dopo 1/4–1/2 min, aumento della temperatura, anche limitato alla sola testa quando il resto del corpo era riparato dalla schermatura metallica. Quando l'irradiazione radar non era di intensità sufficiente ad aumentare la temperatura corporea, e neppure della sola testa, non si rilevava modificazione alcuna nel comportamento dell'animale in volo, nell'attività spontanea cerebellare o nelle risposte rotatorie e post–rotatorie.

Un aumento di temperatura di meno di 1° invece era già sufficiente per produrre un disorientamento notevole nei piccioni in volo, che non sembravano più capaci di seguire la linea dritta e volavano in circolo urtando contro ostacoli. Quando stazionanti sul terreno, gli animali dimostravano evidenti sintomi di vertigine, simili a quelli che si ottengono durante la stimolazione labirintica termica, elettrica o meccanica.

L'attività elettrica cerebellare era notevolmente influenzata dalle variazioni di temperatura della testa dovute a irradiazione radar. La risposta cerebellare rotatoria e postrotatoria, dopo 1/2 min di irradiazione, quando la temperatura del capo era già salita da 39,5°C a 41°C, era notevolmente aumentata in ampiezza e durata delle scariche. Dopo 1 min d'irradiazione la temperatura del capo dell'animale raggiungeva i 43°C mentre quella del

(*) Dal Laboratorio di Fisiologia Umana dell'Università di Milano.

(**) Pervenuta all'Accademia il 2 agosto 1958.



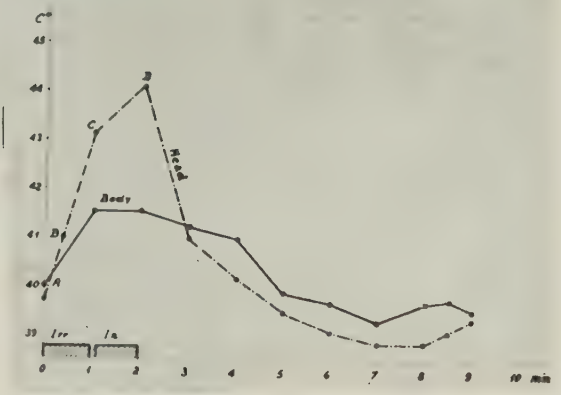


Fig. 1. – Piccione viaggiatore. Rotazione orizzontale.

I *ac*: accelerazione centripeta = 0,33 g.

II *e*: elettroencefalogramma (nello schema a destra posizione degli elettrodi).

III *at*: accelerazione tangenziale registrata trasversalmente, asse dei tempi = 100 msec.

A: normale.

B: immediatamente dopo un'irradiazione radar di 1/4 min.

C: immediatamente dopo un'irradiazione radar di 1 min.

D: immediatamente dopo un'irradiazione radar di 2 min.

Per l'intensità dell'irradiazione radar v. testo.

Nel diagramma in basso a destra: curva delle temperature della testa (head) e del corpo (body) in funzione del tempo. I punti *A B C D* riportati nel diagramma corrispondono a quelli dei tracciati.

Le scariche post-rotatorie cerebellari aumentano notevolmente fino a un massimo che è raggiunto quando la temperatura è circa 41°C. A 43°C le scariche postume diminuiscono di ampiezza e di numero, pur rimanendo maggiori del normale. A 44°C sia le scariche postume che l'attività spontanea cerebellare sono ridotte quasi a zero.

Nella curva delle temperature si noti la dissociazione tra la temperatura della testa e quella del corpo, e l'ipotermia di rimbalzo, seguente il forte aumento termico da irradiazione radar.

Segnatempo 1/5 sec. Taratura dell'accelerometro tangenziale e amplificazione indicate nella figura.

corpo era 41,5° C. Sottoponendo allora l'animale alla stessa stimolazione rotatoria usata prima dell'irradiazione, le scariche postume tendevano a diminuire di frequenza ed ampiezza pur essendo ancora maggiori del normale. Irradiando successivamente l'animale per un altro minuto e sottoponendolo a stimolazione rotatoria si registrava una totale assenza di scarica postuma a livello cerebellare, mentre la temperatura del capo raggiungeva i 44° C. A questo punto anche l'attività spontanea cerebellare era notevolmente diminuita di ampiezza.

Aumentando progressivamente la temperatura del capo, dunque, l'attività cerebellare dapprima aumenta e poi diminuisce fino a spegnersi. Se si cessa l'irradiazione e l'animale sopravvive, si osserva un lento ritorno alla norma dell'attività cerebellare pressoché parallelo al ritorno alla norma della temperatura. La curva della temperatura registrata a livello del capo presenta un brusco decremento dopo circa 20 sec dal termine dell'irradiazione e scende entro 6–7 min al di sotto della temperatura pre–irradiazione. La temperatura registrata al dorso non supera mai i 41,5° C e presenta un decremento minore dopo il termine dell'irradiazione rispetto alla curva della temperatura del capo.

Si deduce che i centri cerebellari vengono facilitati da un aumento limitato di temperatura, oltre il quale subentra probabilmente un'alterazione del tessuto nervoso che porta a un blocco dell'attività nervosa.

Fisiologia. — *I fenomeni elettrici corticocerebrali nella epilessia riflessa* (*). Nota di PAOLO CREPAX e ETTORE FADIGA, presentata (**) dal Socio G. C. PUPILLI.

Com'è noto, solo in una parte dei Cani nei quali si procede all'applicazione di stricnina sulla corteccia sensitivo–motrice e successivamente alla stimolazione dell'area riflessogena cutanea connessa funzionalmente col centro sottoposto all'azione topica del farmaco, le stimolazioni periferiche provocano un accesso convulsivo generalizzato; in altri animali tale manifestazione convulsiva (epilessia riflessa) non si osserva [Amantea (1)]. Poiché le condizioni dell'esperimento di Amantea sono perfettamente riproducibili in ogni Cane, la diversa suscettività dei singoli animali può spiegarsi solo accettando la ipotesi che esistano Cani predisposti e Cani non predisposti alla epilessia riflessa.

Il fatto che la possibilità di provocare in modo riflesso un accesso epilettico generalizzato sia subordinata alla presenza di una condizione predisponente di natura costituzionale, contrasta con la costanza del fenomeno noto sotto il nome di clono di Baglioni e Magnini (2), che si può ottenere in tutti gli animali mediante la stricninizzazione di un centro sensitivo–motore e che certamente è la espressione dell'attività ipersincrona dei neuroni corticali sottoposti all'azione della stricnina. Fenomeno egualmente costante è la intensificazione del clono stesso per stimolazione dell'area riflessogena collegata con detti neuroni [Amantea (3)]. Sicché si deve ammettere che la predisposizione non concerne l'insorgere di un'attività ipersincrona di tipo convulsivo (4) in un punto della corteccia cerebrale, ma essenzialmente il propagarsi dell'attività stessa ad altri centri corticali [cfr. Moruzzi (5)].

Abbiamo registrato i fenomeni elettrici che si svolgono nella corteccia cerebrale del Cane durante le varie fasi dell'esperimento di Amantea, esaminando in modo particolare le modificazioni osservabili in coincidenza con la stimolazione dell'area riflessogena (6).

(*) Lavoro eseguito, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche, nell'Istituto di Fisiologia umana della Università di Bologna.

(**) Nella seduta dell'8 novembre 1958.

(1) G. AMANTEA, « Boll. r. Accad. med. Roma », XLVI, 121 (1920).

(2) S. BAGLIONI e M. MAGNINI, « Arch. Fisiol. », VI, 240 (1909).

(3) G. AMANTEA, « Arch. it. Biol. », LXIII, 143 (1915).

(4) Nella letteratura elettrofisiologica le pulsazioni elettriche ipersincrone dei neuroni corticocerebrali vengono chiamate convulsive o epilettiche, anche quando esse non si associano a manifestazioni motorie. Nel testo i due termini saranno impiegati nella loro accezione più larga.

(5) G. MORUZZI, *L'épilepsie expérimentale*. Paris, Hermann (1951).

(6) Quando nel testo useremo per brevità la espressione « area riflessogena » senza altra specificazione, vorremo riferirci all'area cutanea connessa funzionalmente col centro

La tecnica sperimentale adottata si discostava dal procedimento di Amantea solo per l'impiego di animali curarizzati (0,2 mg/kg di *d*–tubocurarina), soccorsi con la respirazione artificiale, e l'uso della stimolazione termica dell'area cutanea. Tali modificazioni del metodo originale sono apparse necessarie per abolire gli artefatti, che altrimenti ostacolano la lettura degli elettrogrammi registrati sia durante la stimolazione faradica o meccanica [7] dell'area riflessogena, sia nello svolgersi dell'eventuale accesso convulsivo.

La percentuale dei Cani risultati predisposti nelle presenti indagini, è del 66 % circa (25 animali su 42): essa coincide con quella trovata in altri esperimenti [Cotti, Crepax e Silvestrini [8], Crepax e Infantellina [9]], che in questo Laboratorio erano stati in precedenza eseguiti con un procedimento strettamente conforme in ogni particolare a quello proposto da Amantea. La qual cosa dimostra come le modificazioni da noi apportate al procedimento stesso siano irrilevanti rispetto al risultato finale.

La stimolazione termica dell'area riflessogena si effettuava col porre a contatto della cute del muso, i cui peli erano stati precedentemente recisi, una provetta contenente acqua a 60°–70° C ed esternamente ben asciutta, mantenendola *in situ* per 10 sec circa e ripetendo a brevi intervalli (10–20 sec) l'applicazione dello stimolo. Si può fondatamente ritenere che una stimolazione termica effettuata nelle condizioni anzidette non provochi dolore termico [cfr. Herlitzka [10]].

L'attività elettrica corticocerebrale era derivata col metodo dipolare o quello monopolare [11] da punti simmetrici dei lobi frontali, parietali e occipitali. In corrispondenza della corteccia motrice messa allo scoperto, gli elettrodi erano costituiti da sottili fili di Ag–AgCl, a punta smussa, fissati al cranio mediante un supporto di ebanite saldato con ceralacca; per le altre derivazioni si impiegavano elettrodi a vite, infissi nella teca sino a giungere in contatto con la superficie durale esterna. Le registrazioni erano effettuate con un elettroencefalografo Grass mod. III D, fornito di 8 penne scriventi. Per ogni altro dettaglio concernente il procedimento sperimentale, qui non specificato, si rimanda alle Memorie citate [8,9].

1° *Caratteri elettrografici dell'attività destata nella corteccia motrice dal trattamento stricninico locale.* L'applicazione di stricnina (soluzione di nitrato

sensitivo–motore corticale trattato con stricnina. Nel medesimo senso restrittivo impiegheremo anche la espressione « area cutanea ».

(7) Nel caso della stimolazione meccanica, quando essa venga effettuata in zone cutanee dell'estremo cefalico, gli artefatti possono dipendere da spostamenti anche lievi degli elettrodi di derivazione.

(8) E. Cotti, P. Crepax e B. Silvestrini, « Arch. Sci. biol. », XLI, 559 (1957).

(9) P. Crepax e F. Infantellina, « Arch. Sci. biol. », XLI, 1 (1957).

(10) A. Herlitzka. In: F. Bottazzi, *Trattato di Fisiologia*. Vol. II. Milano, F. Vallardi (1937).

(11) Nel secondo caso, un morso d'argento fissato alla bocca dell'animale costituiva l'elettrodo indifferente.

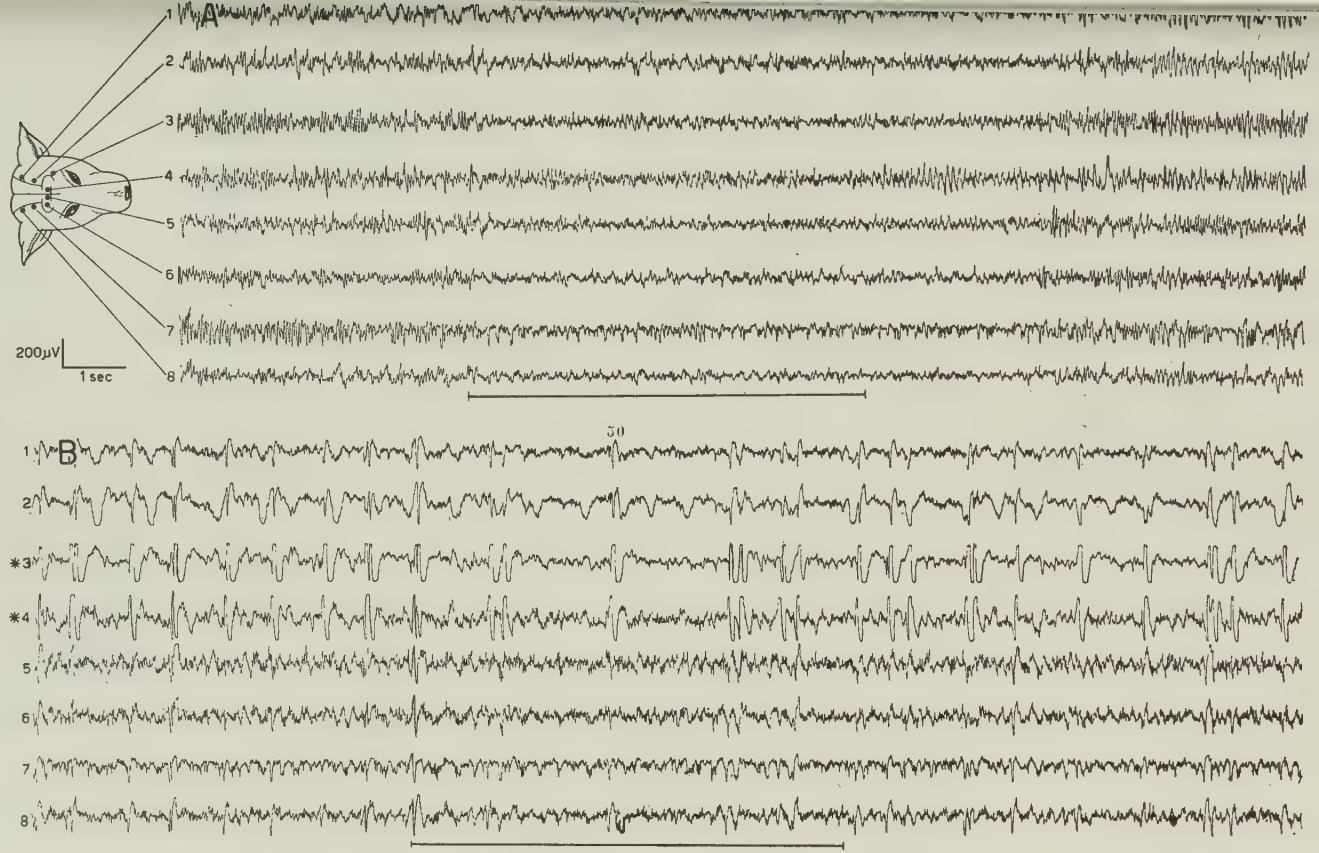


Fig. 1. - Modificazioni dell'elettroencefalogramma di Cane non predisposto alla epilessia riflessa, osservabili per effetto della stimolazione del N. ischiatico prima e dopo la stricninizzazione di un centro motore corticale.

A, tracciato ottenuto avanti la stricninizzazione; B, tracciato registrato 10 min dopo l'applicazione di una soluzione di stricnina (nitrato all'1 %) sulla corteccia motrice del lato sinistro, in corrispondenza del centro del M. orbicolare palpebrale. Il tempo di applicazione dello stimolo è indicato dalla linea continua tracciata sotto le due registrazioni; la tensione impiegata è di V 1,5 in A e di V 2,5 in B. Si notino in A e in B rispettivamente la reazione di risveglio e la inibizione dello *spiking* stricninico corticale. Nei tracciati contrassegnati con asterisco l'amplificazione ha un valore pari a $^1/_3$ di quello indicato.

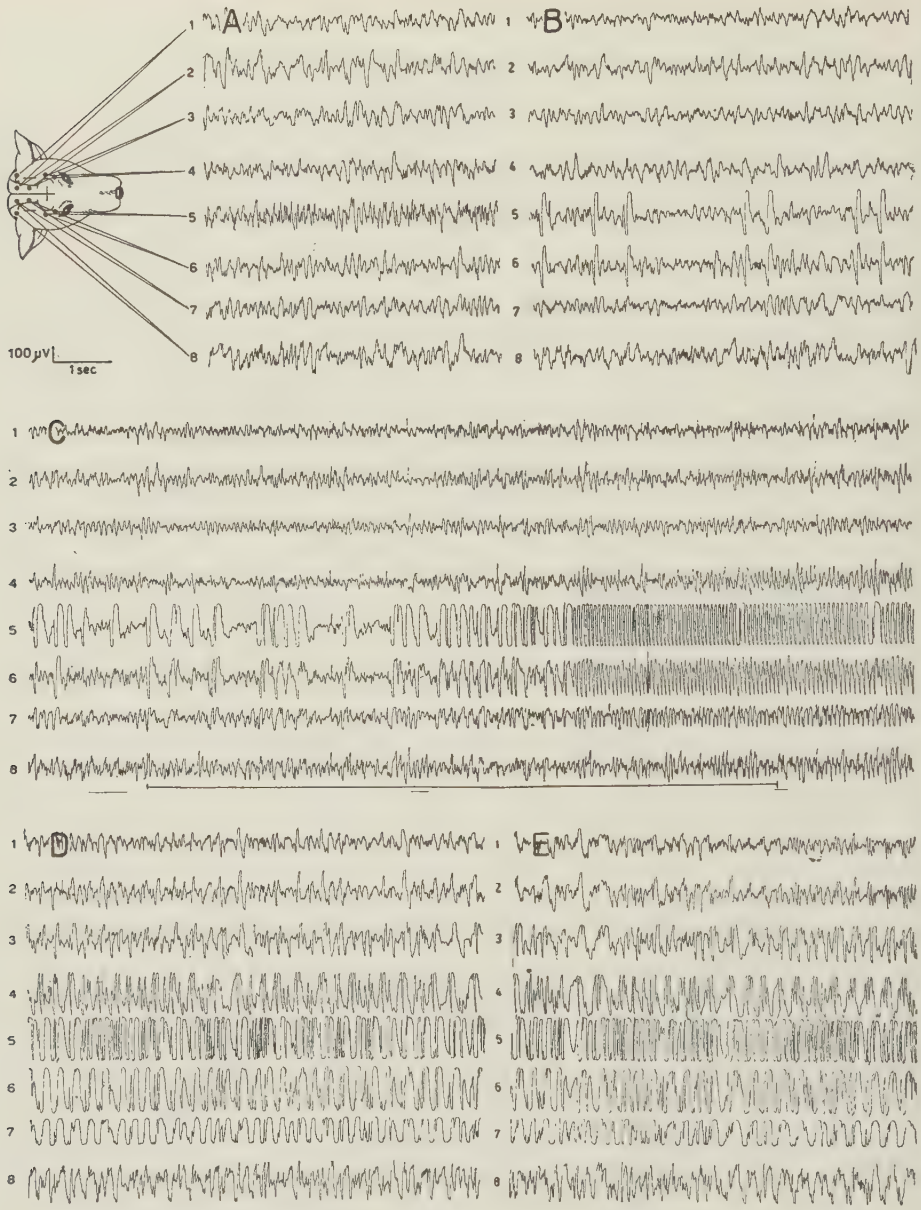


Fig. 2. – Modificazioni dell'elettroencefalogramma di Cane predisposto alla epilessia riflessa, osservabili per effetto della stimolazione dell'area cutanea connessa funzionalmente con un centro motore corticale trattato con stricnina.

A, tracciato normale; B, 2 min dopo l'applicazione di una soluzione di stricnina (nitrato all'1 %) sulla corteccia motrice del lato destro, in corrispondenza del centro del M. orbicolare palpebrale; C, prima, durante e dopo la stimolazione termica cutanea (linea continua) effettuata in corrispondenza del lato sinistro del muso 4 min dopo l'inizio della stricninizzazione; D e E, tracciati ottenuti rispettivamente 10 e 50 sec dopo la fine di C. Si noti la progressiva diffusione a tutta la corteccia dell'attività convulsiva del centro sensitivo-motore stricninizzato, intensificata in C dalla stimolazione dell'area riflessogena.

di stricnina all'1 %) sul centro corticale del M. orbicolare delle palpebre modifica l'attività del centro stesso, provocando la comparsa di tipiche punte di grande ampiezza già descritte dagli Autori [letteratura in Moruzzi (5)] e comunemente interpretate come espressione della brusca scarica sincronizzata dei neuroni sottoposti all'azione della stricnina (figg. 1 B e 2 B). Nelle nostre condizioni sperimentali si è visto che gli *spikes* compaiono di solito da 30 e 60 sec dopo l'inizio del trattamento, hanno una frequenza massima di 1–2 per secondo e sono di un voltaggio quasi sempre superiore a 1 mV; a volte, specie quando l'applicazione topica del farmaco viene ripetuta, essi si presentano raggruppati in complessi costituiti da 2–4 oscillazioni rapide consecutive. Prolungando la durata del trattamento, senza per altro procedere alla stimolazione dell'area riflessogena, non si osservano generalmente modificazioni significative della frequenza dello *spiking*: dopo aver raggiunto nei primi 2–3 min dall'inizio del trattamento i valori indicati, la cadenza delle punte oscilla irregolarmente intorno a detti valori, in relazione col periodico rinnovo dei dischetti imbevuti della soluzione del farmaco e anche per effetto di variazioni spontanee del livello funzionale del preparato.

I fenomeni che abbiamo descritti, si manifestano in tutto simili sia negli animali nei quali la stimolazione dell'area riflessogena ha successivamente provocato la diffusione dell'attività convulsiva dal centro stricninizzato a tutta la corteccia (Cani predisposti alla epilessia riflessa) sia in quelli in cui tale fenomeno non si è verificato (Cani non predisposti; cfr. le figg. 1 e 3 con la fig. 2).

2° *Effetti degl'impulsi corticipeti sulle onde cerebrali spontanee e sullo* spiking *stricninico.* Purché il ritmo dell'attività corticale registrata in condizioni basali sia sufficientemente sincronizzato, tanto la stimolazione elettrica del capo centrale del N. ischiatico, quanto quella termica dell'area cutanea riflessogena costantemente provocano chiare reazioni di risveglio. Il valore di soglia, determinato con la stimolazione del nervo, oscilla tra 0,7 e 2,5 V, sia nei Cani che poi risulteranno predisposti, sia in quelli successivamente apparsi non predisposti (fig. 1 A).

Quanto agli effetti destati dagli impulsi corticipeti sullo *spiking* stricninico, essi appaiono diversi secondo che si stimoli il N. ischiatico ovvero l'area cutanea. Nel primo caso (fig. 1 B), si nota d'ordinario una netta diminuzione della frequenza delle punte (inibizione dello *spiking*); gli impulsi destati dalla stimolazione termica dell'area riflessogena provocano invece (figg. 2 C e 3 B) un aumento della frequenza delle punte derivate dalla corteccia motrice stricninizzata (intensificazione dello *spiking*).

L'aumento che si ottiene per stimolazione dell'area cutanea, è di grado diverso nei singoli animali: in una parte di essi (33 % circa) la cadenza delle scariche del centro stricninizzato non arriva mai a superare i valori di 6–8 punte per secondo (fig. 3 B), anche dopo avere più volte ripetuto l'applicazione dello stimolo e rinnovato il trattamento stricninico del centro corticale; negli altri Cani (66 % circa), dai valori di frequenza rilevabili in condi-

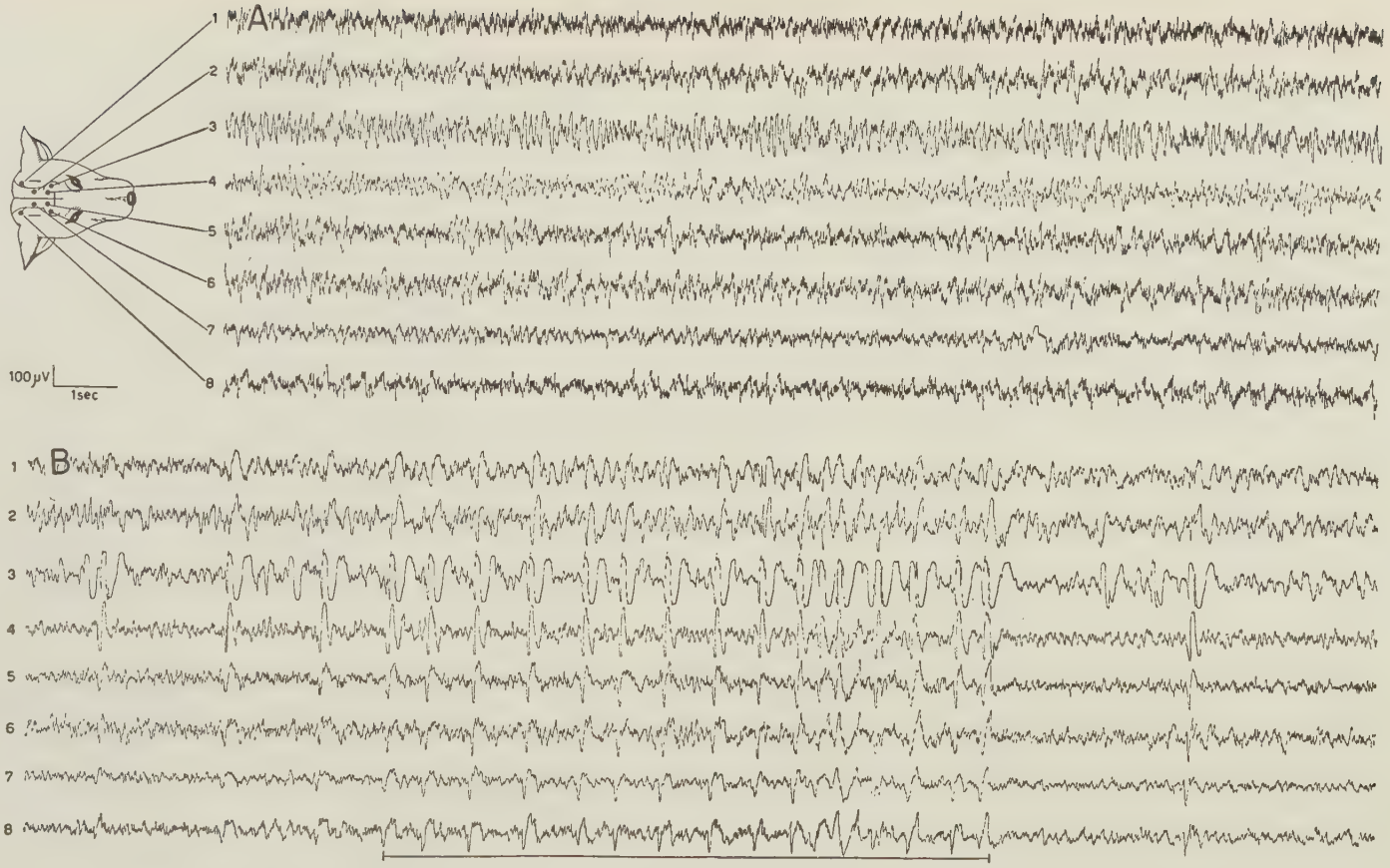


Fig. 3. - Modificazioni dell'attività elettrica cerebrale di Cane non predisposto alla epilessia riflessa, osservabili per effetto della stimolazione dell'area cutanea connessa funzionalmente con un centro motore corticale trattato con stricnina.

A, tracciato ottenuto avanti la stricninizzazione. B, 9 min dopo l'applicazione di una soluzione di stricnina (nitrato all'1 %) sulla corteccia motrice del lato sinistro, in corrispondenza del centro del M. orbicolare palpebrale e durante (linea continua) la stimolazione termica cutanea del lato destro del muso. Si osservi come la frequenza dello *spiking* derivabile dal centro stricninizzato aumenti scarsamente e solo durante la stimolazione.

zioni basali (1–2 per secondo) si passa più o meno rapidamente a frequenze di 10–15 punte al secondo. Quando la frequenza delle punte ha raggiunto un certo valore, che nel più dei casi è di 11–13 per secondo (frequenza critica), si osserva la diffusione delle onde convulsive a tutta la corteccia (fig. 2 D): dapprima nelle aree corticali contigue al centro stricninizzato, poi in tutta la corteccia dell'emisfero ipsilaterale rispetto al centro stesso e infine in quella dell'emisfero contralaterale si fanno manifeste onde convulsive di grande ampiezza (1 mV), la cui frequenza all'inizio appare in tutte le aree corticocerebrali esplorate quella medesima degli *spikes* registrati nell'area motrice stricninizzata, poi si modifica in modo autonomo nelle diverse aree. Analogamente, la frequenza delle punte del centro stricninizzato ora persiste immodificata fino alla fine dell'accesso (1–4 min), ora diminuisce rispetto ai valori osservati durante la stimolazione cutanea e all'inizio della propagazione delle onde convulsive, senza che si alteri corrispondentemente il ritmo dell'attività registrata dalle altre regioni corticali.

Le differenze accertate nelle presenti indagini tra gli effetti centrali della stimolazione dell'area riflessogena cutanea nei Cani predisposti e in quelli non predisposti alla epilessia riflessa, inducono a dare ai fenomeni elettrici che si svolgono nell'area stricninizzata una importanza maggiore di quella che di solito viene ad essi attribuita come causa della propagazione dell'attività convulsiva a tutta la corteccia: un certo livello di intensificazione dello *spiking* stricninico che la stimolazione periferica provoca nei due gruppi di animali, sembra invero una condizione necessaria per la generalizzazione dell'ipersincronia parossistica che si osserva nei Cani predisposti.

In una concezione schematica, la irradiazione riflessa dell'attività convulsiva può dipendere sia dai caratteri dell'attività medesima nell'area motrice stricninizzata, sia dalla diversa suscettività che la corteccia circostante presenta agli impulsi epilettogeni originati nell'area stessa. La prima possibilità, e cioè il fatto che il manifestarsi o non dell'irradiazione dipenda da particolari caratteristiche (voltaggio, frequenza e forma) delle onde convulsive provocate nella corteccia motrice dalla stricnina e intensificate dalle stimolazioni riflessogene, e quindi dalla maggiore o minore efficacia epilettogena degli impulsi che da tale area corticale si dipartono, non viene generalmente presa in considerazione. Si propende per la seconda ipotesi, per altro non sul fondamento di fatti probanti, i quali cioè attestino l'esistenza nella corteccia estramotrice di condizioni atte a favorire ovvero ostacolare la propagazione delle onde epilettiche dall'area stricninizzata, ma bensì per esclusione: in effetti si ritiene che l'attività destata dalla stricnina nella corteccia motrice presenti caratteri praticamente identici nei diversi animali [cfr. Moruzzi [5]]. Il che si dedurrebbe dalla osservazione che il clono di Baglioni e Magnini è un fenomeno costante e nei suoi caratteri (tempo di comparsa, frequenza e ampiezza delle contrazioni dei muscoli corrispondenti all'area corticale stricninizzata) indipendente dallo stato di predisposizione. A nostro giudizio, tale dato non giustifica tuttavia la conclusione che se ne trae, giacché i caratteri della contrazione clonica dei muscoli pos-

sono difficilmente riguardarsi come un indice fedele del livello di attività dei neuroni corticali che la controllano, tenuto conto dell'azione « attenuante » [Moruzzi (5)] dei centri spinali. D'altra parte, la epilessia faradica si osserva praticamente in tutti i Cani [Amantea (1)], il che dimostra come la irradiazione dell'attività convulsiva venga costantemente in atto ogni qualvolta la sua intensità in un'area circoscritta della corteccia superi un certo livello e possa quindi essere indipendente dalla « permeabilità » dei sistemi neuronici corticali.

Ora, gli esperimenti che abbiamo riferiti portano appunto a ritenere che nei Cani predisposti si avverino condizioni non molto dissimili da quelle attuate nella epilessia faradica. Per quanto concerne la intensità dei fenomeni elettrici capaci di suscitare l'attività convulsiva nelle aree circostanti, l'area corticale epilettogena presenterebbe nella epilessia faradica e in quella riflessa differenze solo di grado e, verosimilmente, non cospicue.

Fisiologia. — *Effetti epilettogeni della morfina nella corteccia cerebrale isolata del Cane predisposto e del non predisposto alla epilessia riflessa* (*). Nota di PAOLO CREPAX e FRANCESCO INFANTELLINA, presentata (**) dal Socio G. C. PUPILLI.

Un'analisi del meccanismo neurofisiologico con cui la morfina rende effettuabile la epilessia riflessa in Cani non predisposti [Amantea (1)], deve innanzi tutto tener conto del fatto che l'azione di tale alcaloide si estende praticamente a tutti i diversi livelli d'integrazione del sistema nervoso centrale [letteratura in Wikler (2)]. Nell'esaminare le modificazioni funzionali che la sostanza provoca nelle diverse parti del nevrasse, è quindi necessario sperimentare in condizioni che escludano reciproche interferenze tra le funzioni integrate ai diversi livelli.

Per esempio, poiché la morfina modifica in modo cospicuo gli effetti dell'attivazione esercitata dal sistema reticolare ascendente sulla corteccia cerebrale [Arduini e Arduini (3); Crepax e Fadiga (4)], le modificazioni della reattività corticale provocate dalla morfina somministrata per via generale non hanno di per sé significato patente rispetto alla loro origine, che può essere primaria o secondaria. La qual cosa per un lato può spiegare le contrastanti conclusioni a cui sono giunti gli Autori che hanno indagato l'eccitabilità corticale nell'animale morfinizzato [cfr. Crepax e Infantellina (5)], mentre per l'altro dà evidenza alla necessità di procedere allo studio dell'azione esercitata dal farmaco sulla corteccia cerebrale in condizioni tali da escludere che i fenomeni osservati possano dipendere da alterazioni funzionali provocate in strutture estrinseche alla corteccia medesima. La tecnica del lembo isolato di corteccia cerebrale attuata da Burns (6) nel Gatto e da noi adattata al Cane (7), offriva le condizioni sperimentali più convenienti al nostro studio.

Il lembo corticale isolato di Cane abbiamo allestito, in ciascun animale, dopo aver indagato lo stato di predisposizione alla epilessia riflessa. Come risulta dalle nostre precedenti ricerche (7), nei lembi non trattati differenze di reattività tra i preparati allestiti in animali predisposti ovvero non predisposti si riscontrano unicamente negli effetti prodotti dalla stimolazione iterativa, la quale desta nei primi un'attività convulsiva persistente, mentre

(*) Lavoro eseguito, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche, nell'Istituto di Fisiologia umana della Università di Bologna.

(**) Nella seduta dell'8 novembre 1958.

(1) G. AMANTEA, « Atti r. Accad. Med. Roma », L, 11 (1923–24).

(2) A. WIKLER, « Pharmacol. Rev. », II, 435 (1950).

(3) A. ARDUINI a. M. G. ARDUINI, « J. Pharmacol. », CX, 76 (1954).

(4) P. CREPAX e E. FADIGA, « Arch. Sci. biol. », in corso di stampa.

(5) P. CREPAX e F. INFANTELLINA, « Arch. Sci. biol. », XL, 147 (1956).

(6) B. D. BURNS, « J. Physiol. », CXI, 50 (1950); CXII, 156 (1951); CXXV, 427 (1954).

(7) P. CREPAX e F. INFANTELLINA, « Arch. Sci. biol. », XLI, 1 (1957).

provoca nei secondi scariche di breve durata e non dissimili da quelle dovute a stimoli elettrici isolati: i controlli eseguiti provano che queste differenze di reattività non sono riferibili all'accesso epilettico provocato nel saggiare lo stato di predisposizione. Tra i due gruppi di preparati non si osserva differenza alcuna quanto all'attività elettrica spontanea e alle risposte evocate da stimoli elettrici singoli.

La tecnica sperimentale impiegata è quella descritta nelle Memorie citate [5,7]. La morfina si faceva agire sul lembo secondo il metodo di Baglioni e Magnini [8]: dischetti di carta bibula imbevuti di una soluzione di cloridrato di morfina all'1 %, preparata al momento dell'uso, venivano posti sul tratto di corteccia libera che si estende dalla sede degli elettrodi di stimolazione a quella dell'elettrodo critico di derivazione e tutt'intorno a quest'ultima; ivi erano lasciati per 6–8 min. In molti casi, 30 e 60 min dopo l'inizio del trattamento, questo è stato ripetuto, ogni volta mantenendo per 6–8 min i dischetti imbevuti della soluzione di morfina in contatto con la corteccia.

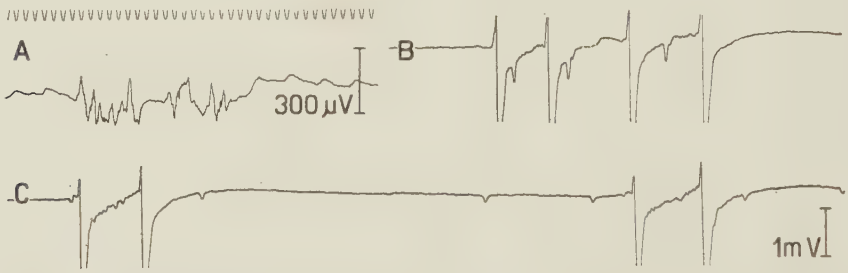


Fig. 1. – Attività elettrica del lembo isolato di corteccia cerebrale di Cane predisposto alla epilessia riflessa e modificazioni dell'attività medesima per effetto del trattamento del preparato con soluzione di morfina (cloridrato all'1 %). La deflessione del tracciato verso l'alto corrisponde a una variazione negativa del potenziale. Ciascun valore di amplificazione si riferisce al grafico a cui è affiancato e inoltre a tutti i precedenti che ne sono privi. In A è indicato il tempo = 0,1 sec. Tra A e B il preparato è stato trattato, per la durata di 6 min, con soluzione di morfina.

A, attività spontanea. B e C, 16 min e rispettivamente 40 min dopo l'inizio del trattamento: attività manifestatasi in modo apparentemente spontaneo.

I primi effetti della morfina si palesano, 10 min circa dopo l'inizio del trattamento, con alterazioni delle oscillazioni di potenziale che nel lembo possono essere presenti in mancanza della stimolazione elettrica. Tali oscillazioni si riscontrano di regola nel 70 % circa dei preparati, indipendentemente dallo stato di predisposizione dell'animale [7]: esse (fig. 1 A) sono costituite da lente onde superficie–positive (della durata di 1–2 sec e dell'ampiezza di 300–800 μV), i cui contorni appaiono, soprattutto nella seconda metà dell'onda, frastagliati da oscillazioni di piccola ampiezza (30–100 μV) e di elevata frequenza (50–65 Hz). Tali onde si succedono ora separate da pause piuttosto

(8) S. Baglioni e M. Magnini, «Arch. Fisiol.», VI, 240 (1909).

lunghe (da 2 a 10 sec), ora in modo quasi continuo. Il ritmo complessivo varia notevolmente da preparato a preparato, ma presenta caratteri relativamente costanti in uno stesso preparato.

L'effetto del farmaco si traduce innanzi tutto in una modificazione della forma delle onde (fig. 1 B e C): la fase iniziale si fa più rapida e la durata di ciascuna onda si accorcia fino a 0,3–0,6 sec; i contorni delle onde si fanno progressivamente più lisci per la riduzione e poi la scomparsa delle oscillazioni asincrone, che d'ordinario li frastagliano. In genere, solo quando la forma delle onde elettriche si è modificata nel modo ora esposto, e cioè 15 min circa dopo l'inizio del trattamento, cominciano a crescere l'ampiezza e la frequenza delle onde stesse: l'aumento di frequenza perdura a lungo e col rinnovarsi del trattamento con morfina manifesta una lenta ma evidente progressione; l'ampiezza delle onde aumenta fino a raddoppiarsi tra il 15° e il 30° min dopo l'inizio del trattamento, ma non si modifica ulteriormente, anche rinnovando l'applicazione del farmaco.

Nei lembi corticali che avanti il trattamento sono privi di oscillazioni elettriche spontanee, l'applicazione topica di morfina provoca la comparsa di onde, che hanno i caratteri dianzi descritti e la cui frequenza è generalmente minore rispetto a quella delle onde riscontrabili nei preparati nei quali un'attività elettrica ritmica preesisteva al trattamento col farmaco.

Dal raffronto delle osservazioni fatte su lembi allestiti rispettivamente in Cani predisposti e in Cani non predisposti, risulta come lo stato di predisposizione dell'animale non influisca in alcun modo sui caratteri delle modificazioni che le manifestazioni bioelettriche finora prese in esame palesano per effetto della morfina.

Un impulso rettangolare, della durata di 0,5 msec e di voltaggio compreso tra 4 e 7 V, desta normalmente nel lembo di Cane una deflessione superficie–positiva, analoga a quelle che insorgono spontaneamente nel preparato e che abbiamo descritte più sopra; la risposta, in ogni suo aspetto, è indipendente dallo stato di predisposizione dell'animale [7]. Per il trattamento con morfina, nel preparato di Cane predisposto, può osservarsi un lieve abbassamento della soglia della risposta corticale, ma si tratta di variazioni non costanti e manifeste per breve tempo; quando poi si fanno palesi modificazioni nette della forma, dell'ampiezza e della durata della risposta corticale, i valori degli stimoli liminali appaiono generalmente invariati rispetto alla norma. Le modificazioni delle risposte compaiono contemporaneamente a quelle delle onde cosiddette spontanee, ossia 10–15 min circa dopo l'inizio del trattamento, assumono caratteri assai netti entro il 30° min e non variano poi in modo significativo. Le modificazioni stesse dipendono da un aumento progressivo della sincronizzazione degli elementi reattivi: la deflessione iniziale si fa più brusca e i suoi contorni più lisci, mentre diminuisce la durata dell'onda e cresce all'opposto la sua ampiezza. Anche la risposta del lembo a stimoli elettrici isolati, non diversamente dall'attività elettrica spontanea, presenta per effetto della morfina alterazioni identiche nei Cani predisposti e in quelli non predisposti.

Una serie di impulsi della durata di 0,5 msec e di voltaggio pari al doppio di quello liminale per la risposta isolata, i quali impulsi si succedano per 5 sec con la cadenza di 50 Hz, provoca nel lembo di Cane predisposto alla epilessia riflessa la comparsa di un'attività convulsiva persistente [7], mentre in quello di Cane non predisposto provoca la comparsa di una o poche scariche di onde durante la stimolazione e talora nei primi 1–2 sec successivi (fig. 2 A). Nei diversi preparati differiscono soprattutto la durata dell'attività convulsiva e i valori di frequenza minimi efficaci delle stimolazioni epilettogene [9]: mentre in alcuni di essi l'attività convulsiva provocata da ciascuna stimolazione è di breve durata e il suo manifestarsi risulta subordinato all'impiego di stimoli di cadenza relativamente elevata, pari a 40–50 Hz, in altri un'attività convulsiva assai prolungata si palesa costantemente anche con stimolazioni di bassa frequenza (fino a 15 Hz).

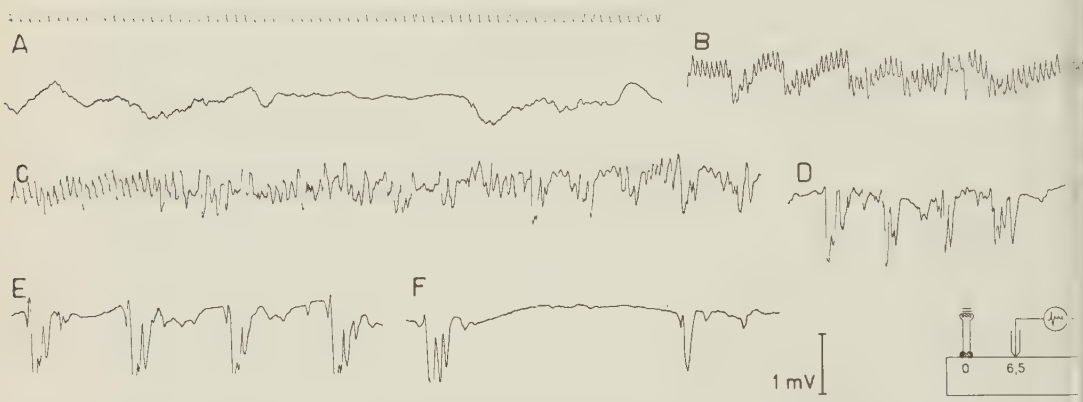


Fig. 2. – Attività elettrica del lembo isolato di corteccia cerebrale di Cane non predisposto alla lessia riflessa e modificazioni dell'attività medesima per effetto del trattamento del preparato con solu di morfina (cloridrato all'1 %). Lo schema disegnato sul lato destro in basso indica la posizione degli trodi di stimolazione e di derivazione, e i valori in millimetri della distanza rispettiva; la parte tratteg corrisponde alla zona di corteccia elettrocoagulata. Per le altre indicazioni si veda la leggenda della

Tra A e B il preparato è stato trattato per due volte (con un intervallo di 30 min) con morfina, ciascun trattamento essendo della di 6 min. A, prima del trattamento: attività registrata subito dopo la fine di una stimolazione iterativa (9 V; 0,5 msec; 120 Hz; 5 C, D, E e F, 28 min dopo la fine del secondo trattamento: effetti di una stimolazione iterativa (9 V; 0,5 msec; 50 Hz; 5 sec) registrata dopo la fine (B) e rispettivamente 7 (C), 51 (D), 80 (E) e 90 (F) sec dopo la fine della stimolazione iterativa medesima.

Nel lembo di Cane predisposto, 40–50 min dopo l'inizio del trattamento con morfina, si osserva generalmente un aumento della durata dell'attività convulsiva (del 20–50 %) e un abbassamento dei valori della frequenza critica della stimolazione convulsivante: quest'ultimo fatto si rileva costantemente in quei casi nei quali i valori stessi erano avanti l'applicazione relativamente elevati (40–50 Hz), mentre la variazione della frequenza critica appare incostante, quando i valori medesimi erano inizialmente bassi (15–20 Hz).

Nel preparato di Cane non predisposto, trattato con morfina, gli effetti della stimolazione iterativa non mutano sostanzialmente nei primi 30 min

(9) P. Crepax e F. Infantellina, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XXXII, 970 (1956).

successivi all'inizio del trattamento: solo si nota che l'attività destata dalla stimolazione stessa è costituita da oscillazioni di aspetto fortemente sincronizzato, analogo a quello che nel medesimo preparato contemporaneamente presentano le onde destate da stimoli elettrici isolati; per altro, la durata complessiva della risposta non supera quella dei fenomeni elettrici provocabili avanti il trattamento. Gli effetti della stimolazione iterativa si modificano invece nettamente col prolungare l'azione del farmaco, il che nelle condizioni dell'esperimento si mette in atto rinnovandone l'applicazione: all'incirca 50–55 min dopo il trattamento iniziale [10], le onde destate dalla stimolazione iterativa non si estinguono più in breve tempo (1–2 sec), ma si succedono per 8–15 sec con un ritmo via via più frequente, per assumere infine un aspetto nettamente convulsivo (fig. 2 B–F). La durata di tale attività provocata può in seguito accrescersi ulteriormente (per esempio, fino a 30–40 sec, perdurando il trattamento da 80 min). Mentre i caratteri dell'attività convulsiva si modificano scarsamente nel tempo, il prolungarsi dell'azione della morfina importa modificazioni rilevanti quanto ai valori di frequenza minimi efficaci delle stimolazioni epilettogene: in tempi successivi l'attività ipersincrona può essere destata con stimolazioni iterative di frequenza via via minore (fig. 2) e a 90–100 min dall'inizio del trattamento risultano spesso efficacemente convulsivanti stimolazioni effettuate con cadenza di 15–20 Hz.

Ci si può domandare se l'azione predisponente che alla epilessia riflessa manifesta la morfina, sia in qualche modo collegabile con le variazioni delle proprietà funzionali che il farmaco provoca nel lembo corticocerebrale.

Si è fatto presente come la sola differenza che rispetto alla reattività della corteccia cerebrale isolata esiste tra i preparati allestiti in animali predisposti e quelli allestiti nei non predisposti, concerna gli effetti della stimolazione iterativa, la quale evoca un'attività convulsiva autonoma e persistente nei primi, mentre è priva di ogni effetto convulsivante nei secondi [7]. La peculiare reattività che la corteccia cerebrale isolata del Cane predisposto manifesta alla stimolazione iterativa, è espressione di una proprietà funzionale che può spiegare nell'animale con nevrasse integro la irradiazione dell'attività convulsiva, inizialmente circoscritta nell'area motrice, a tutto il mantello corticocerebrale [Crepax e Infantellina [7]]: invero, la propagazione dell'attività convulsiva nella corteccia appare subordinata al fatto che gl'impulsi originati dal gruppo di neuroni in attività ipersincrona possano avviare in aree collegate anatomicamente [Rosenblueth e Cannon [11]; Rosenblueth, Bond e Cannon [12]] un'attività analoga che acquisti carattere autonomo, e in modo mediato vengano così estendendo progressivamente la loro

(10) Per uniformità continueremo a computare il tempo a partire dall'inizio del primo trattamento, il quale, come si è detto, era seguito tra il 30° e il 40° min e tra il 60° e il 70° min rispettivamente da un secondo e da un terzo trattamento.

(11) A. ROSENBLUETH a. W. B. CANNON, « Amer. J. Physiol. », CXXXV, 670 (1941–42).

(12) A. ROSENBLUETH, D. D. BOND a. W. B. CANNON, « Amer. J. Physiol. », CXXXVII, 681 (1942).

azione a tutta la corteccia. Quando invece gli effetti destati dal bombardamento degli impulsi epilettogeni in aree contigue al *focus* non assumono un carattere autonomo, la propagazione dell'attività convulsiva diventa a distanza, ossia con l'aumentare del numero delle sinapsi interposte, sempre meno probabile: il focolaio che funge da *pace-maker* del ritmo convulsivo [11], viene infatti intrattenendo tutt'intorno ritmi pulsatòri meno frequenti di quello suo proprio, per effetto del *décalage* di frequenza dovuto alla trasmissione sinaptica degli impulsi [Moruzzi [13]], e la sua azione epilettogena si attenua per ogni nuova sinapsi interposta.

Ora, poiché le modificazioni funzionali prodotte dalla morfina nel lembo di Cane non predisposto valgono a conferire al lembo stesso una reattività in tutto simile a quella che è naturalmente presente nella corteccia cerebrale isolata del Cane predisposto, e poiché nell'animale predisposto tale particolare reattività appare determinante per la generalizzazione dell'attività convulsiva corticale, si può fondatamente credere che gli effetti prodotti dalla morfina sulla corteccia cerebrale costituiscono un fattore significativo dell'azione predisponente del farmaco.

(13) G. Moruzzi, *L'épilepsie expérimentale*. Paris, Hermann, 1950.

Patologia. — *Colorazione delle sezioni ultrasottili per il microscopio elettronico per mezzo dell'impregnazione argentica.* Nota di VITTORIO MARINOZZI, presentata(*) dal Socio G. BOMPIANI.

La letteratura ormai cospicua, inerente alla colorazione delle sezioni ultrasottili per il microscopio elettronico, dimostra il grande interesse che riveste questo argomento, sia in vista di una migliore evidenziazione di certe particolari strutture che, per la loro scarsa osmiofilia, sono poco visibili con i metodi usuali, sia ai fini della realizzazione di una indagine istochimica a livello ultrastrutturale.

Quasi tutti i metodi proposti finora utilizzano la capacità di alcuni substrati organici di fissare certi metalli pesanti ed in essi vengono adoperati l'acido fosfotungstico [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] o l'acetato di uranile [6]. La colorazione può farsi direttamente su frammenti di tessuto fresco (ed in tal caso la sostanza colorante funge da fissativo, analogamente a quanto accade quando i frammenti siano fissati col tetrossido di osmio) [4, 6]; oppure la colorazione viene eseguita, dopo la fissazione in acido osmico, durante la disidratazione dei frammenti [2, 3, 4] od anche viene praticata direttamente sulle sezioni ultrasottili, tuttora incluse in metacrilato [7]. Quest'ultima tecnica avrebbe il vantaggio di evitare la distorsione che si produce nei tessuti quando la colorazione venga eseguita prima dell'inclusione.

I tentativi di impiegare l'impregnazione argentica per la colorazione delle sezioni ultrasottili sono stati, finora, del tutto sporadici. Wassermann e Kubota [8] hanno impiegato il metodo di Gomori, su frammenti di tessuti fissati in formalina o in acido osmico, effettuando l'impregnazione prima dell'inclusione nel metacrilato. Con procedimento analogo Lacy e Challice [9] hanno applicato il metodo di Aoyama per la colorazione dell'apparato del Golgi. I risultati conseguibili con il detto procedimento presentano gravi inconvenienti per la frequenza con la quale si producono grossolani precipitati d'argento, anche al di fuori delle strutture argentofile e per l'incostante riuscita della colorazione, specialmente dopo la fissazione in acido osmico.

In precedenti lavori ho segnalato che si può ottenere una buona colorazione delle sezioni ultrasottili con il metodo di Jones (acido perjodico–argento–urotropina) [10], sia per il microscopio ottico [11], che per quello elettronico [12]. Per la buona riuscita del metodo raccomandavo di eliminare il metacrilato dalle sezioni mediante passaggio in etere etilico; ma successive ricerche mi hanno dimostrato che è possibile ottenere una impregnazione completa, anche senza togliere il metacrilato, a condizione di aumentare la temperatura di incubazione della soluzione di argento ammoniacale.

(*) Nella seduta dell'8 novembre 1958.

Metodica della colorazione.

Piccoli frammenti di vari tessuti sono stati fissati in acido osmico al 2 %, tamponato a pH 7,2 secondo Palade, ed inclusi in metil–butil metacrilato 1/20. Le sezioni ultrasottili (300–400 Å circa), raccolte su vetrini porta–oggetti previamente ricoperti con pellicola di formvar, venivano passate attraverso la serie discendente degli alcools e l'acqua bidistillata e sottoposte ad impregnazione argentica con il metodo di Jones, secondo le modalità già da me descritte nella Nota su citata [12]. Il trattamento con la soluzione di argento ammoniacale veniva eseguito in stufa a 60° C, per 2–3 ore.

Alcune sezioni sono state sottoposte all'impregnazione argentica senza previa ossidazione con acido perjodico.

Le osservazioni sono state effettuate al microscopio elettronico dell'Istituto superiore di Sanità.

Risultati.

Le strutture istologiche che dimostrano una spiccata argentaffinità con il metodo di Jones – nella modificazione da me proposta – sono molto numerose. Segnalo, in particolare, le membrane basali dei glomeruli e dei tubuli renali; le membrane basali (epiteliale ed endoteliale) degli alveoli polmonari; le fibre elastiche e reticolari; i globuli rossi; i granuli delle mastzellen e dei granulociti eosinofili; i granuli di zimogeno delle cellule esocrine del pancreas; le formazioni vescicolari dell'apparato del Golgi ed alcune particolari inclusioni citoplasmatiche, di svariate cellule, di significato tuttora dubbio.

L'argentaffinità delle strutture ora elencate sussiste anche quando si ometta il passaggio in acido perjodico; in tal caso, però, i risultati sono meno costanti e, talvolta, subordinati alla durata del trattamento con la soluzione di argento ammoniacale, come avviene, ad esempio, per le membrane basali dei glomeruli e dei tubuli renali.

Oltre alle formazioni ora elencate, che si evidenziano particolarmente per le loro intensa argentaffinità, ho potuto osservare che anche le principali strutture protoplasmatiche assumono, con le dette metodiche, un risalto particolare, tale che ne consente il riconoscimento già all'osservazione diretta al microscopio elettronico.

Nell'esposizione che segue illustrerò alcuni reperti che ritengo più dimostrativi e che – nella particolareggiata illustrazione del loro significato dottrinale – formeranno oggetto di un mio ulteriore contributo.

Le figg. 1 e 2 mostrano un particolare della parete di due tubuli contorti di prim'ordine di un rene di ratto neonato. È manifesto l'elevato contrasto di tutte le strutture citoplasmatiche, e così pure l'intensa argentaffinità della membrana basale e delle vescicole componenti l'apparato del Golgi. Anche le creste mitocondriali sono colorate dall'argento; il loro riconoscimento, però, è ostacolato dal materiale granulare interposto (notoria-

mente abbondante nei mitocondri dell'epitelio tubulare dei reni di animali neonati [13]) reso anch'esso più evidente dall'impregnazione argentica, al pari di quello contenuto entro i numerosi vacuoli citoplasmatici.

Nella fig. 3 è rappresentato un particolare dell'interstizio di un setto alveolare di polmone di ratto. Si riconoscono alcune fibrille reticolari la cui struttura periodica è esaltata dall'impregnazione argentica, realizzata, in tal caso, senza previa ossidazione con acido perjodico. La misurazione del periodo, effettuata su una diecina di osservazioni, dà valori oscillanti tra 270 e 300 Å. In conformità del parere espresso da altri studiosi circa l'argentaffinità delle fibre reticolari [14], ritengo probabile che la deposizione dell'argento abbia luogo in corrispondenza della banda A del periodo assiale.

La fig. 4 A mostra un macrofago endoalveolare di polmone di ratto, nel cui citoplasma sono disseminati numerosi corpuscoli rotondeggianti e intensamente argentaffini, corrispondenti, con ogni verosimiglianza, alle inclusioni citoplasmatiche descritte da Schulz [15] come citosomi. Le dette inclusioni sono particolarmente numerose e voluminose nei polmoni da stasi (fig. 4 B); in tal caso l'impregnazione argentica rende difficile la sicura identificazione dei granuli ferruginosi, notoriamente abbondanti nei citosomi. (Anche i preparati ai quali si riferiscono queste ultime due figure sono stati colorati omettendo il trattamento con l'acido perjodico).

COMMENTO E CONCLUSIONI.

Il metodo di Jones si basa sulla proprietà dei gruppi aldeidici, liberati per ossidazione dei legami 1–2 glycol con acido perjodico, di ridurre una soluzione ammoniacale di argento [16]. Si ritiene che il substrato responsabile di tale reazione sia costituito in massima parte dai polisaccaridi e dalle glicoproteine. Al detto metodo, però, non si può attribuire un preciso significato istochimico in quanto l'argentaffinità di talune particolari strutture sussiste indipendentemente dall'azione ossidante dell'acido perjodico (argentaffinità primaria) come pure dopo bloccaggio dei gruppi aldeidici con cloruro di fenilidrazina (o di anilina) o con cianuro di potassio [17].

Il fatto che l'argentaffinità di alcune strutture si palesi indipendentemente dall'ossidazione delle stesse con acido perjodico, dimostra che il tetrossido di osmio è capace di per sé di provocare la liberazione di gruppi riducenti l'argento in soluzione ammoniacale.

Sulla base delle conoscenze finora acquisite in merito al meccanismo della fissazione con acido osmico [18, 19] non mi è possibile di stabilire con certezza quale sia la natura dei detti gruppi riducenti, né da quale substrato organico essi vengano liberati per l'azione del tetrossido di osmio. Le prime indagini che ho esperito in tal senso mi consentono, però, di asserire con certezza che i detti gruppi riducenti sono, almeno per la maggior parte, diversi da quelli aldeidici o chetonici, in quanto mancano di esplicare una azione riducente nei confronti del reattivo di Schiff.

Bibliografia.

[1] Huxley H. E., « Bioch. Biophys. Acta », *12*, 387 (1953).
[2] Jakus M. E., « J. Biophys. Bioch. Cytol. », *2*, n. 4 (suppl.), 243 (1956).
[3] Huxley H. E., « J. Biophys. Bioch. Cytol. », *3*, 631 (1957).
[4] Hodge A. J., « J. Biophys. Bioch. Cytol. », *1*, 361 (1955).
[5] Bobertson J. D., « J. Biophys. Bioch. Cytol. », *1*, 271 (1955).
[6] Fernández-Morán H. e Finean J. B., « J. Biophys. Bioch. Cytol. », *3*, 725 (1957).
[7] Watson M. L., « J. Biophys. Bioch. Cytol. », *4*, 475 (1958).
[8] Wassermann F. e Kubota L., « J. Biophys. Bioch. Cytol. », *2*, n. 4 (suppl.), 66 (1956).
[9] Lacy D. e Challice C. E., *Symposia of the Soc. for experim. Biol.*, n. X, *Mitochondria and other cytoplasmic inclusions*. Cambridge University Press, p. 62.
[10] Jones B. D., « Am. J. Path. », *33*, 313 (1957).
[11] Marinozzi V., « Atti Acc. Naz. dei Lincei », *24*, 600 (1958).
[12] Marinozzi V., « Atti Acc. Naz. dei Lincei », *24*, 754 (1958).
[13] Clark S. L., « J. Biophys. Bioch. Cytol. », *3*, 349 (1957).
[14] Benedetti E. L., « Scientia Medica Italica », *3*, 1 (1953).
[15] Schulz H., « Beitr. pathol. Anat. », *119*, 71 (1958).
[16] Dettmer N. e Schwarz W., « Zeit. f. Wissenschaftliche Mikroskopie », *61*, 421 (1954).
[17] Lillie R. D., « J. Histochem. Cytochem. », *2* 127 (1954).
[18] Porter K. R. e Kallman F., « Exptl. Cell Research », *4*, 127 (1953).
[19] Bahr G. F., « Exptl. Cell Research », *7*, 457 (1954).

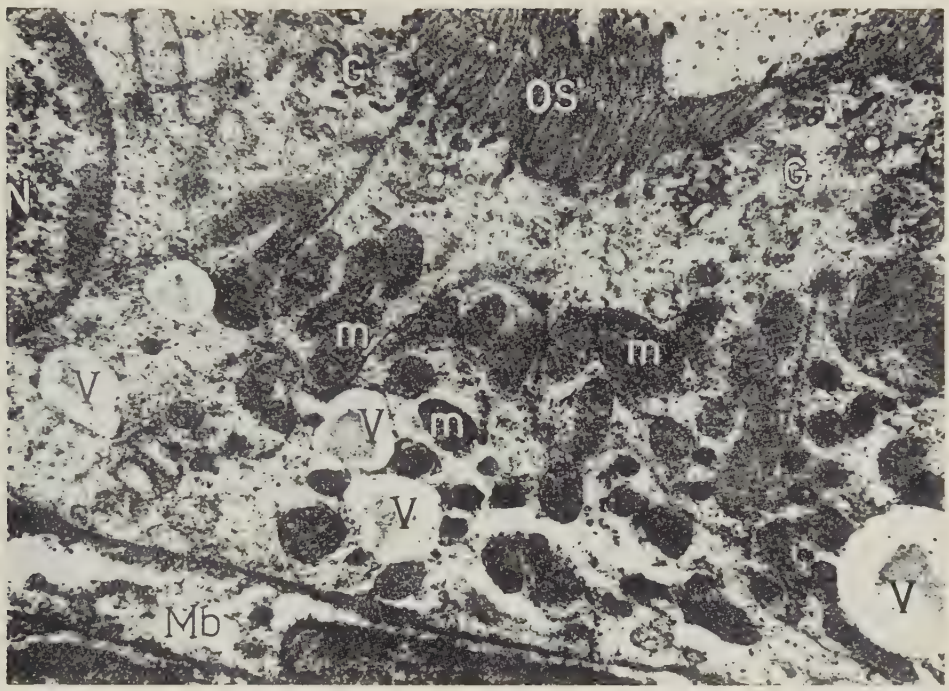


Fig. 1.

OS = orlo a spazzola; m = mitocondri; V = vacuoli; N = nucleo; G = zona del Golgi: Mb = membrana basale (le strutture laminare contenute entro la cellula corrispondono ad introflessioni della membrana citoplasmatica).

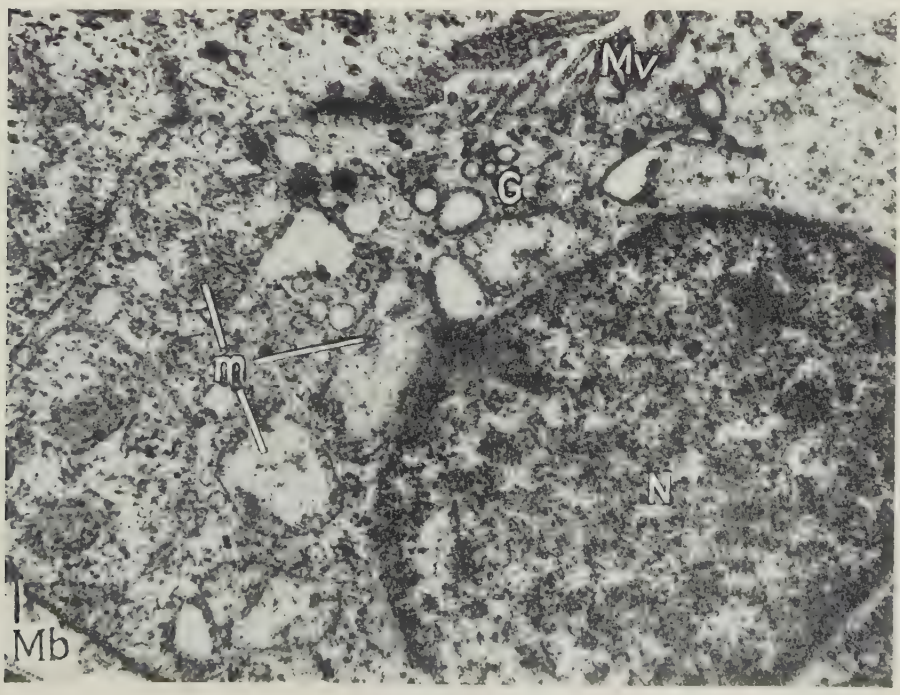


Fig. 2.

N = nucleo; G = zona del Golgi; m = mitocondri (il loro rigonfiamento è causa dell'apparente diradamento delle strutture a cresta); Mb = membrana basale; Mv = microvilli.

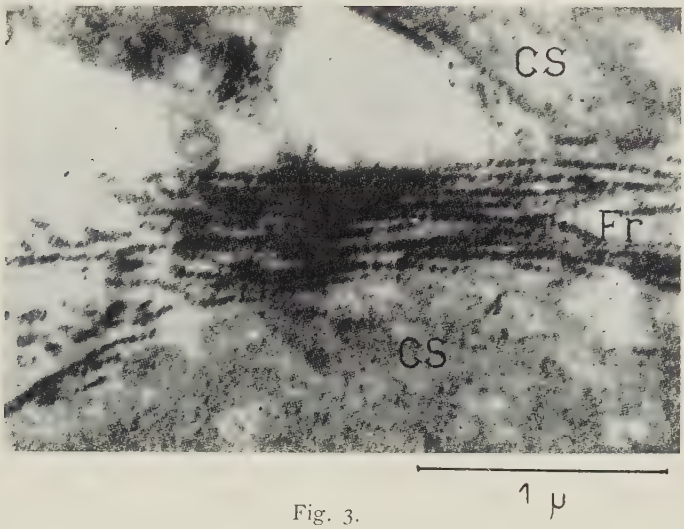


Fig. 3.

Fr = fibrile reticolari; CS = cell. settale.

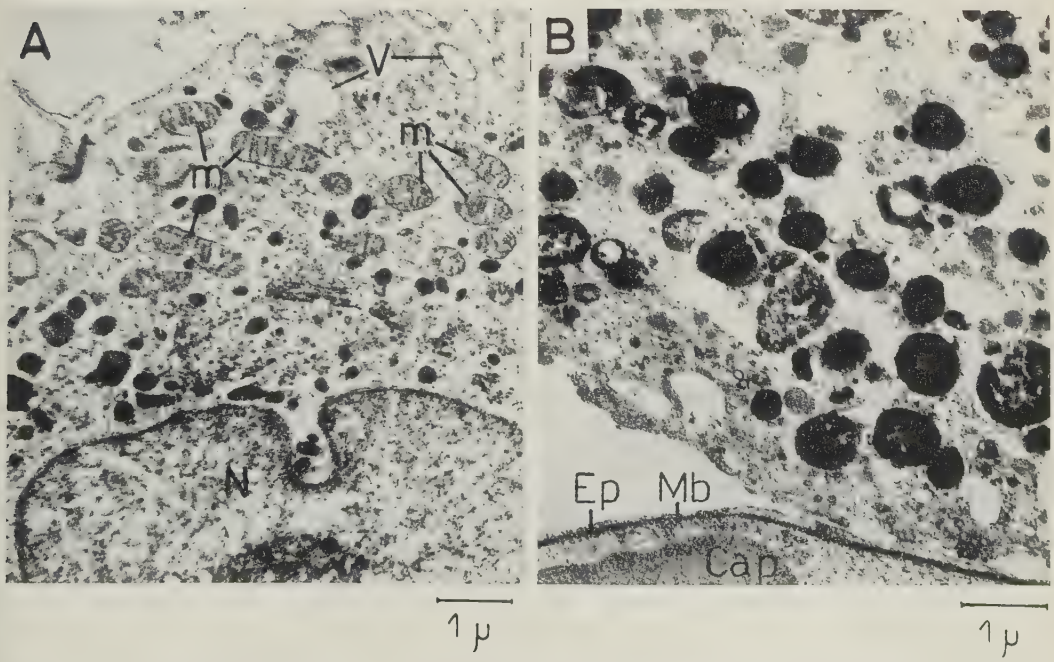


Fig. 4.

N = nucleo; m = mitocondri; V = vacuoli; Ep = espansione citoplasmatica di una cellula epiteliale; Mb = membrana basale; Cap. = capillare di un setto alveolare.

Patologia. — *Osservazioni sulle modificazioni ultrastrutturali del miocardio in ratti trattati con estratto tiroideo.* Nota preventiva di Gian Domenico Bompiani e Antonio Farulla, presentata (*) dal Socio G. Bompiani.

Nei soggetti affetti da morbo di Basedow e da esaltata funzionalità tiroidea, le modificazioni a carico del muscolo cardiaco che si osservano più frequentemente sono costituite da ipertrofia e dilatazione delle pareti dei ventricoli (principalmente del sinistro) e da fenomeni di miocardite interstiziale di preferenza localizzati nelle sezioni ipertrofiche, verosimilmente in rapporto con lo stabilirsi di una sproporzione tra lavoro del cuore e flusso coronarico [2]. Con minore costanza si rilevano zone di degenerazione grassa e di necrosi delle fibre muscolari ed infiltrazione parvicellulare.

Le lesioni tuttavia non sembrano né costanti né specifiche della tireotossicosi.

Nel campo sperimentale, le ricerche condotte allo scopo di definire se la somministrazione di ormone tiroideo dia luogo a quadri morfologici caratteristici forniscono risultati non univoci.

La maggior parte degli Autori ritiene che l'ormone tiroideo presente in dosi tossiche, piuttosto che ledere direttamente il miocardio, lo renda più suscettibile all'azione di altre noxae [4-11-13]. Rimandiamo alla rassegna di Saphir [14] per una esauriente bibliografia sull'argomento.

Da un punto di vista biochimico, nell'ipertiroidismo i processi di ossidazione aumentano a danno della resintesi [1-6]. Lo sganciamento della fosforilazione dal processo ossidativo è stato constatato sia per l'aggiunta di tiroxina nel medium di sospensione dei mitocondri (10^{-5}–10^{-4} mol), sia nei mitocondri isolati di animali trattati *in vivo* con forti dosi di tiroxina [9-10]. La separazione del processo P/O non si verifica qualora si faccia agire la tiroxina sul complesso enzimatico separato dai mitocondri [18] (1).

D'altra parte nelle sospensioni di mitocondri di fegato l'azione decopulante ha luogo con qualche difficoltà, mentre l'azione di rigonfiamento

(*) Nella seduta dell'8 novembre 1958.

(1) La dose di tiroxina capace di provocare lo sganciamento P/O è di circa 4×10^4 della quantità che esiste nei tessuti in condizioni normali [7]. D'altra parte per provocare il rigonfiamento di mitocondri isolati di fegato di ratto, è necessario trattare *in vivo* gli animali con dosi di ormone molto maggiori di quelle necessarie a provocare un ipertiroidismo. Si deve ritenere pertanto che la possibilità di separazione P/O, così come i fenomeni di rigonfiamento osservati nei mitocondri, siano la conseguenza di un'azione farmacologica dell'ormone, non certamente fisiologica [16].

dei mitocondri è immediata anche per concentrazione di tiroxina inefficaci sulla fosforilazione ossidativa (10^{-6} mol).

Sulla base di queste considerazioni Tapley [16] ritiene che l'azione della tiroxina sulla fosforilazione ossidativa sia secondaria alle modificazioni strutturali indotte da questa sostanza nei mitocondri.

I mitocondri separati da tessuti diversi non sono influenzati ugualmente dall'azione della sostanza in esame. Allo stesso modo ogni tessuto reagisce in maniera diversa alla somministrazione *in vivo* di tiroxina.

Nelle Tabelle I e II riportiamo i dati relativi al consumo di ossigeno di alcuni tessuti di animali trattati [6] e rispettivamente quelli relativi al rigonfiamento dei mitocondri isolati da organi diversi per l'aggiunta di tiroxina nel medium di sospensione [17].

Le osservazioni con il microscopio elettronico su frammenti prelevati da animali trattati sperimentalmente con ormone tiroideo sono del tutto recenti.

TABELLA I (da E. S. Gordon e A. E. Heming).

Valori del QO_2 di tessuti prelevati da animali trattati durante 3 giorni con 1000 mg/die di tiroide disseccata per Kg di peso corporeo. Somministrazione per via orale.

Tessuto	Normale		2ª giornata		3ª giornata	
	QO_2	N. animale	QO_2	Aumento %	QO_2	Aumento %
Fegato	5,6	25	7,7	37,5	7,9	41
Rene	22,7	23	29,5	29,9	29,7	30,8
Cuore	3,3	18	3,4	3,0	4,1	24,2

TABELLA II (da D. F. Tapley e C. Cooper).

I valori rappresentano le diminuzioni percentuali della densità ottica di una sospensione contenente il composto in esame (3×10^{-5} M) in rapporto ai valori di una soluzione controllo senza aggiunta della sostanza in esame.

Tessuto	l–tiroxina	d–tiroxina	l–triiodotiroxina
Fegato	30	33	47
Rene	12	10	18
Cuore	2	2	9

Nelle cellule epatiche di ratti Schulz e coll. [15] hanno riscontrato un rigonfiamento diffuso dei mitocondri con perdita quasi completa delle membrane interne e chiarificazione della matrice. Anche le strutture dell'ergastoplasma si presentavano meno opache e rigonfie.

Le osservazioni di Poche [12] sul muscolo cardiaco di ratti intossicati sperimentalmente con l–triiodotiroxina possono riassumersi nei seguenti reperti: aumento del contenuto di lipidi; modica tumefazione dei mitocondri; presenza in alcune regioni di immagini di dilatazione del reticolo sarcoplasmatico. Queste indagini sono state eseguite con dosi altamente tossiche (0,5 mg/die per 7 giorni) di l–triiodotiroxina, la sostanza cioè che si è dimostrata la più efficace tra le preparazioni di ormone tiroidee.

Le nostre attuali esperienze sono state condotte con dosi modeste di estratto totale di tiroide, allo scopo di poter osservare le iniziali modificazioni strutturali consecutive all'azione dell'ormone.

Materiale e metodo.

Le osservazioni sono state eseguite su 10 ratti albini, del peso medio di circa 200 gr. A ciascun animale è stato somministrato per la durata di 20 giorni e per via intraperitoneale 1 cc/die di estratto tiroideo corrispondente a 0,001 gr di polvere e a 0,004 gr di organo fresco.

I prelievi sono stati eseguiti dal cuore pulsante degli animali sottoposti ad anestesia con Nembutal.

I frammenti prelevati dal ventricolo sinistro per l'esame al microscopio elettronico sono stati fissati in acido osmico al 2 % (pH 7,4–7,6), disidratati in alcool etilico ed inclusi in metacrilato di butile. Le sezioni sono state allestite con microtomo Porter–Blum (Servall Inc.) usando lame di vetro, e l'osservazione compiuta con un microscopio R.C.A. Emu 3 b.

Risultati.

Nei ratti trattati con estratto totale di tiroide alle dosi sopraindicate, l'osservazione del tessuto miocardico permette di rilevare come i profili di sezione dei piccoli tubuli e delle vescicole che costituiscono il reticolo sarcoplasmatico abbiamo un diametro maggiore che nel normale. Il rigonfiamento delle formazioni del reticolo costituisce un reperto costante e diffuso su tutti i campi microscopici da noi presi in esame (Tav. I).

Tale rigonfiamento tuttavia è contenuto il più spesso entro limiti relativamente modesti, talché a piccolo ingrandimento il tessuto può apparire non dissimile dal normale. Solo nei casi 4 e 8 abbiamo potuto osservare un aspetto vacuolare rilevabile anche a piccolo ingrandimento e limitato a poche cellule. Le formazioni del reticolo sarcoplasmatico in queste zone sono enormemente dilatate (Tav. II).

Le membrane che delimitano ciascun profilo di sezione sono intensamente osmiofile e spiccano chiaramente per contrasto con la scarsa opacità dello spazio delimitato.

Il lume dei tubuli sembra contenere una sostanza omogenea, debolmente opaca. In essa non infrequentemente si osservano piccole formazioni ad anello (Tav. II), che probabilmente possono essere assimilate alle strutture osservate da Lindner nel ventricolo di cane sottoposto all'azione della strofantina [8].

Le vescicole, delimitate da una sola membrana, contenute negli spazi sarcoplasmatici in immediato contatto o in prossimità delle protomembrane – vescicole pinocitotiche – non sono mai interessate dal processo di rigonfiamento. Molto raramente abbiamo osservato un aumento degli spazi lambdoidei ed uno scollamento delle protomembrane a livello dei dischi intercalari; riteniamo pertanto di potere affermare che la membrana limitante plasmatica di ciascuna cellula non subisce modificazioni morfologiche apprezzabili.

I mitocondri presentano in maniera diffusa fini modificazioni di struttura. La matrice che li costituisce è meno densa e le creste interne, che risaltano con maggior evidenza, sono meno bene ordinate che di norma e spesso interrotte. In uno stesso sarcosoma, accanto ad aree discretamente conservate, si notano alcune zone nelle quali non è più possibile distinguere una struttura (Tavv. I–III).

Soltanto in 3 frammenti prelevati da due casi diversi abbiamo osservato un completo sovvertimento dell'architettura, ma le gravi lesioni erano anche in questi casi limitate ad alcuni sarcosomi mentre le strutture immediatamente circostanti apparivano discretamente conservate (Tav. IV).

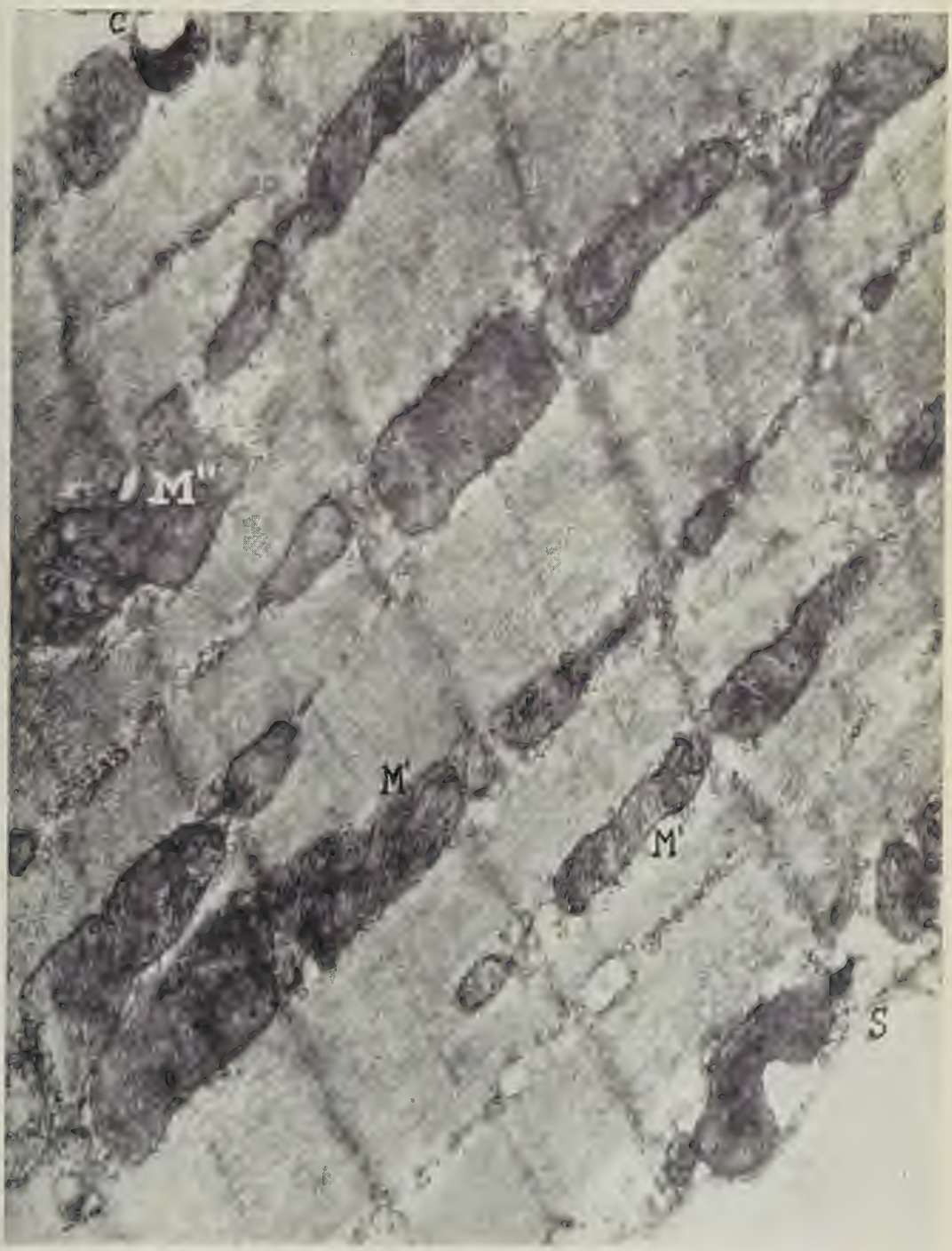
Considerazioni.

Le nostre ricerche, intraprese con altri intendimenti, contemporaneamente e ignorando i risultati di Poche, ci permettono di confermare, almeno in parte, le osservazioni di questo autore e di trarre alcune considerazioni personali.

Riteniamo che le lesioni elementari consecutive all'azione dell'ormone tiroideo sul tessuto miocardico siano da ricercarsi principalmente a livello delle strutture del reticolo sarcoplasmatico e, forse solo secondariamente, a livello dei mitocondri.

Il rigonfiamento delle strutture del reticolo sarcoplasmatico costituisce un reperto costante nelle preparazioni prese in esame. L'aumento di diametro dei profili di sezione dei tubuli e delle vescicole è di modica entità, ma diffuso e tuttavia sensibile nei confronti del tessuto normale.

Siamo d'accordo con Poche nel ritenere che i sarcosomi osservati su sezioni di miocardio non raggiungano lesioni così gravi come quelle descritte da Schulz e coll. nei mitocondri del fegato di ratti trattati con tiroxina. Questo rilievo coincide con i risultati qui sopra riportati di Cooper e Tapley [3] sulla diversa sensibilità alla tiroxina dei mitocondri isolati da organi diversi.



Ratto n. 7. Ventricolo sinistro.

Il reticolo sarcoplasmatico è modicamente dilatato ovunque, in particolare le formazioni contigue alle strie Z. M' = sarcosomi nei quali le creste interne spiccano più chiaramente che di norma per minor densità della matrice. M'' = sarcosomi nei quali non si distingue più alcuna struttura interna. C = citosoma a uolo- anulare. S = sarcolemma; Ingr. 36.000 ×

Ratto n. 4. Ventricolo sinistro.

Si noti la vistosa dilatazione delle strutture del reticolo sarcoplasmatico. Alcune delle vescicole dilatate racchiudono formazioni modicamente osmiofile. Ingr. 72.000 ×

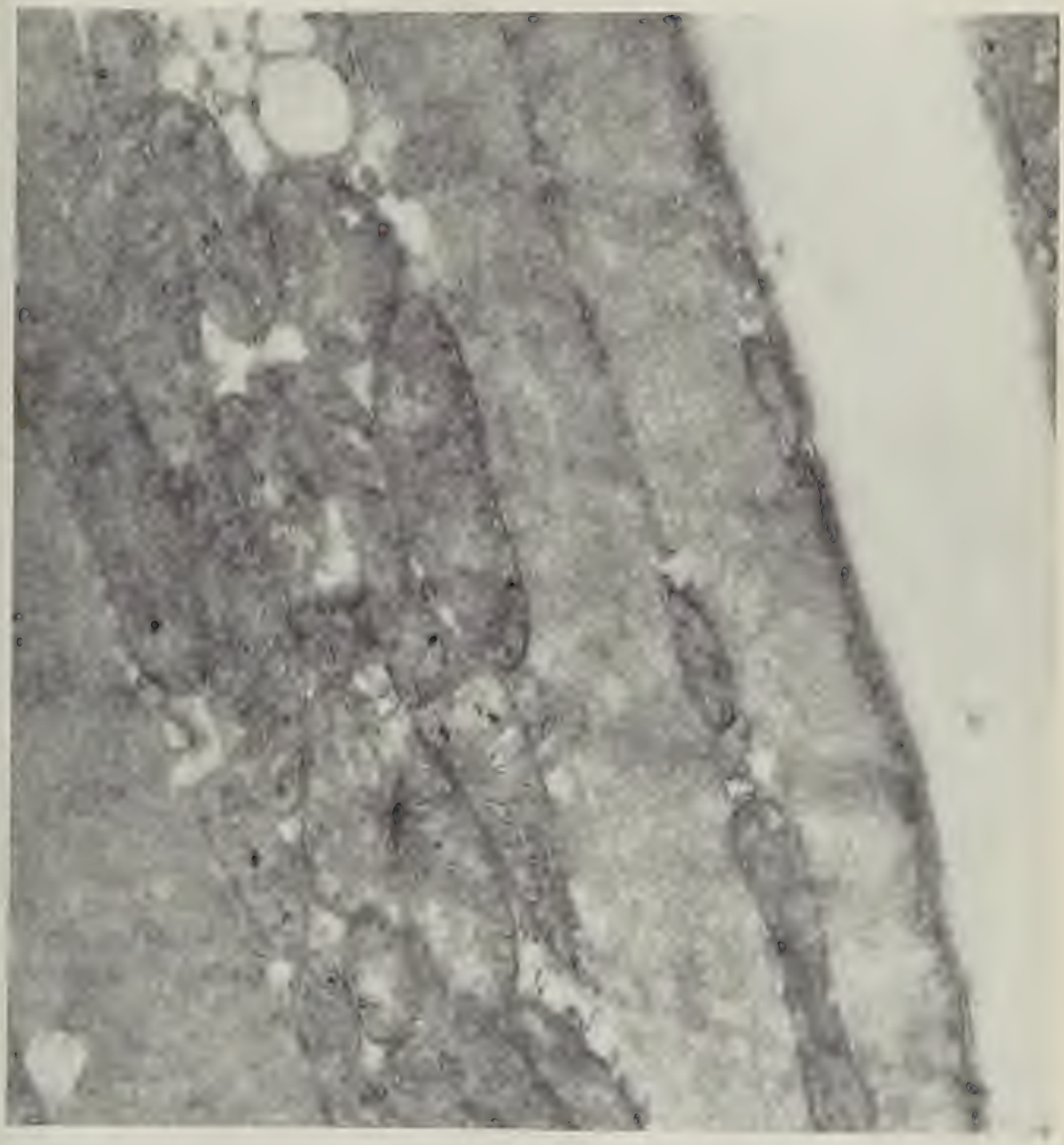


Fig. n. 13. Ventricolo sinistro.

Aspetto normale della sostanza fondamentale nel miocardio. Ingr.

Ratto n. 8. Ventricolo sinistro.

Alterazioni di estrema gravità a carico di alcuni sarcosomi, che mantengono tuttavia la loro individualità. Le formazioni del reticolo sarcoplasmatico, enormemente dilatate, appaiono vuote al microscopio elettronico. Si noti come sarcosomi contigui presentino alterazioni di molta minor intensità. Ingr. 61.500 ×

Noi riteniamo che l'interessamento dei sarcosomi sia generalizzato come risulta dal maggior risalto che acquista il disegno delle creste interne (in rapporto ad una minore opacità della matrice) anche nelle regioni nelle quali il tessuto miocardico si presenta quasi normale.

Ne consegue, a nostro avviso, che l'azione dell'ormone tiroideo, anche a dosi relativamente modeste, interessa diffusamente le strutture del reticolo sarcoplasmatico e dei mitocondri, mentre l'entità della lesione è, almeno entro certi limiti, conseguenza della dose di ormone utilizzata.

Bibliografia.

[1] Barker S. B. a. Klitgaard H. M., « Am. J. Physiol. », *170*, 81, (1952).
[2] Condorelli L., *Le miocarditi croniche*, « Atti Gruppo Cardiologico Italiano », Milano 1937.
[3] Cooper C. a. Tapley D. F., « Biochem. Biophys. Acta », *25*, 426 (1957).
[4] Dalla Volta A., « Atti X Congr. Soc. Ital. Cardiologia », 1948.
[5] Ernster, « Exp. Cell. Research », *10*, 704 (1956).
[6] Gordon E. S. a. Heming A. E., « Endocrinology », *34*, 353 (1954).
[7] Klemperer, citato in Tapley e Cooper (1956 *a*).
[8] Lindner E., « Z. Zellfursch. », *45*, 702 (1957).
[9] Maley G. F. a. Lardy H. A. « J. Biol. Chem. », *204*, 435 (1953).
[10] Martius C. a. Hess B., « Biochem. Z. », *326*, 191 (1955).
[11] McDonald C. H. a. Boyle R. W., « Am. J. Physiol. », *124*, 742 (1938).
[12] Poche R., « Beitr. Pathol. Anat. », *118*, 407 (1957).
[13] Rake G. a. McEachern D., « Am. Heart J. » *8*, 19 (1932).
[14] Saphir O. A., « Arch. of Path. », *33*, 88 (1942).
[15] Schulz H., Lëw H., Ernster L. a. Sjöstrand F. S., *Proc. Stockolm Conf. on Electron Microscopy*, 1956.
[16 Tapley D. F., « J. Biol. Chem », *222*, 325 (1956).
[17] Tapley D. F. a. Cooper C., « Nature », *178*, 119 (1956 *a*).
[18] Tapley D. F. a. Cooper C., « J. Biol. Chem. », *222*, 341 (1956 *b*).

Biologia. — *Prime ricerche sul comportamento di meristemi radicali sottoposti a centrifugazione* (*). Nota di Francesco Saverio Liotti, presentata (**) dal Socio G. Cotronei.

In questi ultimi tempi sono state sviluppate numerose ricerche sugli effetti biologici provocati in organismi da accelerazioni di gravità. Non starò in questa brevissima Nota a riferire di esse riservandomi tale compito in un futuro lavoro in esteso allorquando le presenti ricerche saranno adeguatamente completate. Mi limito qui solamente ad accennare ad alcune indagini condotte in questo stesso Istituto da Daconto e non ancora pubblicate, intese a dare un'utile interpretazione del differente comportamento da lui rilevato in vari Vertebrati sottoposti a centrifugazione. Gli interessanti effetti biologici da lui riscontrati negli organismi animali così trattati, mi hanno consigliato di trasferire i suoi studi nel mondo vegetale.

Scopo di questa breve Nota è appunto quello di riferire i primi risultati ottenuti in meristemi radicali sottoposti ad accelerazioni di gravità (della medesima intensità e durata) agenti nei due sensi opposti della medesima direzione che è quella dell'asse longitudinale della radice; tali risultati mettono in luce un diverso comportamento nel loro sviluppo in funzione del diverso orientamento della accelerazione a cui vengono sottoposti.

Per le presenti ricerche ho usato semi di *Vicia faba* che venivano posti a germinare su della sabbia umida ricoperti da un sottile strato di cotone idrofilo. Quando le radici emesse raggiungevano la lunghezza di circa cm. 2, essi venivano disposti in apposite provette da centrifuga (uno per ognuna di esse) per essere poi centrifugati a varie velocità.

Tali semi venivano disposti prima della centrifugazione in maniera tale che l'accelerazione di gravità, pur conservando sempre la medesima direzione che si identificava con l'asse longitudinale della radice, agisse nei due sensi opposti, essendo infatti orientata in alcuni casi verso il meristema e in altri verso il punto ove la radice si diparte dal seme. In pratica possiamo dire che l'apice della radice in alcuni casi era rivolto verso il fondo della provetta da centrifuga, mentre negli altri guardava verso l'apertura di essa. Naturalmente in ogni caso i semi venivano disposti tutti con molta cura in maniera tale che la radice non subisse durante la centrifugazione traumi di alcun genere, né spostamenti che potessero infirmare la validità dei risultati. Ciò si otteneva mediante applicazione di cotone idrofilo umido opportunamente disposto nelle provette sì da ottenere l'effetto voluto.

In ogni esperienza si faceva particolare attenzione acciocché i meristemi radicali venissero a trovarsi tutti al medesimo livello in ogni provetta, onde

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Biologia Generale dell'Università di Perugia.

(**) Nella seduta dell'8 novembre 1958.

evitare che la differente lunghezza del raggio vettore (ovvia conseguenza di una disposizione a differenti altezze dei meristemi in esse) potesse infirmare il valore comparativo delle mie ricerche traducendosi nella realtà di una differente accelerazione.

I semi disposti nella maniera suddescritta venivano centrifugati per 15′ a 3500 giri al minuto cioè sottoposti – come fu in seguito calcolato – ad una accelerazione di gravità pari a 958 g. Subito dopo la centrifugazione essi venivano disposti insieme ad alcuni semi di controllo, provvisti di radici di aspetto e dimensioni pressocché uguali alle loro, tra due strati di cotone idrofilo umido e venivano seguiti nel loro sviluppo per alcuni giorni. Per facilitare questo compito sulle radici venivano tracciati con inchiostro di Cina due trattini distanti il primo mm 3 dalla estremità ed il secondo mm 3 dal primo [1].

Ancor prima che fossero trascorse 24 ore dalla centrifugazione, si poteva rilevare un aumento della distanza tra le linee tracciate sugli apici radicali di quei semi che erano stati sottoposti ad una accelerazione orientata nel senso apice–seme mentre essa rimaneva inalterata in quelli sottoposti alla stessa accelerazione in senso contrario. Ciò significava naturalmente che in questi ultimi si era avuto un arresto di accrescimento in lunghezza della radice che si dimostrava poi essere definitivo, mentre i primi avevano già subìto un allungamento che aumentava ancora il giorno successivo seguendo quasi lo stesso ritmo e le stesse modalità dei semi di controllo. Tale comportamento è stato riscontrato costantemente in ognuna delle numerosissime esperienze da me condotte. Riporto qui fotografato (fig. 1) uno dei tanti lotti che documentano il differente accrescimento, due giorni dopo la centrifugazione, delle radici variamente trattate accanto ai relativi controlli.

Sono state fatte inoltre numerose prove variando ora la durata, ora la velocità di centrifugazione. Si è potuto così constatare che una accelerazione di gravità di poco inferiore a quella usata, non permette il costante ripetersi dei risultati descritti; al di sotto dei 3000 giri/m pari a 703,9 unità gravitazionali addirittura non si ha più, quasi in nessun caso, l'arresto di accrescimento di quelle radici che a 3500 giri/m si verificava con estrema regolarità.

Un aumento della accelerazione di gravità contenuta entro certi limiti, non comporta apprezzabili variazioni sull'andamento del fenomeno; ciò nonostante però, quando essa è molto alta, danneggia tutti i meristemi indipendentemente dal senso in cui ha agito.

A differenza della velocità (espressa in numero di giri per minuto), la durata della centrifugazione non sembra avere particolare importanza: infatti a parità di velocità (per esempio 3500 giri/m) meristemi centrifugati per un'ora si comportano in maniera pressoché uguale a quelli centrifugati per 10–15′.

(1) Questo metodo fu usato da Spirito nelle sue ricerche sull'influenza della corrente elettrica continua sui meristemi radicali.

Comunque, a parte questi rilievi, le mie esperienze dimostrano soprattutto come una determinata accelerazione di gravità (nelle mie esperienze essa è uguale a 958 g) agente nella direzione dell'asse longitudinale della radice, possa portare a risultati differenti a seconda del senso con cui investe il meristema allo studio. Ovviamente quindi è in questa variante – senso di azione – che va ricercata la ragione del differente comportamento delle radici così trattate.

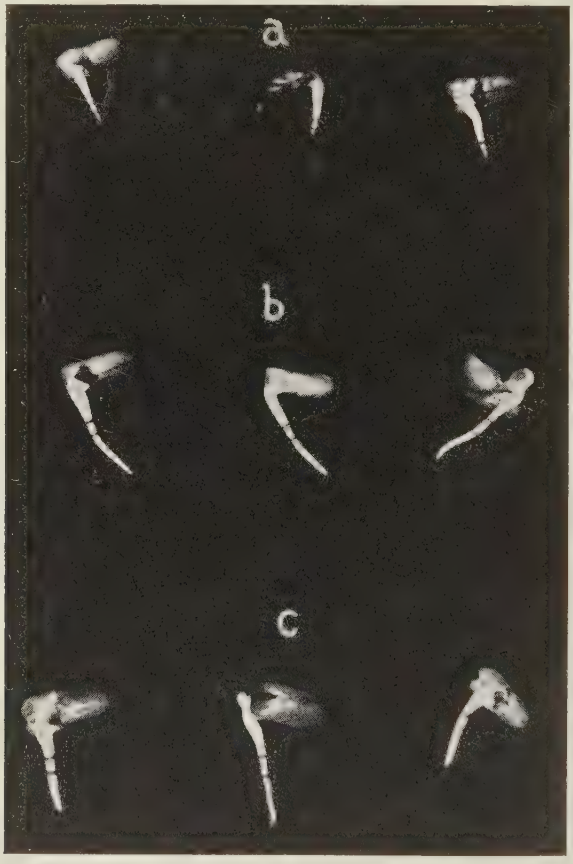


Fig. 1.

a) Esemplari centrifugati in direzione seme–apice radicale.
b) Esemplari centrifugati in direzione apice radicale–seme.
c) Esemplari di controllo.

I risultati fin quì ottenuti non ci permettono di trarre delle conclusioni definitive. Mi sembra necessario però discutere brevemente le ricerche da me condotte alla luce di altre perseguite da Spirito. Questo autore [2,3] trovò che correnti elettriche continue di uguale intensità passanti nelle radici di *Vicia faba* secondo il loro asse longitudinale, esercitano su di essa azioni com-

(2) A. Spirito, « Rend. Acc. Naz. Lincei », *22*, 69 (1935).
(3) A. Spirito, « Rend. Acc. Naz. Lincei », *23*, 226 (1936).

pletamente differenti, determinando un arresto di sviluppo quando gli apici di esse venivano rivolti verso l'elettrodo positivo e nessun danno quando veniva invertito il senso della corrente.

L'aver trovato con le mie esperienze un analogo comportamento differenziale in relazione al variare del senso di una stessa accelerazione di gravità agente sempre secondo la direzione dell'asse longitudinale della radice, mi fà riflettere sulla possibile esistenza di intime connessioni tra le due serie di esperienze in discussione.

È presumibile infatti che sostanze capaci di determinare un arresto di sviluppo, accelerando quei meccanismi che presiedono alla differenziazione cellulare, possano migrare verso il meristema sotto l'azione della corrente elettrica, naturalmente soltanto quando essa agisce in uno dei due versi, oppure per azione dell'accelerazione di gravità allorquando il senso di essa ovviamente è rivolto verso il meristema stesso.

Si tratterebbe quindi con ogni probabilità di sostanze ad alto peso specifico che verrebbero proiettate verso l'apice radicale allorquando l'accelerazione agisce in tal senso e capaci di migrare per azione della corrente elettrica verso l'elettrodo positivo (esperienze di Spirito) sì da determinare l'arresto della moltiplicazione delle cellule meristematiche in senso all'apice radicale allorquando detto elettrodo è disposto a contatto con esso.

Altre esperienze sono in corso di allestimento per portare nuovi contributi a questi interessanti problemi e tutte saranno completate ed affiancate dallo studio delle alterazioni isto-citologiche conseguenti alla centrifugazione.

COMMEMORAZIONI

Commemorazione del Socio Quirino Majorana

tenuta (*) dal Socio ELIGIO PERUCCA

Quirino Majorana, nato a Catania il 28 ottobre 1871, compie giovanissimo gli studi medi, sicché, nel 1891, a venti anni, egli si laurea in Ingegneria a Roma, allievo del Pisati. Ha già nella mente una ricerca che subito lo cimenterà nella sua preminente abilità sperimentale e lo condurrà alla laurea in Fisica, che ottenne presso l'Università di Roma nel 1894.

Dal 1894 al 1904 fu assistente di Blaserna, dal 1904 al 1914 fu Direttore dell'Istituto Centrale Telegrafico che ora ha titolo di Istituto Superiore delle Poste e Telecomunicazioni.

Vinta per concorso la cattedra di Fisica Sperimentale al Politecnico di Torino ne è titolare dal 1914 al 1921. Alla fine di questo anno è chiamato alla Cattedra di Fisica di Bologna, resasi vacante con la morte del Righi. Ivi resta per venti anni, cioè fino al 1941, anno del suo collocamento a riposo per raggiunti limiti di età.

Ospite del prof. Valle, che gli successe nella cattedra, il Majorana può non interrompere le sue ricerche e, morto il Valle, accoglie con entusiasmo l'invito, da parte del Direttore prof. Gori, a continuare i suoi studi presso quello stesso Istituto Superiore delle Poste e delle Telecomunicazioni dal quale egli si era allontanato quaranta anni prima.

Quel suo sentirsi ancor parte di un Istituto di ricerca deve aver costituito una delle più sentite soddisfazioni della sua ormai già tarda età.

Così la lunga e vegeta vecchiaia che la sorte concesse al Majorana dopo che cessò il suo insegnamento universitario, non fu dedicata ad un riposo che pur sarebbe stato ben meritato, ma ad una ulteriore ininterrotta attività di studi e di ricerca.

Così lavorò fino all'ultimo e noi lo ricordiamo presente attivamente sol poche settimane prima della sua scomparsa alle sedute dell'Accademia dei Lincei, nei Rendiconti della quale è consegnata la massima parte delle pubblicazioni scientifiche del Nostro.

Stroncato da un male violento a cui la sua fibra non fu più in grado di reagire validamente, Quirino Majorana, ottantaseienne, si spense a Rieti il 31 luglio 1957.

(*) Nella seduta dell'8 novembre 1958.

Per oltre 65 anni egli si era dedicato ininterrottamente a proficua ricerca e su di essa io mi fermerò brevemente.

Racconta il Majorana stesso che l'idea di realizzare una visione a distanza di oggetti in movimento per mezzo dell'elettricità, di realizzare cioè la « televisione » risale al 1889–90 allorquando era studente del penultimo anno del corso di ingegneria.

Ma a che punto era la tecnica di allora?

Già dal 1855 era stata messa in azione la trasmissione delle immagini a distanza mediante il pantelegrafo Caselli che ebbe anche applicazione pratica su talune linee telegrafiche della Francia.

L'idea e i principi da seguire per passare alla televisione erano stati già studiati da G. R. Carey (1875) e, per la necessaria scansione della figura da trasmettere, era già noto il disco di Nipkow (1884).

Majorana, ventenne, si appresta e con intenzioni realizzatrici ad un progetto che egli dice ardito e che a noi, riportandoci alla tecnica di quasi settanta anni or sono, sembra chimerico.

Ma quello che allora si poteva fare Majorana lo compì. Da questo primo giovanile cimento sperimentale non venne fuori, e non poteva venir fuori, la televisione, ma sortì la sua laurea in Fisica e nacquero le due prime sue pubblicazioni scientifiche (1894).

Nell'una si descrive un nuovo metodo di ottenere scansione della figura e il numero di elementi in cui questa veniva suddivisa si limitava a 40.000: quindi, immaginato che occorresse descrivere la figura una dozzina di volte al secondo, erano pur sempre da trasmettere e da ricevere circa 500 000 elementi al secondo.

Ebbene il selenio, il più pronto ricevitore di luce allora noto, risultò essere un ricevitore ancora dotato di tale lentezza di recupero da doversi considerare inservibile.

L'altro lavoro di Majorana, che fu la sua tesi di laurea in Fisica, ha appunto il titolo *Sulla rapidità dei fenomeni fotoelettrici nel selenio* e fu pubblicato nei « Rendiconti dei Lincei ».

Così l'ing. Majorana, fallito il suo primo passo verso una ricerca di immediato valore tecnico, entra nel campo della ricerca in fisica pura.

Egli ritornerà ancor due volte alla ricerca applicata e vi raccoglierà frutti notevoli, ma sarà ben evidente il predominante indirizzo del suo spirito verso la ricerca pura.

Assistente di Blaserna dal 1894 al 1904, direi che dalla fisica sperimentale pura è addirittura travolto.

Fu quello un periodo di profondo rivolgimento delle idee basilari della Fisica; è il periodo nel quale, comprovata da poco l'esistenza delle onde elettromagnetiche (Hertz, 1888), nacque la fotoelettronica con Hertz ed Hallwachs (1887–88), si affermò l'esistenza degli elettroni, si ottennero i raggi X, fu scoperta la radioattività e, con la fine dell'800, nasce la teoria dei quanta di Planck.

Ed ecco in quegli anni Majorana toccare ben disparati argomenti:

sperimenta sull'elettrolisi del $CuSO_4$ indicando in quali condizioni si ha formazione di cristalli di cuprite ed in quali no;

indica un limite inferiore per la velocità di propagazione dei raggi X;

studia l'azione di questi raggi sulla scarica esplosiva nell'aria e l'analogia con l'azione dei raggi ultravioletti; fu questa una delle prime proprietà dei raggi X che portarono a ravvicinarne la natura alle onde elettromagnetiche.

Introducendo nell'interno di un tubo a raggi catodici un elettrodo a potenziale variabile col quale modificare il campo elettrico sul percorso di raggi catodici, ottiene e descrive pel primo le deviazioni elettrostatiche che ne conseguono, e dei raggi catodici determina le velocità.

Dello stesso decennio sono anche studi sull'effetto Volta, studi sulla generazione artificiale del diamante, la scoperta dell'effetto magneto–ottico che porta il suo nome, e, infine, le prime realizzazioni di radiotelefonia.

Ne è risultata una produzione effervescente, e a carattere prevalentemente descrittivo nel senso che è piuttosto diretta alla osservazione che alla esperienza ben schematizzata perché riveli parametri fondamentali dei fenomeni.

Ma anche attraverso l'intrecciarsi dei più disparati argomenti di studio, il Majorana coglie risultati ben significativi:

il limite inferiore per la velocità dei raggi X, di cui ancora non era definita la natura, risulta dell'ordine della velocità di propagazione di una onda elettrica, cioè della velocità della luce;

la velocità dei raggi catodici, che egli riconosce variabile in uno stesso fascio di raggi, raggiunge nelle sue esperienze perfino il valore di $6 \cdot 10^5$ m/sec, e questa inomogeneità del fascio, dovuta al modo con cui venivano prodotti, porta con sé la deviazione non omogenea dei raggi del fascio per azione della calamita;

indica un nuovo modo di rivelare l'effetto Volta tra due metalli dall'attrazione che si crea tra di loro quando siano a contatto per qualche loro punto, e misura il valore dell'effetto Volta con un metodo di compensazione che è una elegante e comoda variante del dispositivo detto di Lord Kelvin–Pellat.

Non è ancora concluso il secolo che egli si trova alla ricerca dell'analogo magnetico della birifrangenza elettrica trovata da Kerr nel 1875.

Questa ricerca dà frutti ben rilevanti e nel 1902 il Majorana annuncia la scoperta della birifrangenza magnetica nel cosidetto ferro–Bravais, preparato medicinale costituito da una soluzione di ferro colloidale. È il fenomeno chiamato universalmente «effetto Majorana» e su questo l'autore fa uno studio accurato per stabilire quali sostanze lo presentino, e quali siano i fenomeni concomitanti: prontezza elevatissima nel seguire il campo magnetico generatore, dicroismo magnetico, fenomeno detto dall'autore «rotazione bimagnetica».

Il fenomeno Majorana è una pagina veramente bella tra quelle riguardanti le scoperte italiane di Fisica dell'inizio del '900.

Ma Majorana cambia ancora l'indirizzo delle sue ricerche e nel 1903–1904, al chiudersi del suo decennio di assistente, torna a dedicarsi ad un tema decisamente tecnico; vuole realizzare la radiotelefonia.

Da qualche anno la radiotelegrafia aveva sbaragliato lo scetticismo, spesso acido, che aveva accolto le prime esperienze di Marconi: il 12 dicembre 1901 l'Oceano Atlantico, tra Poldhu (Inghilterra) e S. Giovanni di Terranova era superato con un balzo di 4 800 km.

L'idea di molti va allora subito alla radiotelefonia, ma ogni tentativo per ottenerla è infecondo.

Non è da meravigliarsi: occorreva in emissione l'onda hertziana continua modulata dalle frequenze acustiche della voce. In recezione occorreva l'eliminazione dell'onda portante mediante la rivelazione; la bassa frequenza che ne risulta, alimentando un telefono ricevente, ripeterà la legge modulante emessa, cioè ripeterà la voce.

Ebbene alla fine del 1903 Majorana raggiunge i primi risultati positivi.

Eccolo a crearsi un generatore di onde « quasi continue », tali da rendere possibile una loro modulazione; a crearsi un microfono per modularle, quello che egli chiama « microfono idraulico ». La rivelazione in ricezione non è sostanzialmente differente da quella della radiotelegrafia in cuffia. Nei « Rendiconti dei Lincei » (vol. 13, p. 86, luglio 1904) appare la relazione di Majorana sui risultati raggiunti: egli ha radiotelefonato attraverso due punti estremi dell'Istituto Superiore delle Poste e Telecomunicazioni di Roma e, poco dopo, la radiotelefonia è installata tra detto Istituto e Monte Mario in Roma, un tratto di 4 km.

Il riconoscimento del merito di tale realizzazione è immediato; nello stesso 1904 egli, poco più che trentenne, è nominato direttore dell'Istituto Superiore delle Poste e Telecomunicazioni che allora ebbe nome di Istituto Centrale Telegrafico.

La tecnica procede: l'arco Poulsen (1903) si afferma efficace generatore di onde continue; Majorana può disporne e nel 1907 può comunicare radiotelefonicamente da Roma fino a Trapani e Messina, cioè a 500 km di distanza.

Ma, intanto, a realizzare questa radiotelefonia organismi industriali potentissimi sono in agitazione, ed è una corsa violenta alla creazione di altri generatori di onde continue e ad altri metodi di modulazione.

Il 12 novembre 1906 la connessione radiotelefonica è realizzata tra Brant Rock e Plymouth Mass. (18 km) dai tecnici di Fessenden.

Pochi giorni dopo (il 20 dicembre 1906) la Telefunken comunica di aver raggiunto in Germania la distanza di 40 km.

E mentre Majorana realizza il suo collegamento Roma–Messina, Fessenden comunica il collegamento Brant Rock–Wastington: 500 miglia.

Il primato del Nostro è superato, non l'onore di essere stato il primo concreto realizzatore della radiotelefonia.

Per dieci anni Majorana resta direttore dell'Istituto Superiore delle Poste e Telecomunicazioni.

È di questi anni (1912) la realizzazione di un tubo termoelettronico, da lui usato come nuovo rivelatore di onde elettromagnetiche in un apparecchio ricevente. È il primo esempio di tubo elettronico a più di tre elettrodi.

Nell'ottobre 1914 Majorana, in seguito a regolare concorso, è nominato professore ordinario di Fisica sperimentale al Politecnico di Torino. A questa cattedra resta sette anni (1914–1921), durante i quali egli si dedica a ricerche delicatissime con finalità puramente scientifiche.

Ma poiché anche nelle precedenti esperienze di Fisica applicata predomina il lato fisico della ricerca, il contrasto è più formale che sostanziale.

Nell'Istituto di Fisica del Politecnico cominciano le sue ricerche verso la conferma o meno dei principi fisici sui quali si basa la relatività ristretta; questi nuovi studi dànno, come primo frutto, due lavori in certo modo complementari: determinazione della velocità della luce riflessa da specchi in moto rispetto all'osservatore ed ai suoi apparecchi di misura, e determinazione della velocità della luce emessa da sorgenti in moto, rispetto all'osservatore ed ai suoi apparecchi; in ambo i casi l'esperienza fu completamente « interna » al laboratorio; nessun elemento astronomico intervenne; in ambo i casi furono raggiunte velocità degli specchi e delle sorgenti rispetto all'osservatore fino a $\approx$ 70 m/sec.

La risposta delle esperienze fu precisa: non fu osservata nessuna variazione della velocità della luce rispetto al valore normale di essa.

I risultati delle due esperienze di Majorana a Torino sono due delle più precise prove sperimentali dirette della validità del 2° principio della relatività ristretta. Il fisico Jeans li giudicò prove irrefutabili della relatività einsteiniana. E tali restano nella storia della Fisica.

Invece questi risultati che, nel modo più naturale, avrebbero dovuto essere giudicati capaci di calmar l'irrequietudine dalla quale Majorana si sentiva pervaso di fronte alla audacia innovatrice del fisico tedesco, ebbero nello spirito del Nostro il più impensato riflesso.

Convinto di sapersi adattare alla teoria balistica di Ritz meglio che alla teoria della relatività, egli aveva affrontato il campo sperimentale allo scopo di « ricercare qualche fatto che potesse apparire contrario alla relatività »; sono sue parole. Di fronte ai risultati sperimentali che avrebbero indotto molti altri a porsi in evidenza quali autorevoli turiferari della relatività, egli si dà ad una critica acuta, per trovar motivi che possano togliere importanza ai risultati ottenuti; tra le cause che possano aver annullato l'effetto desiderato di variazione del valore della velocità della luce egli si sofferma su quella causa anche da altri sostenitori della teoria balistica immaginata e cioè che la velocità della luce emessa dalla sorgente acquista bensì nel vuoto la componente balistica dovuta al moto della sorgente, ma riprende il valore normale non appena essa luce venga a contatto con la materia, in particolare con vetri e lenti dell'apparecchio di misurazione.

È dall'esame auto– e ipercritico delle sue esperienze che egli trae l'idea che forse anche il campo gravitazionale possa influire.

Ed è ancor lui stesso a scrivere che da questa presunzione fu portato a domandare all'esperienza se esistesse un assorbimento di gravitazione (1919 e seguenti).

Quanto amore egli dimostra per questo fenomeno e con quali molteplici cure egli lo assiste e lo protegge!

Alcuni fatti astronomici hanno indotto molti a ritenere che il piccolo effetto di assorbimento di gravitazione osservato non sia reale, e che questo effetto, sì, sia conseguenza di ancora qualche causa spuria di errore nei risultati delle raffinatissime esperienze.

Comunque sia, dei numerosi lavori sulla ricerca del Majorana, tutti nei « Rendiconti dei Lincei », non si può non ammirare una tecnica sperimentale e una autocritica dei risultati che non credo sia stata raggiunta da molti, così come, dopo, rivelerà una non comune capacità di difendersi dai dubbi e dall'incredulità da molti espressa.

Merita di leggere anche un solo lavoro del Majorana sull'argomento, quello che riporta una sua conferenza sull'assorbimento della gravitazione tenuta nel 1930 a Parigi per invito della Société Française de Physique; se ne trarrà uno sguardo di insieme sul lavoro dedicato dal nostro a questa ricerca e poi alla confutazione dei dubbi degli altri sull'esistenza reale del fenomeno.

Questi dubbi possono essere avanzati sia poggiati su talune conseguenze astronomiche che da quel fenomeno si trarrebbero, sia da talune delle conclusioni sperimentali stesse.

Ma tra questi argomenti di dubbio non si ricordi la richiesta di Michelson a Majorana di poter ripetere le esperienze a Monte Wilson e il successivo abbandono di tale programma.

Michelson abbandonò la partita perché convinto della sua inutilità o perché convinto degli anni e dei mezzi che anche lui avrebbe dovuto dedicare per raggiungere o, meglio, superare quei limiti di precisione che Majorana aveva raggiunto?

Si è detto con una punta di malignità che Majorana ha semplicemente controllato che la legge di Newton è giusta con una approssimazione ancor le mille volte maggiore di quanto ogni altro controllo terrestre avesse già raggiunto.

E vi pare poco?

Ed è poco che uno sperimentatore eccelso come Michelson dimostri, sia pure con la sua rinunzia, la difficoltà a ripetere l'arditezza dell'opera di Majorana?

Anche se la realtà del fenomeno fosse definitivamente tramontata, il lavoro di questo nostro Fisico resterà pur sempre un esempio mirabile di condotta di una ricerca sperimentale di eccezione.

Nel 1921 Majorana è chiamato a Bologna successore di Augusto Righi; ora dispone di un Istituto di Fisica ben altrimenti dotato di mezzi; e alla sua fervida fantasia, alla sua sete inestinguibile di osservazione non mancano i soggetti.

Sembra però che l'attiri sempre più il fenomeno quasi impercettibile, ma nuovo, anche se egli sia costretto a faticare sodo per separarlo da altri numerosi e banali nei quali quest'ultimo è sommerso.

Egli vuole essere come il raffinato che nel groviglio dei suoni di una orchestra vuole essere capace di separarne uno particolare. Egli stesso scrive: « la speranza di raggiungere qualche nuovo risultato ed il reale saltuario conseguimento di questo ha per me sempre costituito la finalità vera della mia esistenza ».

Così è per le sue ricerche sull'azione della luce sull'effetto termoelettronico (1924).

Così è per un « fenomeno termico residuo » segnalato nel 1926.

Così è per certi lievi effetti fotoelettrici riscontrati negli audion, che lo portano a moltiplicare osservazioni fotoelettriche fino ad esempio a trovare (1931) la perturbazione che al fenomeno fotoelettronico normale è apportata dalla sovrapposizione di più luci mocromatiche; ma questo fenomeno, non più infinitesimo e súbito indicato anche da altri, egli presto lo abbandona.

Così è per la segnalazione (1932) nelle pellicole metalliche sottili di un effetto fotoresistente che gli richiede una fatica sperimentale ben gravosa perché possa venir distinto da un semplice effetto termico.

Così è per le sue esperienze dette di centrifugazione degli elettroni (1941).

Sicché vari di questi studi si concludono col suo stesso giudizio che i risultati ottenuti meriterebbero di venir confermati.

Intuita la possibilità di ancora una esperienza il cui risultato possa prevedersi capace di costituire solido *experimentum crucis* tra teoria balistica e teoria della relatività, ripete la determinazione della velocità della luce riflessa da uno specchio in moto nel vuoto spinto usando un nuovo dispositivo interferenziale da lui escogitato e chiamato « monoprisma » (1934). Ma ancora una volta il risultato si rivela bene in accordo con la teoria della relatività mentre non lo è con la teoria balistica di Ritz.

E sperimenta sul fenomeno magneto–ottico di Kerr per riflessione della luce su di una lamina di materiale ferromagnetico, trovandolo (1943), sia pure in modo molto ridotto, anche in lamina di metalli non magnetici, come l'argento.

Infine, siamo già al 1951, riprende accurate esperienze valendosi dello interferometro di Michelson per stabilire se vi sia variazione di velocità della luce dopo che questa fu riflessa su specchi dell'uno o dell'altro metallo; come per molti altri casi, egli indica un risultato non nullo, ma non esente, a mio parere, da ogni obiezione.

A queste ricerche tutte di carattere assolutamente « puro » ecco mescolarsi, pochi anni dopo l'inizio del suo insegnamento bolognese, la brillante soluzione (1928–29) di un problema estremamente pratico, propostogli dal Ministero della Guerra: Come mettere a punto una telefonia segreta atta ad essere usata a scopi militari in campo tattico?

La soluzione fu data in forma concreta sia con l'impiego di radiazioni ultraviolette (la luce di Wood dall'arco a mercurio), sia con radiazioni ultra-

rosse da lampada a incandescenza. L'articolo di insieme apparso nel «Nuovo Cimento» del 1930, sottolinea molto bene sia i motivi per cui è preferibile l'impiego di luce ultravioletta (facilitazione della recezione con cellule fotoelettroniche), sia i motivi per cui è preferibile la luce ultrarossa (migliore trasparenza nella foschia, ma non tanto quanto si può a primo acchito immaginare).

Il lavoro, che si concluse con la concreta realizzazione dei due mezzi di telefonia ottica segreta, è un lavoro di fisica applicata, il cui contenuto predominante è, anche questa volta, di fisica pura: sono originali sia i modi di modulazione delle radiazioni, sia la ricerca accurata per la realizzazione di cellule tipo Case (fotoconduttrici al tallio) sensibili all'ultrarosso ($\lambda = \approx 1 \cdot 10^{-6}$ m).

L'insieme di questi studi, e non li ho ricordati proprio tutti, presenta una caratteristica che credo bene sottolineare nel momento in cui commemoriamo Quirino Majorana.

Lievemente egli fu attirato dai campi di Fisica sperimentale che furono fecondissimi nell'ultimo sessantennio; fortemente, invece, fu preso da ricerche sottili dall'esito incerto. Certamente non gli giovò, agli effetti dei risultati sicuramente acquisiti, la sua avversione ai principî einsteiniani.

Portato, così, in campi di ricerca di carattere piuttosto astratto e nei quali trovò anche sicuri risultati, si direbbe che si sia lasciato indurre a studi di portata macroscopica soltanto in vista delle realizzazioni pratiche e per effettuarle non gli mancarono mai le sottili invenzioni risolutive del problema.

Fu un lavoratore isolato; tranne qualcuna, da contare sulla punta delle dita di una mano, tutte le sue pubblicazioni scientifiche, intorno a duecento, portano il solo suo nome.

Fu l'Uomo che spesso usò, e nel modo più delicato, l'interferometro di Michelson, ma dispose soltanto di quelli che a Torino e poi a Bologna costruì con le sue mani valendosi di mezzi ottici e di mezzi meccanici di fortuna; era già ottantenne, allorché, a Bologna, mi mostrò l'ultimo suo interferometro da lui montato per applicarlo alle sue esperienze.

Fu l'Uomo che spesso dovette disporre di luce monocromatica, ma non mi risulta che abbia mai potuto disporre di un monocromatore.

A 83 anni, questo vegliardo rientra nell'Istituto Superiore delle Poste e Telecomunicazioni, come ho già detto, perché a 83 anni egli ha ancora tanto di energia e di passione alla ricerca da non mutare il ritmo di vita, ed egli cerca nelle vecchie sale ove si svolse la sua prima maturità, il posto dove possa essergli concesso ancora di sperimentare.

Ora, però, la sua mente, già decisamente polarizzata fin da 35 anni prima dall'idea antieinsteiniana, ne è dominata.

Le ultime numerose pubblicazioni sentono di questa polarizzazione ed i suoi ragionamenti toccano argomenti troppo lontani dalle mie conoscenze. Mi si perdoni quindi se io sono costretto a tacere.

Ma anche in questa sua fase di attività riconosciamo al Majorana il merito di avere preferito una lotta ingrata al facile trionfo di essere stato tra i più autorevoli fisici che hanno contribuito con esperienze terrestri all'affermarsi di quella inaccetta teoria.

Cosa concludere sull'opera di Majorana?

Essa eccelle nella immaginazione sperimentale e nella sua realizzazione; sono doti indiscusse del Nostro.

Di queste doti egli si valse con libertà illimitata che in qualche caso rasentò l'indisciplina. E pagò; perché la sua somma di lavoro avrebbe dato frutti maggiori di quelli non lievi che tuttavia raccolse, se quei sintomi di indisciplina non fossero esistiti. Ma si noti che questa indisciplina è anche marchio inconfondibile dello scienziato.

A Lui giunsero alti, meritati riconoscimenti e dirò solo dei maggiori.

Socio Nazionale dei Lincei, dell'Accademia delle Scienze di Torino, dell'Accademia delle Scienze di Bologna, Uno dei XL, Presidente della Società Italiana di Fisica dal 1925 al 1947.

Ebbe il Premio Santoro, il Premio Mussolini, la Medaglia Righi.

La sua vita può essere additata a limpido esempio di come va inteso l'entusiasmo per la Scienza e delle fatiche che esso comporta.

Per questo entusiasmo che si spense solo con Lui, per questo amore per la scienza che si paga col chiudersi nel recesso di un laboratorio ed ivi trovare il proprio perfezionamento spirituale, onoriamo riverenti il ricordo di Quirino Majorana.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio anziano G. Levi, al quale spetterebbe la presidenza, prega di essere dispensato dall'incarico. Assume quindi la presidenza, secondo l'ordine di anzianità, il Socio Picone.

Il Socio Perucca rievoca la figura e le opere del compianto prof. Quirino Majorana.

Sono presenti alla cerimonia la vedova Signora Vincenzina Majorana con i suoi familiari, tra i quali il Socio Dominedò; il Socio Dore, Presidente della Classe di Scienze Fisiche dell'Accademia dell'Istituto di Bologna, in rappresentanza dell'Accademia stessa e del Rettore dell'Università di Bologna prof. Forni; il Direttore reggente dell'Istituto delle Poste e Telecomunicazioni, dott. ing. Lensi, oltre a numerosi amici e discepoli del compianto Socio.

Il Rettore del Policlinico di Torino prof. Capetti ha inviato un messaggio di adesione e ha designato, quale suo rappresentante, lo stesso oratore professor Perucca.

Il Presidente ringrazia il Collega Perucca per la sua elevata orazione e rinnova ai familiari del Socio Majorana l'espressione del cordoglio più vivo della Classe per la scomparsa dell'insigne Fisico.

Il prof. Picone comunica quindi ai Colleghi che durante l'estate la Classe ha subìto gravi perdite con la morte del Socio Nazionale Giuseppe Armellini, della Categoria II, Sez. Astronomia (deceduto il 16 luglio 1958), del Socio Corrispondente Carlo Mazzetti, della Categoria III, Sez. Chimica (deceduto l'11 giugno 1958) e del Socio Straniero Frederic Joliot Curie, della Categoria III, Fisica, Chimica e Applicazioni (deceduto il 14 agosto 1958). Inoltre è pervenuta indirettamente notizia all'Accademia della morte del Socio Straniero Frederick Soddy, della Categoria III, Fisica, Chimica e Applicazioni, deceduto nel 1956.

Il Presidente eleva un pensiero di reverente omaggio alla memoria degli illustri scomparsi e ricorda, in modo particolare, Giuseppe Armellini, nobilissima figura di uomo e di scienziato che ha altamente onorato l'astronomia italiana e che dominava parimenti, da Maestro, le discipline matematiche. Giuseppe Armellini sarà degnamente commemorato, in una delle prossime adunanze, dal Socio Nobile, ma fin da questa seduta la Classe unanime vuol rendere, con un minuto di raccoglimento, un doveroso tributo alla memoria del caro Collega e dello Scienziato illustre.

Il Presidente comunica che, con le ultime elezioni, sono stati eletti, nella scorsa estate, i seguenti Soci:

Soci Nazionali: Renato Caccioppoli, Bruno Finzi, Vittorio Nobile, Bruno Ferretti, Giuseppe P. S. Occhialini. Giovanni Merla, Daniele Bovet, Francesco Pentimalli e Gaetano Bompiani.

Soci Corrispondenti: Giuseppe Evangelisti, Silvio Ballarin, Roberto Piontelli, Roberto Savelli, Alberto Stefanelli e Giovanni Favilli.

Soci Stranieri: Wilhelm Blaschke, Oscar Zariski, Ivan Metveyevich Vinogradoff, Emilio Segrè, Paolo Adriano Maurizio Dirac, Wolfango Pauli, Joos Cadish, Paul Fallot, Otto Warburg e Fritz Baltzer.

A tutti i suddetti Colleghi il Presidente porge il più cordiale saluto della Classe e suo personale, rivolgendosi in particolare ai nuovi Soci presenti alla seduta, tra i quali vi è il Socio Straniero Emilio Segrè, scienziato di fama mondiale nel campo della fisica nucleare.

Il prof. Picone propone poi che al Presidente Giordani impossibilitato ad intervenire, per ragioni di salute, alle odierne tornate sia inviato il seguente messaggio d'augurio: «Classe Scienze Fisiche riunita oggi seduta ordinaria dolente assenza suo amato Presidente esprime fervidi voti per rapida completa sua guarigione affinché non manchi oltre illuminata sua guida lavori».

La Classe si associa con un vibrante applauso.

TEMI DI DISCUSSIONE

Il Socio Montalenti, riferendosi alla deliberazione di massima adottata nel decorso anno accademico in merito ad un Convegno sul tema «Genetica ed evoluzione», comunica di avere preso contatto con vari Colleghi e di essere quindi in grado di sottoporre alla Classe delle proposte preliminari. In considerazione del fatto che nei primi mesi del prossimo anno verranno in Italia, per loro conto, due noti specialisti stranieri e precisamente i proff. Th. Dobzhansky di New York e K. Mather di Birmingham, egli ritiene che i suddetti studiosi potrebbero senz'altro essere invitati.

Inoltre crede indispensabile interpellare due illustri Soci Stranieri dell'Accademia, particolarmente esperti nella materia, e cioè i Colleghi H. J. Muller di Bloomington e C. D. Darlington di Oxford. Infine, oltre ben inteso tutti i Soci Nazionali e Corrispondenti della Classe che abbiano recato contributi sperimentali al problema, potrebbero essere invitati i proff. Benazzi di Pisa, Barigozzi di Milano e Buzzati di Pavia, avendo gli stessi condotto, direttamente o per mezzo di allievi e collaboratori, ricerche nel campo della genetica applicata all'evoluzione.

Circa la data del Convegno, il Socio Montalenti aveva in animo di proporre la prima settimana del prossimo aprile. Ma è stato successivamente informato che nei giorni 2, 3 e 4 aprile avrà luogo in Accademia un altro Convegno, precisamente quello di studi etiopici, indetto dalla Classe di Scienze Morali. Egli proporrebbe pertanto di fissare la discussione sul tema «Genetica ed evoluzione» per i giorni 8, 9 e 10 aprile, di guisa che, essendo previste per il giorno 11 le tornate accademiche del suddetto mese, i Soci possano, con un solo viaggio a Roma, avere la possibilità di intervenire sia al Convegno sia alle sedute dell'Accademia.

Il Socio Dore ricorda che in una adunanza a Classi riunite si decise, lo scorso giugno, di organizzare anche una discussione sul problema riguardante le progressive necessità di competenze e di attività scientifiche e tecniche, in relazione all'organizzazione scolastica. Egli ritiene quindi che, prima di accettare le date proposte dal Collega Montalenti, sarebbe opportuno prendere accordi anche con l'altra Classe, in modo da stabilire un diario delle varie manifestazioni.

Il Socio Cambi propone che, accettato il principio di organizzare il Convegno sulla genetica e l'evoluzione, la Presidenza indica una riunione dei Soci della Categoria interessata, e cioè della Categoria V (Scienze Biologiche e Applicazioni), per concordare la data e le modalità del Convegno stesso.

Il Socio Montalenti è d'accordo e propone che tale riunione abbia luogo nella mattina di sabato 13 dicembre.

La proposta è accolta e il Presidente Picone assicura che gli uffici provvederanno tempestivamente a tale convocazione.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Togliatti presenta il 2° volume delle « Opere » di Corrado Segre, con le seguenti parole:

« Un anno fa ho presentato all'Accademia il primo volume delle « Opere » di Corrado Segre, pubblicate a cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche; oggi ho l'onore di presentare il secondo volume: quello conteneva i lavori più spiccatamente di geometria algebrica; questo contiene lavori che si possono distinguere in due gruppi diversi, i quali, nell'indice del volume, sono stati tenuti separati. Il primo gruppo comprende quindici lavori di geometria differenziale proiettiva, il primo dei quali, assai importante dal punto di vista storico, introduce, sia pure per scopi diversi, il cosidetto invariante di Mehmke e Segre, che è il primo esempio di un invariante proiettivo di contatto. Tra i lavori che seguono in questo primo gruppo sono particolarmente notevoli la memoria del 1906 sulle superficie che rappresentano equazioni di Laplace e la grande memoria del 1910 sulle varietà luoghi di spazi; due lavori che, notoriamente, sono stati il punto di partenza di una grande quantità di ricerche nel campo della geometria differenziale proiettiva. Il secondo gruppo contiene invece quattro memorie sugli elementi immaginari e sugli enti iperalgebrici con le loro rappresentazioni reali. Il volume, che si apre con una presentazione particolareggiata redatta da Alessandro Terracini, figura ben degnamente nella collezione delle « Opere » dei grandi matematici italiani. Nei volumi seguenti, presumibilmente due, saranno ripubblicate le ricerche di geometria proiettiva insieme con ricerche varie ».

Il Socio Giambattista Dal Piaz presenta, anche a nome del Collega Bianchi, il volume XX delle *Memorie degli Istituti di Geologia e Mineralogia dell'Università di Padova.*

Il volume si apre con uno studio del compianto dott. F. Ferasin sulla geologia dei dintorni di Cimolais nel Friuli occidentale. Contiene inoltre due lavori di geologia applicata su nuovi impianti idroelettrici progettati nell'alta valle del torrente Chiarzò in Carnia e nella valle del fiume Ega in Alto Adige, una memoria del dott. B. Zanettin sulle migmatiti del gruppo di Stak nel Karakorum, nonché tre monografie sul bacino terziario piemontese e sulle Alpi Occidentali e precisamente: una del dott. Elter sulla tettonica del Monferrato, un'altra del dott. G. B. Castiglioni sulla classica zona a falde di ricoprimento fra Baceno e Premia nell'Ossola e infine una terza del prof. R. Malaroda sulla geologia delle formazioni sedimentarie antestanti al massiccio dell'Argentera.

La pubblicazione del volume, comprendente varie carte geologiche a colori e numerose tavole, fu resa possibile grazie ai contributi finanziari generosamente concessi da Enti pubblici e privati, quali il Consiglio Nazionale delle Ricerche, l'Università di Padova, l'Associazione Nazionale Imprese Produttrici e Distributrici di Energia Elettrica (ANIDEL), la Società Adriatica di Elettricità, la Società Idroelettrica Alpina del Gruppo «La Centrale». L'esempio di questi benemeriti sostenitori merita di essere segnalato ed additato alla riconoscenza degli studiosi, nella speranza ch'esso possa trovare seguito sempre più largo.

Il Presidente ringranzia i colleghi Togliatti e G. B. Dal Piaz.

Il Segretario Accademico presenta le pubblicazioni offerte in omaggio all'Accademia.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci: Tonzig, Togliatti, Caglioti, Segre, Chiarugi, Cotronei, Bonino, Boaga, Signorini, G. Bompiani, Pupilli e Picone.

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

Bonino G. B., Chiorboli P. e Fabbri G. – Sugli spettri Raman ed ultrarossi dell'osmiocianuro di potassio allo stato cristallino ed in soluzione acquosa (pres. dal Socio G. B. Bonino).

Bacci G., Balata M. T. e Romani M. L. – Rapporti numerici dei sessi in tre popolazioni di *Mytilicola intestinalis* Steuer (pres. dal Socio G. Cotronei).

Danusso F. e Moraglio G. – Relazione tra viscosità intrinseca e peso molecolare del polipropilene atattico in vari solventi (pres. dal Socio G. Natta).

Danusso F., Moraglio G. e Gialanella V. – Peso molecolare ed affinità d'interazione con solventi di frazioni di polipropilene atattico (pres. dal Socio G. Natta).

Ferroni E. e Ficalbi A. – Cinetica d'adsorbimento di O_2 da parte di film monomolecolari di Co–disalicilaldeideetilendiimmina (pres. dal Socio V. Caglioti).

D'Arcangelo P. e Marchetti M. – Sul consumo di O_2 di omogenati di cervello di ratti intossicati con streptomicina o con diidrostreptomicina (pres. dal Corrisp. G. Amantea).

Marrè E., Servettaz O. e Albergoni F. – Sul meccanismo di adattamento a condizioni osmotiche estreme in *Dunaliella salina*. – I. Relazioni fisiologiche a variazioni dell'ambiente osmotico (pres. dal Socio S. Tonzig).

Messeri A. – Nuovi dati sulla sistematica dell'*Abies nebrodensis* (Lojac) Mattei (pres. dal Socio A. Chiarugi).

Saban G. – Nuove caratterizzazioni della sfera (pres. dal Socio B. Segre).

Singer I. – Sur un dual du théorème de Hahn–Banach et sur un théorème de Banach (pres. dal Socio M. Picone).

Vâlcovici V. – Autres corrections appliquées à la loi de Hubble. Nota II (pres. dal Socio B. Finzi).

Il Socio Sansone presenta una sua Memoria dal titolo « Soluzioni periodiche di seconda specie dell'equazione del pendolo generalizzata ».

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Picone, anche a nome del Collega E. Bompiani, legge la relazione sulla Memoria di Renzo Possenti dal titolo « Sul principio di successione in alcuni problemi elettrodinamici ».

Messa ai voti, la relazione, che conclude proponendo la pubblicazione del citato lavoro nelle Memorie accademiche, è approvata all'unanimità.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Socio Picone prende l'occasione, fornita dalla Nota, da lui stesso presentata, redatta in collaborazione con il dott. Wolf Gross, dell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, e suscitata da una ricerca, proposta all'Istituto stesso, dal Comitato per le Armi Navali del Ministero della Difesa–Marina, per sottoporre ai Colleghi il grave problema delle condizioni economiche fatte ai giovani ricercatori in Italia, che costringono molti di essi ad abbandonare la carriera scientifica.

Egli propone che l'Accademia costituisca una Commissione, composta da rappresentanti di tutte le Categorie, per studiare il problema e richiamare su di esso l'attenzione dei competenti organi governativi.

Dopo una discussione sull'argomento, alla quale partecipano i Soci Perucca e Dore, il Presidente propone di rimandare la discussione stessa ad una prossima seduta, alla quale si augura possa essere presente anche il Presidente Giordani. La Classe approva.

CONGRESSI

Il Socio D'Ancona riferisce sulla VI Assemblea Generale e sulla VII Riunione Tecnica dell'Unione Internazionale per la conservazione della natura, con le seguenti parole:

« Ho avuto l'onore di rappresentare l'Accademia, unitamente al Socio Nazionale prof. Alessandro Ghigi, alla VI Assemblea Generale e alla VII Riunione Tecnica dell'Unione Internazionale per la Conservazione della Natura, che hanno avuto luogo a Atene e Delfi dall'11 al 19 settembre 1958.

« I temi della Riunione erano: 1° Conservazione del suolo e delle acque, suddiviso in 5 sottotemi *a*) Utilizzazione della vegetazione nel controllo dell'erosione, *b*) Effetti degli sbarramenti fluviali sull'habitat e sul passaggio, specialmente nelle zone semiaride, *c*) Tassi di scorrimento e di evaporazione, *d*) Influenza della conservazione del suolo e delle acque sulle risorse acquatiche naturali, *e*) Sistemazione del paesaggio su una base ecologica; 2° Educazione e conservazione.

« Una introduzione al tema 1° ha avuto per oggetto la storia dell'erosione e i suoi effetti sul declino delle civiltà. In un altro Symposium si é trattato della protezione degli animali e vegetali rari nella regione mediterranea.

« I temi erano di grande interesse, non soltanto dal punto di vista scientifico ma anche da quello pratico della tutela del paesaggio, della vegetazione, delle risorse viventi delle acque e della produzione ittica, della protezione delle specie che minacciano estinzione. Grande rilievo è stato rivolto alla educazione e propaganda per la protezione della natura. I temi trattati avevano particolare interesse per i paesi mediterranei, nei quali, a causa dell'antica civiltà e della densità delle popolazioni, nel corso dei secoli l'opera di denudamento delle rocce ha assunto proporzioni allarmanti. I congressisti hanno avuto modo durante alcune escursioni di vedere gli effetti di tale denudamento e le difficoltà che si incontrano per ricostituire un rivestimento arboreo dove questo da secoli è stato distrutto.

La partecipazione al Congresso, data la diversità dei temi trattati, non era molto omogenea e per conseguenza la frequenza alle sedute più tecniche e le discussioni non sono state sempre molto attive. Il complesso delle relazioni presentate, spesso in assenza dei relatori, costituisce comunque un importante contributo al problema della conservazione della natura, che non deve essere valutato soltanto come un sentimento estetico.

« La partecipazione italiana, non molto numerosa, benché scelta, ha portato alcuni pregevoli contributi. Si può lamentare però che la nostra partecipazione mancasse di una presentazione ufficiale atta a valorizzarla. È da augurarsi che a ciò si provveda in occasione delle future assemblee dell'Unione per la Conservazione della Natura. Ci auguriamo pure che nel nostro Paese i problemi della conservazione del paesaggio, della fauna e della

flora e delle risorse naturali siano maggiormente sentiti e che ad essi si provveda in modo razionale ».

Riferendosi al voto espresso dal Collega D'Ancona, nonché alla lamentata deficienza di ricerche e di ricercatori, il Socio Gortani richiama l'attenzione della Classe sul fatto che le varie Amministrazioni Statali, allorché sono invitate a predisporre e attuare delle economie, di regola cominciano col tagliare i fondi ai « Servizi Studi ». Questa consuetudine ha avuto, fra l'altro, durissime ripercussioni sul Servizio Idrografico dipendente dal Ministero dei Lavori Pubblici. La Commissione incaricata qualche anno addietro di esaminare il grave problema delle inondazioni padane, si trovò a non avere a disposizione tutti i dati necessari, né le necessarie attrezzature, perché la « Commissione della Scure » aveva fin dal tempo fascista soppresso il Servizio Studi del Servizio Idrografico. Il Magistrato alle Acque di Venezia, già costituito in origine solidamente, con un Ufficio Idrografico a suo tempo fiorente e dotato di una sezione geologica, di una organizzazione idrologica e di un'attrezzatura sperimentale di prim'ordine, non è più che un'ombra del passato. Si è arrivati al punto che uno studio iniziato da tempo sulle lagune venete settentrionali (Lagune di Marano e di Grado) dovette rimanere interrotto per mancanza di mezzi; talché oggi l'Ufficio non è neppure in grado di esprimere il suo giudizio sulla possibilità o meno di accogliere le numerose domande che affluiscono per formare valli da pesca chiuse o per bonifiche agrarie: l'Ufficio essendo privo delle indispensabili nozioni su le aree e le vie necessarie al libero gioco delle maree, vita delle lagune. Formula pertanto il voto che l'Accademia si interessi presso il Ministero dei Lavori Pubblici affinché gli Uffici Idrografici siano messi in grado di svolgere i loro compiti istituzionali.

Il prof. Picone, propone che la discussione sul problema prospettato dal Collega Gortani sia rinviata ad altra seduta.

La Classe approva.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta dell'8 novembre 1958

ALASTRUE Eduardo, ALMELA Antonio y RIOS José Maria. — *Explicación al mapa geológico de la provincia de Huesca.* Madrid, Tip. Lit. Coullat, 1957. Pp. 253, in–8°, con tavv. (Instituto Geológico y Minero de España).

ALMELA Antonio. — Vedi: ALASTRUE Eduardo, ALMELA Antonio y RIOS José Maria.

BENASSAI SGADARI M. L. — Vedi: *Bibliografia Geologica d'Italia.*

BIANCHI Angelo. — Vedi: *Memorie degli Istituti di Geologia e Mineralogia dell'Università di Padova.*

Bibliografia Geologia d'Italia. Vol. III: *Campania.* A cura di G. D'Erasmo e M. L. Benassai Sgadari. Indice analitico. Napoli, Stab. Tip. G. Genovese, 1958. Pp. 70, in–8° (Consiglio Nazionale delle Ricerche. Comitato per la Geografia, Geologia e Mineralogia).

BOFFA Giuseppe. — *Relatività dei fenomeni meccanici (Le relazioni di Lorentz nella meccanica di Galileo–Newton).* Roma, 1958. Pp. 48, in–4° (In ciclostile).

BOLTOVSKOY Esteban. — *Diccionario foraminiferológico plurilingüe.* Buenos Aires, Ministerio de Marina, 1956. Pp. 196, in–8°.

BUFFO Guido. — *Proposición y fundamentos para un nuevo enunciado sismológico.* 7 ritagli dal giornale « Los Principios » di Buenos Aires, 21–28 agosto 1958.

CAMERON Austin W. — *Canadian Mammals.* Illustrations by John Crosby. Ottawa, Minister of Northern Affairs and National Resources, 1958. Pp. 81, in–8°, con figg. e tavv. (National Museum of Canada. Department of Northern Affairs and National Resources).

ČOKIN Š. Č. — *Rasčetnaja obespečennost' raboty gidro–élektrostancii.* Alma–Ata, Izdatel'stvo Akademii Nauk Kazahskoj SSR, 1958. Pp. 272, in–8°.

Congrès (Treizième) des Mathématiciens Scandinaves. Tenu à Helsinki 18–23 août 1957. Helsinfors, Mercators Tryckeri, 1958. Pp. 208, in–8°, con tavv.

CROSBY John. — Vedi: CAMERON Austin W. — Vedi: GODFREY W. Earl.

DAL PIAZ Giambattista. — Vedi: *Memorie degli Istituti di Geologia e Mineralogia dell'Università di Padova.*

D'ERASMO Geremia. — Vedi: *Bibliografia Geologica d'Italia.*

DINULESCU Ch. — *Diptera familia Tabanidae.* Bucureşti, Editura Academiei Republicii Populare Romîne, 1958. Pp. 276, in–8°, con figg. (Fauna Republicii Populare Romîne. Insecta, vol. XI, fasc. 2).

DURMIŠIDZE S. V. — *Dubil'nye veščestva i antociany vinogradnoj lozy i vina.* Moskva, Izdatel'stvo Akademii Nauk SSSR, 1956. Pp. 325, in–16°, con figg.

Eesti NSV Floora. I. Koostanud A. Vaga ja K. Eichwald. Tallin, Eesti Riiklik Kirjastus, 1953. (Eesti NSV Teaduste Akadeemia. Zooloogia ja Botaanika Instituut).

EICHWALD K. — Vedi: *Eesti NSV Floora.*

Flora Kazahstana. Vol. II. Alma–Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, Institut Botaniki, 1958. Pp. XIV–291, in–8°, con figure.

GHIGI Alessandro, PASQUINI Pasquale e RAFFAELE Federico. — *La vita degli animali.* Voll. III e IV. 2ª ed. aggiornata ed accresciuta. Torino, UTET, 1958. Voll. 2, in–4°, con figg. e tavv.

GIORGI Maurizio. — *Magnetismo ed aurore polari.* Roma, Consiglio Nazionale delle Ricerche, 1958. Pp. 18, in–8° (Commissione Nazionale Italiana per l'Anno Geofisico Internazionale 1957–1958).

GODFREY W. Earl. — *Quelques Oiseaux du Canada.* Planches noires par John Crosby. Ottawa, Ministère du Nord Canadien et des Resources Nationales, 1957. Pp. 48, in–8°, con figg. (Musée National du Canada. Ministère du Nord Canadien et des Resources Nationales).

Haffkine (The) Institute. A Premier House of Research. Bombay, 1958. Pp. 12, in–24° oblungo.

Hundert Jahre Neanderthalter. 1856–1956. Gedenkbuch der Internationalen Neanderthal Feier. Düsseldorf, 26–30 August, 1956. Utrecht, Kemink en Zoon N. V., 1958. Pp. XV–325, con figg. e tavv.

IZQUIERDO José Joaquin. — *La primera casa de las Ciencias en México, el Real Seminario de Minería (1792–1811).* México, Ediciones Ciencia, 1958. Pp. 272, in–8°.

LUKAŠEV K. I. — *Osnovy litologii i geohimii kory vyvetrivanija.* Minsk, Izdatel'stvo Akademii Nauk Belorusskoj SSR, 1958. Pp. 470, in–8°, con figg.

Memorie degli Istituti di Geologia e Mineralogia dell'Università di Padova. Dirette da Giambattista Dal Piaz e Angelo Bianchi. Vol. XX, 1957–1958. Padova, Soc. Coop. Tipografica, 1958. Paginazione varia, in–4°, con figg. e tavv.

MOHAMMED A. H. Helmy. — *Systematic and experimental studies on protozoal blood parasites of egyptian birds.* Cairo, Cairo University Press, 1958 (1 tomo in 2 voll. a pagin. continua). Pp. XI–298, in–8°.

NIEVGODOVSKY Pierre. — *Les projections des particules et formation des chaînes electroniques.* Quaderno manoscritto di 25 fogli numerati, 1958, in–8°.

PANNARIA Francesco. — *Nuove vedute in biochimica.* Estr. da « Bollettino della Federazione Nazionale degli Ordini dei Chimici », a. VII, 1958, nn. 7–8–9.

PASQUINI Pasquale. — Vedi: GHIGI Raffaele, PASQUINI Pasquale e RAFFAELE Federico.

RAFFAELE Federico. — Vedi: GHIGI Raffaele, PASQUINI Pasquale e RAFFAELE Federico.

Reports of the Swedish Deep–Sea Expedition 1947–1948. Vol. VII: *Sediment Cores from the North Atlantic Ocean*, fasc. 4; vol. X: *Special Investigations*, fasc. 2. Göteborg, K. Vetenskaps–och Vitterhets–Samhälle, 1958. Fasc. 2, in–4°.

RIOS José Maria. — Vedi: ALASTRUE Eduardo, ALMELA Antonio y RIOS José Maria.

SATPAEVA T. A. — *Mineralogičeskie osobennosti mestorožděnij tipa medistyh pesčanikov.* Alma–Ata, Izdatel'stvo Akademii Nauk Kazahskoj SSR, 1958. Pp. 244, in–8°, con tavv.

SEGRE Corrado. — *Opere.* A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Vol. II. Roma, Ed. Cremonese, 1958. Pp XVIII–438 in–8°, con 1 ritr.

SLACK Harry D. — *Studies on Loch Lomond.* Glasgow, Blackie and Son, 1957. Pp. X–133, in–8°, con tavv. (Glasgow University Publications).

VAGA. A. — Vedi: *Eesti NSV Floora.*

WILSON Lambert Gordon. — *Space, mass and energy.* Adelaide, s.e., 1955. Pp. 19, in–24°.

A. SIGNORINI e G. COTRONEI

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 13 dicembre 1958

Presiede il Presidente FRANCESCO GIORDANI

NOTE DI SOCI

Calcolo numerico. — *Un metodo di calcolo automatico degli estremi di una funzione o delle soluzioni di un'equazione vettoriale* (*). Nota (**) del Socio MAURO PICONE.

Fra i grandi apporti che l'automazione del calcolo dà all'Analisi matematica è, in prima linea, da annoverare la rapidità e la facilità dei controlli che essa conferisce all'integrazione numerica di sistemi di equazioni differenziali ordinarie di forma normale, e ciò in tale cospicua misura da indurmi a proporre di tenere ben presente il ricorso a quella integrazione anche per il calcolo degli estremi di una funzione o di soluzioni di un sistema di equazioni.

Con questa Nota mi permetto di comunicare all'Accademia le basi analitiche sulle quali poggia la mia proposta, ben lieto di poter dire che l'idea di essa mi è stata suscitata dalle difficoltà presentatesi all'Istituto di Calcolo, da me diretto, nell'applicazione di metodi consueti alla risoluzione di un problema di calcolo, assegnato all'Istituto dal nostro Presidente, riguardante le vibrazioni molecolari della formamide e della deuteroformamide.

1. CALCOLO DEL MINIMO LIBERO DI UNA FUNZIONE. – Sia $f(x) \equiv f(x_1, x_2, \cdots, x_r)$ una funzione reale delle r variabili reali $x_1, x_2, \cdots, x_r$, definita in un campo A (insieme aperto) dello spazio euclideo $S_{(r)}$, ivi di classe due, cioè continua con le sue derivate parziali prime e seconde, e si abbia il

(*) Redatta nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Presentata nella seduta del 13 dicembre 1958.

problema della ricerca del minimo, in A, di detta funzione. Scelto a piacere un punto $x^{(0)}\,(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_r^{(0)})$ di A, si integri il sistema di equazioni:

$$(1)\qquad \frac{dx_h}{dt} = -f_h\,(x_1, x_2, \cdots, x_r),$$

$$(2)\qquad x_h\,(0) = x_h^{(0)}, \qquad (h = 1, 2, \cdots, r)$$

ove si è designata con f_h la componente h^{ma} del gradiente della f, posto cioè $f_h = \partial f/\partial x_h$ mantenendo la variabile reale t nell'intervallo $(0, \infty)$.

Evidentemente, se il gradiente di f, che designeremo col simbolo grad f, è nullo nel punto $x^{(0)}$, la soluzione del sistema di equazioni (1) e (2) è data dalla costante $x^{(0)}$, onde segue che lungo una qualsivoglia curva integrale $x = x\,(t)$ di tale sistema, la quale non si riduca ad un punto, è sempre grad $f \neq 0$. Sia grad $f\,(x^{(0)}) \neq 0$ e $(0, T)$ un intervallo dell'asse t nel quale esiste la soluzione $x = x\,(t)$ del sistema di equazioni (1) e (2). Si ha, in $(0, T)$,

$$\frac{d}{dt} f\,[x_1\,(t), x_2\,(t), \cdots, x_r\,(t)] = \frac{d}{dt} f\,[x\,(t)] = -\,|\,\mathrm{grad}\, f\,[x\,(t)]\,|^2$$

e sempre

$$|\,\mathrm{grad}\, f\,| > 0,$$

donde

$$f\,[x\,(T)] < f\,(x^{(0)}).$$

Mediante, dunque, l'integrazione del sistema (1) e (2), essendo grad $f\,(x^{(0)}) \neq 0$, si perviene ad un punto $x\,(T)$ di A, nel quale $f\,(x)$ assume un valore minore di quello che ha nel punto iniziale $x^{(0)}$.

Sia c un valore assunto, in A, dalla $f\,(x)$, maggiore dell'estremo inferiore e minore dell'estremo superiore di $f\,(x)$ in A, tale che il dominio $D\,(c)$, i cui punti interni sono tutti e soli quelli di A per i quali riesce $f\,(x) < c$, sia limitato. La funzione $f\,(x)$ possiede il minimo in $D\,(c)$ che è anche il minimo in A. Il minimo di $f\,(x)$ in A è assunto, nel dominio $D\,(c)$, in punti a questo interni. Sia $x^{(0)}$ un punto interno a $D\,(c)$ e sia grad $f\,(x^{(0)}) \neq 0$. Il dominio $D\,[f\,(x^{(0)})]$ è interno a $D\,(c)$ e pertanto è positiva la distanza $\delta\,(x^{(0)})$ fra le frontiere di $D\,(c)$ e di $D\,[f\,(x^{(0)})]$. Detto $M\,(c)$ il massimo di $|\,\mathrm{grad}\, f\,(x)\,|$ in $D\,(c)$, posto

$$T = \delta\,(x^{(0)})/M\,(c),$$

esiste – com'è noto dagli elementi – nell'intervallo $(0, T)$ la soluzione $x = x\,(t)$ del sistema (1) e (2), e risultando, in tale intervallo per $t > 0$,

$$f\,[x\,(t)] < f\,(x^{(0)}) < c,$$

la curva $x = x\,(t)$ è situata, per $t > 0$, nell'interno di $D\,[f\,(x^{(0)})]$ e quindi interamente nell'interno di $D\,(c)$. Nell'intervallo $(T, 2\,T)$ esiste, pertanto, la soluzione del sistema (1) che in T coincide con quella già calcolata nell'intervallo $(0, T)$, ecc. Si perviene dunque al teorema:

I. – *Se esiste una costante c tale che il dominio* D (c), *dianzi definito, sia limitato, assunto ad arbitrio un punto* $x^{(0)}$ *interno a* D (c), *in cui riesca* $\operatorname{grad} f(x^{(0)}) \neq 0$, *il sistema di equazioni* (1) *e* (2), *possiede una soluzione* $x(t)$, *nell'intervallo* $(0, \infty)$ *dell'asse t. La curva* $x = x(t)$ *si mantiene interna a* D (c) *e, per* $t > 0$, *interna a* D $[f(x^{(0)})]$, *e lungo di essa la funzione* $f[x(t)]$ *è sempre decrescente al crescer di t da* 0 *a* ∞.

Ad ogni curva $x = x(t)$, soluzione del sistema (1) e (2), nell'intervallo $(0, \infty)$ e uscente da un punto nel quale sia $\operatorname{grad} f \neq 0$, sarà dato il nome di *curva minimante* di $f(x)$ e ad un'ipersuperficie di equazione $f(x) = \gamma$, con γ costante, quella di *ipersuperficie di livello della funzione* $f(x)$. Evidentemente:

II. – *Ogni curva minimante della funzione* $f(x)$ *è priva di punti multipli e di punti comuni con ogni altra minimante, né può avere più di un punto in comune con una ipersuperficie di livello della* $f(x)$ *stessa e le è normale in un tal punto, sempre regolare per la ipersuperficie.*

Detto E l'insieme dei punti di A nei quali è nullo $\operatorname{grad} f(x)$, sussiste il teorema:

III. – *Se, per una certa costante c, il dominio* D (c) *è limitato, fissato ad arbitrio un punto* $x^{(0)}$ *interno a* D (c) *non contenuto nell'insieme (chiuso)* E·D (c), *comunque si assuma un involucro aperto* I_ρ, *dell'insieme* E·D $[f(x^{(0)})]$, *avente raggio* ρ *minore della distanza del punto* $x^{(0)}$ *da* E·D (c), *la curva minimante della* $f(x)$, *di equazione* $x = x(t)$, *con punto iniziale nel punto* $x^{(0)}$, *al tendere all'infinito di t, non è mai definitivamente esterna a* I_ρ.

Detto, infatti, μ_ρ il minimo (positivo) di $|\operatorname{grad} f(x)|^2$ in D $[f(x_0)] -$ $- I_\rho \cdot D[f(x)]$, se, fissato comunque un valore $t_1 (\geq 0)$ di t, il punto $x(t)$ non penetrasse mai in I_ρ per $t > t_1$, si avrebbe

$$f[x(t_1)] - f[x(t)] = \int_{t_1}^{t} |\operatorname{grad} f(x)|^2 \, d\tau \geq \mu_\rho (t - t_1),$$

$$f[x(t)] \leq f[x(t_1)] - \mu_\rho (t - t_1),$$

e quindi $\lim f[x(t)]$ (per $t \to \infty$) $= -\infty$, e ciò è assurdo poiché il punto $x(t)$ non esce dal dominio limitato D $[f(x_0)]$. Ne segue:

IV. – *Nelle ipotesi e con le notazioni del teorema precedente, se la* $f(x)$ *ha, nel dominio* D $[f(x_0)]$, *un solo punto di minimo* $x^{(m)}$, *essendo* E·D $[f(x_0)] \equiv x^{(m)}$, *quel dominio è connesso e risulta:*

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = x^{(m)}. \tag{3}$$

Siano, invero, ρ un arbitrario numero positivo minore della distanza dal punto $x^{(m)}$ dall'insieme $x^{(0)} + \mathfrak{F}$ D $[f(x^{(0)})]$, μ_ρ il minimo di $f(x)$ sull'ipersfera $|x - x^{(m)}| = \rho/2$. Il dominio D (μ_ρ), di cui $x^{(m)}$ è un punto interno, è contenuto nell'intorno circolare I_ρ di raggio ρ del punto stesso. Detta δ_ρ la distanza di $x^{(m)}$ da $\mathfrak{F}$ D (μ_ρ), esiste, a norma del teorema precedente, un valore t_ρ di t per il quale il punto $x(t_\rho)$ è contenuto nell'intorno circolare I'_ρ di raggio δ_ρ del punto $x^{(m)}$, e quindi in D (μ_ρ). Ma, per $t \geq t_\rho$, il punto $x(t)$

non esce da $D(\mu_\varrho)$ e quindi neppure da I_ϱ, ciò che dimostra la (3). La connessione del dominio $D[f(x^{(0)})]$ segue poi dal fatto che se $x^{(1)}$ è un qualsivoglia suo punto interno distinto da $x^{(m)}$, questo è congiunto con $x^{(m)}$ dal continuo, contenuto in $D[f(x^{(0)})]$, somma della curva minimante di $f(x)$ uscente da $x^{(1)}$ e da un dominio ipersferico, contenuto in $D[f(x^{(0)})]$, col centro in $x^{(m)}$ [1].

Io propongo, appunto, di tener presente la (3) e la

$$\lim_{t\to\infty} f[x(t)] = f(x^{(m)}), \tag{4}$$

che ne segue, per la risoluzione del problema di minimo considerato. Mentre rinunzio a dilungarmi sulle molte osservazioni che questa mia proposta può suscitare, non rinunzio a indicare una generalizzazione del procedimento, nella quale si dovrebbero ricercare eventuali semplificazioni dei calcoli necessari. Siano

$$g_1(u_1, u_2, \cdots, u_r), \cdots, g_r(u_1, u_2, \cdots, u_r),$$

r funzioni reali, delle r variabili reali $u_1, u_2, \cdots, u_r$, di classe due, nello spazio intero del punto $(u_1, u_2, \cdots, u_r)$, per le quali si abbia

$$\sum_{h=1}^{r} u_h g_h(u_1, u_2, \cdots, u_r) < 0, \quad \text{se} \quad |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_r| > 0,$$

e si integri il sistema di equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{dx_h}{dt} = g_h[f_1, f_2 \cdots, f_r], & \\ x_h(0) = x_h^{(0)}, & (h = 1, 2, \cdots, r), \end{array} \right. \tag{1'} \tag{2'}$$

per $t \geqq 0$. Rimane valida la teoria esposta per i sistemi (1) e (2) e possono adoperarsi le stesse locuzioni, con una sola modificazione del teorema II, secondo la quale le curve minimanti della funzione $f(x)$, in un punto di una ipersuperficie di livello della $f(x)$ stessa, può non essere a questa normale, ma non le è mai tangente.

2. Calcolo del minimo vincolato di una funzione. – Si tratti ora di ricercare il minimo della funzione $f(x)$, vincolato dalle $q\,(\leqq r-1)$ equazioni:

$$\varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_r) = 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots, q) \tag{5}$$

(1) Wolf Gross, dell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, ha dimostrato che: *se la forma quadratica*

$$\sum_{h=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} f_{hk}(x^{(m)})\, \lambda_h \lambda_k,$$

avendo posto $f_{hk} = \partial^2 f / \partial x_h \partial x_k$, *è definita positiva, la lunghezza dell'arco della curva minimante* $x = x(t)$, *contato a partire dal punto* $x^{(0)}$, *ha un limite finito per* $t \to \infty$.

per le quali le funzioni reali $\varphi_i(x)$ sono esse pure di classe due nel campo A, ove è tale la $f(x)$. Supporremo che, per ogni punto x per il quale sono verificate le (5), risulti sempre di caratteristica q la matrice jacobiana:

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_q)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_r)}$$

e che, posto $p = r - q$, la varietà V, a p dimensioni, totalità di questi punti, sia il coinsieme dalla funzione a r componenti

$$x = \psi(u) \equiv \psi(u_1, u_2, \cdots, u_p), \tag{6}$$

relativo ad un campo B dello spazio $S_{(p)}$ a p dimensioni.

In tali ipotesi, consistendo la ricerca in quella del minimo libero della funzione $f[\psi(u)]$ nel campo B, si può ripetere, tal quale, l'analisi del numero precedente e pervenire agli stessi teoremi, ai quali però, occorre dare enunciati che conducano a metodi di calcolo, in cui sia evitato l'impiego della funzione (6), che si potrebbe essere nell'impossibilità di calcolare, per i quali possa bastare la conoscenza di qualche punto della varietà V. A tale scopo conviene fare ricorso alle nozioni seguenti.

Chiamerò *gradiente della funzione* $f(x)$, *in un punto* x *della varietà* V, *rispetto alla varietà stessa*, e lo indicherò col simbolo

$$\operatorname{grad}^{(V)} f(x),$$

il vettore proiezione ortogonale del gradiente di $f(x)$ nel detto punto, sullo spazio $S_{(p)}$ tangente alla V nel punto stesso. Indicate con $f_h^{(V)}(x)$ $(h = 1, 2, \cdots, r)$ le componenti di $\operatorname{grad}^{(V)} f(x)$, si ha:

$$f_h^{(V)}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_h} - \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_h} \qquad (h = 1, 2, \cdots, r),$$

ove, posto

$$\varphi_{ij} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}, \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, q),$$

le $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_q$, sono le componenti della soluzione del sistema di equazioni lineari:

$$\sum_{j=1}^{q} \varphi_{ij} \lambda_j = \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_k}, \qquad (i = 1, 2, \cdots, q).$$

Si diranno ora curve *minimanti della* $f(x)$ *sulla varietà* V, le curve di equazione $x = x(t)$, tracciate sulla V, essendo $x(t)$ soluzione, nell'intervallo $(0, \infty)$, del sistema di equazioni:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_h}{dt} &= -f_h^{(V)}(x_1, x_2, \cdots, x_r), \qquad (7) \\ x_h(0) &= x_h^{(0)}, \qquad (8) \end{aligned}\right\} \quad (h = 1, 2, \cdots, r)$$

ove $x^{(0)}$ è un punto di V, nel quale $\text{grad}^{(V)} f$ non è nullo. Se $x = x(t)$ è una curva integrale del sistema (7) e (8) si ha

$$\frac{d}{dt} f[x(t)] = -|\text{grad}^{(V)} f(x)|^2,$$

$$\varphi_i[x(t)] \equiv \varphi_i(x^{(0)}) = 0.$$

Ad ogni varietà a $p-1$ dimensioni tracciata sulla V lungo la quale la $f(x)$ sia costante, si darà il nome di *varietà di livello della funzione* $f(x)$ *sulla* V, ed è subito visto che:

Ogni curva minimante della $f(x)$ sulla varietà V è priva di punti multipli e di punti comuni con ogni altra minimante, né può avere più di un punto in comune con una varietà di livello della $f(x)$ stessa e le è normale in un tal punto, sempre regolare per questa varietà.

3. Calcolo di soluzioni di equazioni vettoriali. – Rappresenti, infine, $F(x)$ un vettore a s componenti reali $F_1(x), F_2(x), \cdots, F_s(x)$, assegnate funzioni di classe due nel campo A dello spazio $S_{(r)}$ e si debbano calcolare le eventuali soluzioni, in A, della equazione vettoriale

$$F(x) = 0 \tag{8}$$

cioè del sistema di s equazioni

$$F_1(x) = 0, F_2(x) = 0, \cdots, F_s(x) = 0, \tag{8}$$

nelle r incognite reali $x_1, x_2, \cdots, x_r$. Si scelga, ad arbitrio, una funzione $\Phi(u)$ di classe due, in tutto lo spazio a s dimensioni delle s^{ple} di numeri reali $u(u_1, u_2, \cdots, u_s)$, per la quale si abbia

$$\Phi(u_1, u_2, \cdots, u_s) > 0, \quad \text{se} \quad |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_s| > 0,$$

$$\Phi(0, 0, \cdots, 0) = 0.$$

Per esempio, si potrebbe porre $\Phi(u) \equiv |u|^2$, oppure, più generalmente,

$$\Phi(u) \equiv \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} c_{ij} u_i u_j, \tag{9}$$

essendo definita positiva la forma quadratica al secondo membro. Evidentemente, le soluzioni del sistema (8) devono ricercarsi fra i punti di minimo, in A, della funzione $\Phi[F(x)]$. Per calcolare dunque le eventuali soluzioni della (8) si potrà anche ricorrere all'integrazione del sistema di equazioni differenziali

$$\frac{dx_h}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x_h} \Phi[F(x)] \quad , \quad x_h(0) = x_h^{(0)}, \qquad (h = 1, 2, \cdots, r). \tag{10}$$

Così, per calcolare un'eventuale soluzione del sistema di s equazioni lineari in r incognite:

$$\sum_{k=1}^{r} a_{hk} x_k - b_k = 0 \qquad (h = 1, 2, \cdots, s), \tag{11}$$

prendendo per Φ la forma quadratica definita positiva (9), si potrà anche ricorrere all'integrazione del sistema di equazioni differenziali lineari:

$$\frac{dx_h}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} c_{ij} a_{ih} b_j - \sum_{k=1}^{r} x_k \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} c_{ij} a_{ih} a_{jk} \quad , \quad x_h(0) = x_h^{(0)},$$

e si è sicuri che se la soluzione del sistema (11) è unica, una soluzione $x(t)$ di tale sistema, converge, per t tendente all'infinito, verso quella, quale si sia il valore iniziale assegnatole [2].

L'esistenza di soluzioni in A, della (8) ha luogo allora e allora soltanto che il minimo di $\Phi[F(x)]$, in A, sia lo zero, e quindi, se, per qualche curva minimante $x = x(t)$ della funzione $\Phi[F(x)]$, si ha

$$\lim_{t \to \infty} \Phi\{F[x(t)]\} = 0. \tag{12}$$

Ora, non ha senso richiedere al calcolo numerico, anche il compito di accertare il verificarsi della (12). Col calcolo numerico si potrà solo dire se, per un certo valore di t, riesce $\Phi\{F[x(t)]\}$ minore di una certa quantità positiva σ. Onde l'importanza di criterii sufficienti in base ai quali si possa, dall'entità di questa σ, dedurre l'esistenza di soluzioni della (8) [3].

Ovviamente, se il vettore F a s componenti reali o complesse, è definito anche per vettori z a r componenti complesse, il calcolo delle soluzioni dell'equazione vettoriale $F(z) = 0$, può, separandovi il reale dall'immaginario, ricondursi a quello delle soluzioni di un sistema di $2s$ equazioni, a membri reali, in $2r$ incognite reali. Così, se $F(z)$ designa una funzione complessa dell'unica variabile complessa $z = x + iy$, il calcolo delle radici dell'equazione $F(z) = 0$ può effettuarsi anche mediante l'integrazione del sistema di due equazioni differenziali:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x} |F(z)|^2 \quad , \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial}{\partial y} |F(z)|^2.$$

Sarà, ovviamente, vantaggioso assumere i punti iniziali in domini del piano complesso che separano le radici stesse, delimitati da curve di livello della $(F(z))$, privi di radici della derivata $F'(z)$ distinte da quelle, dei quali, se $F(z)$ è un polinomio, è noto un metodo pratico di costruzione [4].

Osserviamo, infine, che se, per il sistema formato da q $(< r)$ delle equazioni (8), per esempio dalle prime q, è possibile trovare una soluzione $x^{(0)}$, scelta ad arbitrio una funzione $\Phi(u_1, u_2, \cdots, u_{s-q})$, di classe due in tutto lo spazio a $s - q$ dimensioni delle $(s-q)^{\text{ple}}$ di numeri reali $u_1, u_2, \cdots, u_{s-q}$, per la quale si abbia

$$\Phi(u_1, u_2, \cdots, u_{s-q}) > 0 \text{ , per } |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_{s-q}| > 0, \Phi(0, 0, \cdots, 0) = 0,$$

(2) Cfr. E. STIEFEL, *Relaxation methoden besser strategie zur Lösung linearer Gleichungssysteme*, «Commentarii Mathematici Helvetici», vol. 29, pp. 157–179 (1955).

(3) Cfr. PICONE e FICHERA, *Trattato di Analisi Matematica*, edizione Tumminelli, Roma (1955). Il Teorema XIII del n. 81 di questo trattato fornisce uno di tali criterii sufficienti, quando sia $r = s$.

(4) Cfr. PICONE e FICHERA, loc. cit. (3), p. 182.

si potrà richiedere (cfr. n. 2) la ricerca di una soluzione del sistema di equazione (8) anche all'integrazione del sistema di equazioni differenziali:

$$\frac{dx}{dt} = - \operatorname{grad}^{(V)} \Phi \left[F_{q+1}(x), F_{q+2}(x), \cdots, F_s(x) \right],$$

con la condizione iniziale

$$x(0) = x^{(0)},$$

ove V designa la varietà di equazioni

$$F_1(x) = 0 \quad , \quad F_2(x) = 0, \cdots, F_q(x) = 0.$$

Geometria. — *Sui riferimenti fra superficie per incidenza o parallelismo di piani tangenti.* Nota (*) del Socio BENIAMINO SEGRE.

1. Siano X ed Y due (porzioni di) superficie differenziabili di classe $\mathcal{C}^2$, di un S_n proiettivo reale ($n \geq 3$); e supponiamo che fra esse interceda un riferimento $\mathcal{T}$ biunivoco, regolare, tale che i piani tangenti ad X, Y in due punti omologhi x, y qualsiansi s'incontrino lungo una retta, r, non passante né per x né per y. Com'è ben noto, $\mathcal{T}$ induce un'omografia (non degenere) fra i fasci delle rette tangenti ad X, Y in x, y: segando tali fasci con r, si ottiene così in modo intrinseco un'omografia di r in sé, che designeremo con π. Mostriamo anzitutto che:

Affinché l'omografia π risulti identica su ogni retta r, e cioè affinché le tangenti corrispondenti in punti x, y omologhi di X, Y *siano sempre incidenti fra loro, occorre e basta che tutte le rette xy concorrano in un punto fisso.*

La sufficienza di quest'ultima condizione essendo evidente, proviamone la necessità. Ora, se siamo nel caso identico, se cioè su ogni r l'omografia π è l'identità, ne discende che, detti x', y' due punti omologhi qualsiansi di X, Y infinitamente prossimi ad x, y, le rette xx' ed yy' sono fra loro incidenti; tali sono quindi anche xy ed $x'y'$, ossia ognuna delle ∞^2 rette xy risulta incidente a tutte quelle ad essa infinitamente vicine entro il relativo sistema ∞^2. Dunque ogni superficie rigata luogo di una semplice infinità di rette xy è sviluppabile, sicché le ∞^2 rette suddette (non stando tutte in un piano) concorrono necessariamente in un punto, che denotiamo con O. Alla stessa conclusione si potrebbe anche giungere mediante semplici considerazioni analitiche, del tipo di quelle che svolgeremo più oltre (n. 4) nel caso speciale di cui ora diremo.

Se – in particolare – le rette r stanno tutte in un S_{n-1}, l'argomentazione precedente si completa agevolmente mostrando per via sintetica che, nel caso identico, il riferimento $\mathcal{T}$ fra X ed Y risulta allora subordinato da un'omologia di centro O ed iperpiano fondamentale S_{n-1} (cfr. anche la dimostrazione analitica del n. 4).

Qualunque sia $\mathcal{T}$, l'omografia π – se non è identica – definisce su r due punti uniti, U, V, i quali possono essere reali e distinti, complessi coniugati, o reali e coincidenti. Per semplicità di esposizione escluderemo la seconda alternativa, la quale, d'altronde, può venire ricondotta alla prima coll'ampliare S_n al campo complesso. La prima e la terza alternativa saranno indicate rispettivamente come il caso iperbolico (includente il caso involutorio quando π è un'involuzione) ed il caso parabolico; e ci limiteremo a considerare porzioni di X, Y presentanti sempre lo stesso caso in ciascuna coppia di punti omologhi. Allora, in ogni punto x di X (od y di Y), vengono intrinsecamente definite due direzioni tangenti

(*) Presentata nella seduta del 13 dicembre 1958.

xU , xV (od yU , yV), sempre distinte o sempre coincidenti; sicché su X (su Y) si potranno considerare le curve inviluppate da quelle direzioni, che verranno dette le *curve caratteristiche* di $\mathcal{C}$.

Un'argomentazione sintetica analoga ad altra precedente mostra che:

Nel caso iperbolico, le ∞^2 *rette xy costituiscono una congruenza, in quanto esse – corrispondentemente alle curve caratteristiche di* $\mathcal{C}$ *– si distribuiscono in un doppio sistema* ∞^1 *di rigate sviluppabili.*

Da qui, con opportuno passaggio al limite, si deduce che:

Nel caso parabolico, le ∞^2 *rette xy costituiscono quella che diremo una congruenza parabolica, nel senso che – corrispondentemente alle curve caratteristiche di* $\mathcal{C}$ *– esse si distribuiscono in un semplice sistema* ∞^1 *di rigate sviluppabili, che – se non sono coni – ammettono quali spigoli di regresso un sistema di asintotiche della superficie da questi riempita.*

2. Ci proponiamo ora di approfondire l'eventualità, già contemplata di passaggio nel n. 1, in cui tutte le rette r stiano in un S_{n-1} fisso. In questa ipotesi riescirà comodo di ridurre S_n ad uno spazio affine, assumendo ivi S_{n-1} come iperpiano all'infinito, con che il riferimento $\mathcal{C}$ fra le superficie X ed Y avviene semplicemente per *parallelismo di piani tangenti.*

Se si suppone $n > 3$ e si considerano le proiezioni parallele X′ ed Y′ di X ed Y da uno stesso centro (improprio) arbitrario – di dimensione $n - 4$ – su di un S_3 sghembo con esso, il riferimento $\mathcal{C}'$ fra X′ ed Y′ ha ancora luogo per parallelismo di piani tangenti, ed ammette manifestamente come curve caratteristiche le proiezioni delle curve caratteristiche di $\mathcal{C}$.

D'altronde, se si suppone $n = 3$ e si conservano le notazioni del n. 1, segando con r le involuzioni delle tangenti coniugate a X in x ed a Y in y si ottengono due involuzioni, ξ ed η, che supponiamo non degeneri (il che val quanto ammettere che X ed Y non siano sviluppabili). Se allora ci si vale opportunamente della definizione classica data da Dupin per le tangenti coniugate, si ottiene tosto l'importante relazione

$$\pi = \xi\eta .$$

Questa implica che:

a) π è identica se, e soltanto se, ξ ed η coincidono, ossia se le due tangenti asintotiche di X in x (distinte per ipotesi) risultano parallele alle due tangenti asintotiche di Y in y;

b) π è parabolica se, e soltanto se, una tangente asintotica di X in x è parallela ad una tangente asintotica di Y in y;

c) π è involutoria se, e soltanto se, le due coppie segate su r dalle tangenti asintotiche di X ed Y in x ed y formano un gruppo armonico;

d) i punti U , V costituiscono la coppia comune alle involuzioni ξ , η. Pertanto xU ed xV sono tangenti coniugate di X in x e, in particolare, se coincidono si riducono ad una tangente asintotica; e similmente per yU , yV.

Ne discende, fra l'altro, che:

In ogni riferimento $\mathfrak{T}$ del tipo attuale, che presenti il caso iperbolico, le curve caratteristiche di $\mathfrak{T}$ su X *e su* Y *costituiscono due reti (coniugate alla congruenza descritta da xy, di cui al n. 1). Se $\mathfrak{T}$ presenta il caso parabolico, le curve caratteristiche di $\mathfrak{T}$ sia su* X *che su* Y *costituiscono rispettivamente ivi un sistema di asintotiche. Tanto nell'un caso che nell'altro, la retta che tocca una qualunque delle curve suddette in un suo punto qualsiasi risulta parallela a quella che tocca la curva corrispondente nel punto omologo.*

Per $n = 3$, questo teorema segue senz'altro da *d*). Se $n > 3$, il teorema stesso si deduce poi subito dal caso così acquisito, col proiettare X ed Y su di un generico S_3 – come nel secondo capoverso del presente numero – e valersi quindi dei risultati dianzi ottenuti.

Mentre la prima parte del precedente teorema è sostanzialmente nota [1], la seconda appare nuova [2]. Nei numeri seguenti ritroveremo tali risultati analiticamente, completandoli anche in varie direzioni.

3. Fissiamo in S_n un qualsiasi riferimento affine; allora le coordinate $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$, $(y^1, y^2, \cdots, y^n)$ dei punti x, y di X, Y potranno assumersi funzioni di classe $\mathfrak{C}^2$ di due parametri u, v, in guisa che punti x, y omologhi in $\mathfrak{T}$ provengano dagli stessi valori dei parametri. La condizione che in due punti siffatti X ed Y abbiano piani tangenti fra loro paralleli, si traduce in ciò che le x^i, y^i (per $i = 1, 2, \cdots, n$) soddisfino ad un sistema della forma

$$(1) \qquad y_u = ax_u + bx_v \quad , \quad y_v = cx_u + dx_v \, ,$$

ove gli indici in basso denotano derivazioni e le a, b, c, d sono funzioni di classe $\mathfrak{C}^1$ di u, v, tali che $ad - bc \neq 0$.

In due punti x, y omologhi, due tangenti corrispondenti hanno coefficienti direttori del tipo $x_u + tx_v$, $y_u + ty_v = \lambda (x_u + t' x_v)$, dove t, t' risultano coordinate proiettive non omogenee nei relativi fasci tangenti (coi due riferimenti fra loro paralleli), e quindi pure coordinate in uno stesso sistema sulla retta r comune ai piani di tali fasci. In base alle (1) è subito visto che la proiettività π, definita su tale retta nel n. 1, ha l'equazione

$$(2) \qquad ctt' - dt + at' - b = 0.$$

Dunque i punti uniti U, V di π provengono dalle radici t dell'equazione

$$(3) \qquad ct^2 + (a - d)\, t - b = 0 \, ,$$

(1) Cfr. ad esempio L. P. EISENHART, *Transformations of surfaces* (Princeton Univ. Press, 1923), n. 4, dove però i riferimenti $\mathfrak{T}$ di tipo iperbolico vengono introdotti direttamente a partire dalle coppie di reti parallele.

(2) Soltanto in un recentissimo lavoro (P. DRĂGILĂ, *Correspondances singulières par parallélisme des plans tangents des deux surfaces*, « Proc. Amer. Math. Soc. », 9, 518–21 (1958)) viene alluso alla possibilità del caso parabolico per $n = 3$, di cui vien dato un esempio numerico, senza però rilevare la proprietà relativa alle asintotiche.

il cui discriminante vale

$$\Delta = (a - d)^2 + 4bc \,. \tag{4}$$

Ne discendono le seguenti caratterizzazioni:

a) caso identico: $a = d \;,\; b = c = 0$;

b) caso parabolico: $\Delta = 0$;

c) caso involutorio: $a + d = 0$;

d) caso iperbolico: $\Delta \neq 0$.

In ogni caso, un qualunque punto z della retta xy si esprime nella forma

$$z = x + g\,(y - x)\,, \tag{5}$$

dove g è una funzione di u , v, che può supporsi di classe $\mathcal{C}^1$. In forza delle (1), il punto (5) soddisfa al sistema differenziale

$$\begin{cases} z_u = g_u\,(y - x) + (ag - g + 1)\,x_u + bgx_v \\ z_v = g_v\,(y - x) + cgx_u + (dg - g + 1)\,x_v\,; \end{cases} \tag{6}$$

poiché questo per $g =$ cost. assume forma analoga a quella del sistema (1), così si ha intanto che:

L'insieme delle ∞^2 *rette xy risulta* s t r a t i f i c a b i l e. *Più precisamente, le* ∞^1 *superficie descritte da un punto della retta xy che determini un qualunque rapporto semplice* c o s t a n t e *coi punti x , y, ammettono nei vari punti di una stessa retta xy piani tangenti fra loro* p a r a l l e l i.

In base alle (6), si vede inoltre che il piano tangente in z alla superficie descritta da questo punto contiene la retta xy se, e soltanto se, la funzione g soddisfa all'equazione quadratica

$$(ag - g + 1)\,(dg - g + 1) - bcg^2 = 0\,, \tag{7}$$

ossia alla:

$$(ad - bc - a - d + 1)\,g^2 + (a + d - 2)\,g + 1 = 0\,. \tag{7'}$$

Il punto z fornito dalla (5), in corrispondenza ad una radice g di quest'equazione, è per costruzione un f u o c o dell'insieme ∞^2 delle rette xy; e viceversa. D'altro canto, la (7') ha il discriminante

$$(a + d - 2)^2 - 4\,(ad - bc - a - d + 1)\,,$$

u g u a l e a quello (4) dell'equazione (3). Riotteniamo così la parte del risultato del n. 1 affermante che, nel caso iperbolico, quell'insieme di rette ammette due distinte falde focali, ed è quindi una c o n g r u e n z a d i r e t t e nel senso usuale di questa denominazione [3]. Non ci soffermiamo ora sul caso parabolico, sul quale ritorneremo più tardi (n. 6) di proposito.

(3) Cfr. ad esempio L. P. Eisenhart, op. cit., p. 11.

4. Nel caso identico, in virtù del n. 3, *a*), le equazioni (1) riduconsi alle

$$y_u = a x_u \quad , \quad y_v = a x_v \, . \tag{8}$$

Ne discende che, attualmente, dev'essere $(a x_u)_v = (a x_v)_u$, ossia:

$$a_v x_u = a_u x_v \, .$$

Poiché il punto x descrive per ipotesi una superficie, risulta che dev'essere

$$a_u = a_v = 0 \, ,$$

e quindi $a = \text{cost.} \neq 0$, onde le (8) forniscono

$$y^i = a x^i + k^i \qquad (i = 1 \, , 2 \, , \cdots , n),$$

con le k^i costanti. Pertanto:

Affinché fra due superficie di un S_n *affine interceda un riferimento tale che tangenti omologhe in punti corrispondenti risultino sempre fra loro parallele, occorre e basta che quel riferimento risulti subordinato da un'omotetia o da una traslazione.*

5. Nel caso iperbolico, si possono scegliere su X ed Y le curve caratteristiche di $\mathcal{C}$ (n. 1) quali linee $u = \text{cost.}$ e $v = \text{cost.}$ Allora, e soltanto allora, l'equazione (3) deve avere le radici $t = 0$ e $t = \infty$, e non essere identicamente soddisfatta, onde dev'essere

$$b = c = 0 \quad , \quad a \neq d \quad , \quad ad \neq 0;$$

il sistema (1) si riduce così alla forma

$$y_u = a x_u \quad , \quad y_v = d x_v \, , \tag{9}$$

ed equivale a quello che da esso si deduce con lo scambio di x ed y, a ed $1/a$, d ed $1/d$.

Attualmente la (7) ammette le radici

$$g' = 1/(1 - a) \quad , \quad g'' = 1/(1 - d);$$

sicché il birapporto dei punti $x \, , y$ e dei due fuochi $z' = x + g' (y - x)$, $z'' = x + g'' (y - x)$ situati sulla loro congiungente (n. 3) vale

$$(x \, y \, z' \, z'') = (0 \, 1 \, g' \, g'') = d/a \, .$$

In virtù del n. 3, *c*), si ha quindi che:

Due superficie riferite per parallelismo di piani tangenti presentano il caso involutorio se, e soltanto se, due loro punti omologhi qualsiansi sono separati armonicamente dai fuochi relativi alla loro congiungente. In tal caso, in virtù di noti risultati (4), *ciascuna delle due reti formate dalle curve*

(4) Cfr. ad esempio G. TZITZÉICA, *Géometrie différentielle projective des réseaux* (Bucarest, Cultura Națională, 1923), nn. 84–86.

caratteristiche della corrispondenza è ad invarianti uguali, e le due reti risultano trasformate di Koenigs–Moutard l'una dell'altra.

Possiamo stabilire direttamente e completare la seconda parte del precedente teorema, osservando che – in forza delle (9) – dev'essere $(ax_u)_v = (dx_v)_u$, ossia:

$$x_{uv} + \frac{a_v}{a-d} x_u + \frac{d_u}{d-a} x_v = 0. \tag{10}$$

La (10) dimostra intanto che, come già sapevamo (n. 2), le curve caratteristiche di $\mathfrak{T}$ su X costituiscono una r e t e , coniugata alla congruenza descritta da xy; del pari, le curve caratteristiche di $\mathfrak{T}$ su Y costituiscono una r e t e , la cui equazione si deduce dalla (10) con gli scambi indicati alla fine del 1° capoverso del presente numero. Rileviamo che *le due reti possono risultare entrambe ad invarianti uguali senza che si presenti il caso involutorio*, come accade se ad esempio si assumono a e d uguali a funzioni arbitrarie (non costanti) rispettivamente della sola v e della sola u.

Nel c a s o i n v o l u t o r i o si ha $d = -a$ (n. 3, *c*), onde il sistema (9) diventa

$$y_u = ax_u \quad , \quad y_v = -ax_v , \tag{11}$$

e l'equazione di Laplace (10) riducesi alla

$$x_{uv} + (\log \sqrt{a})_v x_u + (\log \sqrt{a})_u x_v = 0, \tag{12}$$

che è manifestamente sempre ad i n v a r i a n t i u g u a l i . L'equazione analoga per y, senz'altro ottenibile con gli scambi suindicati, è:

$$y_{uv} - (\log \sqrt{a})_v y_u - (\log \sqrt{a})_u y_v = 0. \tag{13}$$

Nota una qualunque soluzione x della (12), il sistema (11) in y risulta – per costruzione della (12) – completamente integrabile, e fornisce quindi – m e d i a n t e q u a d r a t u r e – una soluzione y della (13) (definita a meno di una costante additiva); il passaggio inverso da una soluzione y della (13) ad una soluzione x della (12) si ottiene subito similmente, effettuando in ciò che precede gli scambi suddetti.

Si ha così una nuova formulazione della classica t r a s f o r m a z i o n e d i M o u t a r d , più semplice e spontanea di quella usuale [5].

6. Ci tratterremo da ultimo sul c a s o p a r a b o l i c o (non identico); l'indagine relativa verrà poi estesa ed approfondita ulteriormente in un lavoro successivo.

(5) T. F. MOUTARD, *Sur la construction des équations de la forme* $\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \lambda(x, y)$, *qui admettent une intégrale générale explicite*, « Journ. de l'Ec. Polyt. », *28*, 1–11 (1878). Cfr. altresì il n. 84 del trattato citato del Tzitzéica, e G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*,, t. II, 2ème éd. (Paris, Gauthier-Villars, 1915), n. 390.

Assunte le curve caratteristiche di $\mathfrak{T}$ su X (e su Y) quali linee $v = \text{cost.}$, l'equazione (3) viene ad avere $t = 0$ come radice doppia, senza tuttavia risultare identicamente soddisfatta, onde dev'essere

$$b = 0 \quad , \quad d = a \quad , \quad ac \neq 0.$$

Corrispondentemente, il sistema (1) assume la forma:

$$y_u = a x_u \quad , \quad y_v = c x_u + a x_v, \tag{14}$$

e l'equazione (7) ammette la radice doppia

$$g = 1/(1 - a),$$

onde – in base alla (5) – l'unico fuoco z sulla retta xy viene dato da

$$(a - 1)\, z = a x - y. \tag{15}$$

Nel seguente capoverso supporremo che z non cada sempre all'infinito, e cioè che non risulti identicamente $a = 1$.

Dalla (15), avuto riguardo alle (14), seguono le:

$$[(a - 1)\, z]_u = a_u x \ , \ [(a - 1)\, z]_{uu} = a_{uu} x + a_u x_u \ , \ [(a - 1)\, z]_v = a_v x - c x_u .$$

La prima di queste equazioni mostra che, se $a_u = 0$, ossia se a dipende soltanto da v, il punto z rimane fisso al variare del parametro u. Se invece $a_u \neq 0$, tali equazioni implicano la

$$c a_u [(a - 1)\, z]_{uu} - (c a_{uu} + a_u a_v) [(a - 1)\, z]_u + a_u^2 [(a - 1)\, z]_v = 0, \tag{16}$$

la quale esprime che – sulla superficie Z descritta dal punto z – le curve $v = \text{cost.}$ costituiscono un sistema di asintotiche. Ciò dimostra che, attualmente, le ∞^2 rette xy generano sempre una congruenza parabolica (n. 1), avente nel secondo caso Z come falda focale.

Dalle (14) si trae subito la $(a x_u)_v = (c x_u + a x_v)_u$; e questa si identifica con l'equazione di Laplace di tipo parabolico

$$x_{uu} + \mathrm{A} x_u + \mathrm{B} x_v = 0, \tag{17}$$

ove di ponga:

$$\mathrm{A} = (c_u - a_v)/c \quad , \quad \mathrm{B} = a_u/c. \tag{18}$$

Ritroviamo così il fatto, già altrimenti acquisito (n. 2), che le curve caratteristiche di $\mathfrak{T}$ su X costituiscono ivi un sistema di asintotiche.

Una proprietà analoga vale naturalmente per Y. Più precisamente, poiché il sistema (14) equivale a quello che da esso si deduce con lo scambio di x ed y, a ed $1/a$, c e $-c/a^2$, così Y soddisfa all'equazione di Laplace di tipo parabolico:

$$y_{uu} + (\mathrm{A} - 2 a_u/a)\, y_u + \mathrm{B} y_v = 0, \tag{19}$$

che appunto si ottiene dalle (17), (18) con tali scambi.

Notiamo che, se $a_u \neq 0$, e quindi $B \neq 0$, eliminando c fra le (18) si ottiene la

$$a_{uu} - (A + B_u/B)\, a_u - B a_v \,. \tag{20}$$

D'altro canto, in virtù della (17), risulta $B = 0$ se, e soltanto se, le asintotiche $v = \text{cost.}$ di X sono rette, nel qual caso – in forza della (19) – anche le asintotiche $v = \text{cost.}$ di Y sono rette (parallele alle rette asintotiche di X). In conclusione abbiamo che:

Data una superficie X *di* S_n *su cui sia noto un sistema di asintotiche non rettilinee, e cioè che soddisfi ad un'equazione* (17) *con* $B \neq 0$, *le superficie* Y *di* S_n *riferite ad* X *in una corrispondenza per parallelismo di piani tangenti di tipo parabolico si hanno in corrispondenza alle varie soluzioni, a, non costanti* (*e quindi tali che* $a_u \neq 0$) *della* (20), *e su ciascuna di esse risulta noto un sistema di asintotiche. Più precisamente, si ottiene una di quelle* Y *con sole quadrature dalle* (14), *ove si ponga per a una siffatta soluzione della* (20) *e si faccia* $c = a_u/B$. *Il riferimento fra* X *ed* Y *muta le suddette asintotiche di* X *in asintotiche* (*non rettilinee*) *di* Y, *in guisa che le tangenti in punti omologhi a due asintotiche corrispondenti risultano sempre parallele fra loro.*

Le equazioni (17), (19) sono quindi tali che ogni soluzione dell'una determina – con sole quadrature – una soluzione dell'altra, e viceversa; sicché, allora, la (15) fornisce anche corrispondentemente – sotto forma finita – una soluzione z della (16). Così, ad esempio, per $A = 0$, $B = 1$ si ottiene che, detta $a = a(u, v)$ una qualunque soluzione non costante dell'equazione del calore $a_{uu} = a_v$, da ogni integrale x dell'equazione

$$x_{uu} + x_v = 0 \tag{21}$$

(che si riconduce a quella del calore scrivendo $-v$ in luogo di v) se ne può dedurre con sole qudrature uno y della

$$y_{uu} - 2\frac{a_u}{a} y_u + y_v = 0,$$

e viceversa.

Ciò permette di costruire quanti esempi si vogliano di superficie X, Y, situate fra loro nella relazione specificata dal precedente enunciato.

Se – come caso ulteriormente particolare – negli sviluppi del penultimo capoverso si assume $a = e^{ku + k^2 v}$ (con k costante arbitraria) e poi si scrive ay in luogo di y, si ottiene che, per ogni integrale x dell'equazione (21), la

$$y = e^{-ku - k^2 v} \int e^{ku + k^2 v} [x_u\, du + (k x_u + x_v)\, dv]$$

fornisce una soluzione y dell'equazione medesima (ove l'integrale risulta definito a meno di una costante additiva), passandosi inversamente da y ad x mediante la

$$x = \int [(y_u + k y)\, du + (y_v - k y_u)\, dv] \,.$$

Meccanica. — *Il problema dell'isteresi negli stati di coazione.* Nota III (*) del Socio GUSTAVO COLONNETTI.

Nello esporre certi miei nuovi punti di vista sul problema dell'equilibrio elasto-plastico nel tempo (1), ho esplicitamente supposto che, nell'istante in cui si verifica la prima applicazione delle forze esterne (istante assunto come origine dei tempi), ciascun elemento del corpo si trovi nel suo stato naturale non deformato; che cioè nel corpo non esista, inizialmente, alcuno stato di coazione.

Qui mi propongo di introdurre quei medesimi punti di vista nello studio di quello che si potrebbe chiamare il problema complementare: nello studio cioè degli stati di coazione che si verificano in assenza di forze esterne.

È noto che questi stati di coazione si possono sempre (qualunque sia la loro origine fisica) considerare come determinati dall'intervento di certe « deformazioni impresse » (2).

Supporremo che questo intervento delle deformazioni impresse si verifichi progressivamente, e più precisamente che esse vadano crescendo (o decrescendo) linearmente col tempo. Ciò è quanto dire che la deformazione totale (somma, in ogni caso, di una deformazione elastica ε e di una deformazione plastica $\bar{\varepsilon}$) in un punto qualunque del corpo e nell'istante generico t, si potrà sempre esprimere sotto la forma

$$\varepsilon + \bar{\varepsilon} = ct. \qquad (c = \text{cost.}) \tag{1}$$

Adotteremo per la deformazione plastica l'espressione (1)

$$\bar{\varepsilon} = \int f\varepsilon \, dt$$

ammettendo – con tutte le riserve del caso – la invariabilità della funzione f che caratterizza la suscettibilità del corpo a deformarsi plasticamente; ammettendo cioè che, nel corpo preso in esame (supposto omogeneo), e per la durata delle operazioni di cui vogliamo occuparci, non siano da prendere in considerazione fenomeni di incrudimento.

Dalla (1)

$$\varepsilon + \int f\varepsilon \, dt = ct \tag{1'}$$

differenziando, si ha

$$d\varepsilon + f\varepsilon \, dt = c\,dt$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 1° settembre 1958.

(1) G. COLONNETTI, *Nuovi punti di vista sul problema dell'equilibrio elasto-plastico nel tempo*, « Rend. Acc. Naz. Lincei »; *L'equilibrio elasto-plastico delle strutture nel tempo*, « Rend. Acc. Naz. Lincei ».

(2) G. COLONNETTI, *Scienza delle Costruzioni*, vol. II, ed. Einaudi, Torino 1955, p. 356.

cioè

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = c - f\varepsilon$$

ovvero

$$\frac{d\varepsilon}{\frac{c}{f} - \varepsilon} = f dt$$

epperò

$$ln\left[\frac{c}{f} - \varepsilon\right] = -f(t - t_0)$$

donde

$$\frac{c}{f} - \varepsilon = e^{-f(t-t_0)} .$$

Volendo che, per $t = 0$, la deformazione elastica

$$\varepsilon = \frac{c}{f} - e^{-f(t-t_0)}$$

sia identicamente nulla, basterà porre

$$\frac{c}{f} = e^{ft_0}.$$

Si otterrà così, in definitiva

(2) $$\varepsilon = \frac{c}{f}(1 - e^{-ft}).$$

Se si tiene conto che, sempre per $t = 0$, $\frac{d\varepsilon}{dt} = c$ e che per $t = \infty$ si ha $\varepsilon = \frac{c}{f}$, si può concludere che la curva che rappresenta ε in funzione di t (fig. 1) parte dall'origine; ha ivi per tangente la retta che rappresenta la legge di variazione nel tempo della deformazione totale $\varepsilon + \bar{\varepsilon}$; ammette un asintoto parallelo all'asse dei tempi, la cui ascissa c/f cresce colla velocità di applicazione delle deformazioni impresse e col diminuire del coefficiente di plasticità f.

Vogliamo ora supporre che, in un certo istante T, la legge di variazione delle deformazioni impresse improvvisamente si inverta: che cioè le deformazioni impresse prendano a decrescere.

Se il loro ritorno allo zero avvenisse istantaneamente, la sola deformazione elastica si annullerebbe, ed il punto rappresentativo, che nell'istante T era pervenuto in A (fig. 2), dovrebbe tracciare una retta parallela alla tangente iniziale; parallela la cui intersezione coll'asse delle ε definirebbe lo stato di coazione residuo.

Ma noi vogliamo invece supporre che le deformazioni impresse vadano decrescendo a poco a poco, colla medesima velocità con cui andavano dapprima crescendo.

L'esperienza dimostra che, in questo caso, non soltanto le deformazioni elastiche scompaiono, ma anche una parte delle deformazioni plastiche. Il punto rappresentativo si scosta quindi dalla parallela alla tangente iniziale per seguire una linea AB (fig. 3) la cui curvatura, più o meno marcata, sarà in ogni caso opposta a quella del diagramma ascendente.

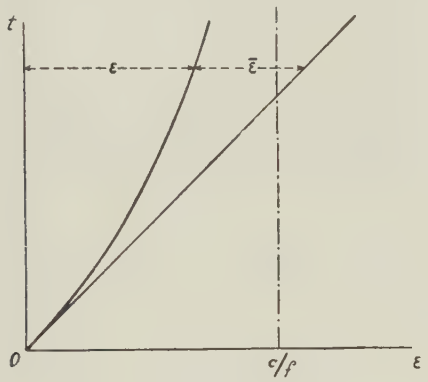


Fig. 1.

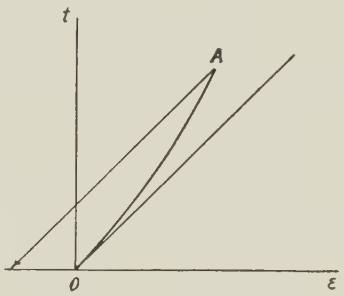


Fig. 2.

Sembra perciò logico ammettere – analogamente a quanto si è fatto nel caso delle deformazioni dovute all'azione di forze esterne – che, a partir dall'istante in cui si verifica l'inversione delle deformazioni impresse, la deformazione elastica *negativa* che ne consegue (accompagnata da una deformazione plastica, *essa pure negativa*) – per rapporto a nuovi assi coordinati

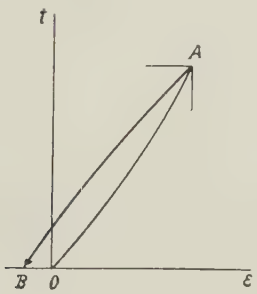


Fig. 3.

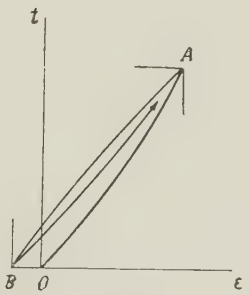


Fig. 4.

convenientemente scelti (origine in A e direzioni opposte alle precedenti) – possa venire espressa in termini analoghi a quelli già adottati per le deformazioni crescenti:

$$\varepsilon' = \frac{c}{f'}\left(1 - e^{-f't'}\right) \tag{3}$$

f' essendo una nuova costante in relazione coll'attitudine del materiale a restituire *una parte* soltanto delle deformazioni plastiche (e quindi necessariamente minore, o tutt'al più eguale ad f).

Se poi, dopo che le deformazioni impresse si sono in questo modo annullate, esse riprendono a crescere (colla medesima velocità), le deformazioni plastiche fanno immediatamente la loro ricomparsa.

Ed è facile constatare che – previo un nuovo cambiamento di assi (origine in B e direzioni iniziali) – basta mantener fermo il nuovo valore f' della nota costante per ottenere che il nuovo diagramma ascendente faccia capo in A (fig. 4); per ottenere cioè quello che per analogia chiameremo il « ciclo di isteresi » dello stato di coazione [3].

Che se invece le deformazioni impresse, dopo di essersi annullate, continuassero a decrescere fino a raggiungere valori negativi pari, in valor assoluto, ai massimi positivi raggiunti al tempo T, il nostro diagramma si presenterebbe come in fig. 5 e ci offrirebbe, anche questa volta, la possibilità di precisare il valore di f'.

La simmetria del ciclo bilaterale rispetto all'origine O implica infatti che ponendo nella (3) $t' = 2t$ si ottenga da essa $\varepsilon' = 2\varepsilon$ ciò che effettivamente si verifica se

$$f' = \tfrac{1}{2} f$$

con che la (3) diviene

$$\varepsilon' = 2\frac{c}{f}\left(1 - e^{-\frac{1}{2}ft'}\right). \tag{3'}$$

A questo punto vale la pena di mettere in evidenza come nettamente si differenzino gli stati di coazione che nelle Note precedenti [1] abbiamo riconosciuti come conseguenti ad una deformazione dovuta all'azione di forze esterne, e quelli che sono invece direttamente ed esclusivamente determinati dallo intervento di deformazioni impresse.

Ricordiamo dunque che uno dei risultati più caratteristici a cui noi

(3) L'analogia è completa malgrado le differenze nei riferimenti. In particolare è sempre valida l'interpretazione dell'area del ciclo come misura del lavoro speso per deformare il materiale.

Tale lavoro è infatti espresso da

$$\int \sigma\, d(\varepsilon + \bar{\varepsilon})$$

dove al solito

$$\sigma = E\varepsilon$$

e

$$\varepsilon + \bar{\varepsilon} = ct.$$

Sostituendo si ha per il lavoro l'espressione

$$Ec \int \varepsilon\, dt$$

dove l'integrale misura precisamente l'area racchiusa fra la curva rappresentativa delle ε e l'asse dei tempi.

siamo giunti nello studio dell'equilibrio elasto–plastico delle strutture sollecitate da forze esterne crescenti linearmente col tempo, era questo: che, per l'intervento delle deformazioni plastiche che accompagnano sempre le deformazioni elastiche, comunque piccole esse siano, la legge di distribuzione di queste (e quindi anche delle tensioni) poteva venire sostanzialmente modificata; poteva per esempio cessar di essere lineare, se tale avrebbe dovuto essere in regime di perfetta elasticità.

Orbene nulla di simile accade nelle strutture in cui uno stato di coazione vien determinato esclusivamente da deformazioni impresse.

Consideriamo, per fissare le idee, il solito caso tipico della flessione (semplice o determinata da una sollecitazione normale eccentrica). E supponiamo

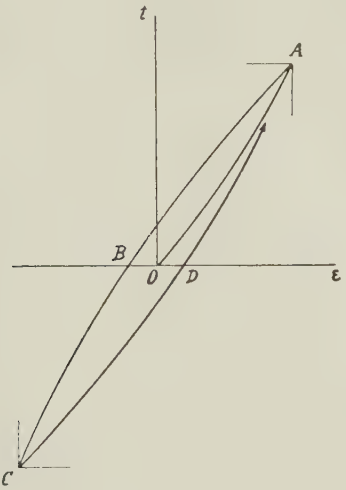


Fig. 5.

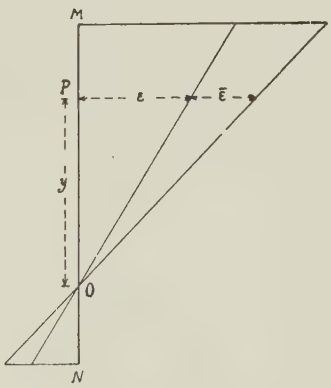


Fig. 6.

che, in assenza di forze esterne, l'inflessione della trave sia esclusivamente dovuta ad un conveniente sistema di deformazioni impresse.

Perché la legge della conservazione delle sezioni piane si mantenga verificata mentre le deformazioni impresse vanno crescendo linearmente col tempo, occorre e basta che, in ciascun punto P della sezione generica MN della trave, la costante c che nella (1) misura la velocità di incremento delle deformazioni totali $\varepsilon + \bar{\varepsilon}$ sia proporzionale alla distanza y di P dall'asse neutro della sezione (fig. 6).

Ma in questo caso, a norma della (2) e tenuto conto della supposta omogeneità del corpo e quindi della costanza del coefficiente f, anche la deformazione elastica ε, separatamente considerata, sarà proporzionale ad y.

Deformazione elastiche e tensioni si manterranno dunque linearmente distribuite sulla sezione.

Ciò che ci permette di affermare che – a differenza di quel che avviene nel caso degli stati di deformazione dovuti all'azione di forze esterne – nella formazione di stati di coazione esclusivamente dovuti all'intervento di defor-

mazioni impresse, l'influenza dei fenomeni plastici si manifesta bensì su la grandezza delle tensioni (che a causa di essi subiscono una riduzione proporzionale) ma non su la loro legge di distribuzione sulla sezione; legge che si mantiene lineare in tutti quei casi in cui essa sarebbe tale in regime di perfetta elasticità.

Se si tiene presente che (in assenza di forze esterne) lo stesso avverrà poi anche in prosieguo di tempo – quando cioè le deformazioni impresse, avendo raggiunto un conveniente valore, si manterranno costanti [4] – si può ben considerare come pienamente giustificata la consuetudine di valutare *in percentuale* il calo delle tensioni dovuto alla plasticità dei materiali.

(4) G. Colonnetti, *Scienza delle Costruzioni*, vol. I, ed. Einaudi, Torino 1953, pp. 445–448; G. Colonnetti, *L'équilibre des corps déformables*, ed. Dunod, Paris 1955, p. 40.

Geodesia. — *Sulle livellazioni dinamiche.* Nota (*) del Socio GIOVANNI BOAGA.

In una Nota precedente (1) sono state richiamate le definizioni delle quote: geopotenziale, dinamica ed ortometrica. Tenendo conto delle formule (4) e (5) della Nota ora citata, la *quota dinamica* Q_P di un punto P della superficie topografica terrestre risulta definita dalla:

$$(1) \qquad Q_P = \frac{1}{\gamma_{0/45^0}} \cdot \sum_{i=1}^{P} g_{m/i} \cdot \Delta z_i$$

dove i simboli introdotti hanno significato noto (2).

Nello studio richiamato è stato effettuato il calcolo per la determinazione delle quote dinamiche per dieci caposaldi distribuiti lungo la linea di livellazione geometrica di precisione n. 1 osservata recentemente dagli operatori dello I.G.M. utilizzando per le gravità i valori delle gravità osservate nei singoli caposaldi della livellazione stessa.

Ci proponiamo ora di ripetere i conteggi assumendo per valori delle gravità quelli teorici provenienti dalla *Teoria del campo gravitazionale ellissoidico* (3) compendiati nella seguente *formula della gravità normale* (Somigliana, Cassinis, Silva):

$$(2) \qquad \gamma_\varphi = 978{,}049\,(1 + 0{,}0052884\,\mathrm{sen}^2\,\varphi - 0{,}0000059\,\mathrm{sen}^2\,2\,\varphi)$$

dove il risultato è espresso in *Gal* (1 Gal = 1 cm/sec^2).

Dalla (2) si ricava facilmente il valore

$$\gamma_{0/45^0} = 980{,}6296\ \mathrm{Gal}$$

che compete alla gravità teorica, al livello del mare ed alla latitudine $\varphi = 45°$.

La (2) può essere scritta sotto la forma:

$$(3) \qquad \gamma_\varphi = \gamma_{0/45^0}\,(1 - b\cos 2\,\varphi + c\cos^2 2\,\varphi)$$

con

$$b = 0{,}0026304 \quad , \quad c = 0{,}0000058.$$

Desiderando riferire detta gravità su un punto P della superficie topografica terrestre di altezza H sul livello marino, si dovrà tener conto dell'altezza e porre:

$$(4) \qquad \gamma_{\varphi/H} = \gamma_\varphi \left(1 - \frac{2\,H}{R}\right)$$

(*) Presentata nella seduta del 13 dicembre 1958.

(1) Cfr. G. BOAGA, *Confronto fra i vari tipi di livellazione geometrica di precisione ottenuti con i valori delle gravità osservate nei singoli caposaldi*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. fis. mat. e nat., vol. XXV, 2° semestre 1958, pp. 254–259.

(2) Cfr. nota (1).

(3) Cfr. « Memorie della Società Astronomica Italiana », vol. IV.

con R (6371200 *m*) raggio medio terrestre, come indicato da Lallemand [4] e da altri Autori.

Osserviamo però che alla predetta *correzione per l'altezza* (correzione di Faye) è bene tuttavia aggiungere anche l'azione dell'attrazione esercitata dal materiale costituente gli strati terrestri fra la superficie equipotensiale passante per il livello marino e quella passante per il punto P considerato (correzione di Bouguer).

La (4) assume così la nuova forma:

$$\gamma_{\varphi/H} = \gamma_{\varphi}\left(1 - \frac{2H}{R} + \frac{3}{2}\cdot\frac{\delta}{\delta_m}\cdot\frac{H}{R}\right) \tag{5}$$

dove δ e δ_m rappresentano rispettivamente le densità degli strati considerati e la densità media del corpo terrestre.

Tenendo conto della (3), quest'ultima, a meno di quantità di ordine superiore, assume la forma:

$$\gamma_{\varphi/H} = \gamma_{o/45^o}\left\{1 - b\cos 2\varphi + c\cos^2 2\varphi - \frac{2H}{R}\left(1 - \frac{3}{4}\cdot\frac{\delta}{\delta_m}\right)\right\}. \tag{6}$$

Surrogando nella (1) alla $g_{m/i}$ l'espressione (6) si perviene alla *formula fondamentale della livellazione dinamica per l'utilizzazione dei valori gravimetrici normali, tenendo conto anche delle correzioni di Faye e di Bouguer*:

$$Q_P = \sum_{i=1}^{P}\Delta z_i - b\sum_{i=1}^{P}\cos 2\varphi_{m/i}\cdot\Delta z_i - \frac{2}{R}\left(1 - \frac{3}{4}\cdot\frac{\delta}{\delta_m}\right)\cdot\sum_{i=1}^{P} Z_{m/i}\cdot\Delta z_i \tag{7}$$

dove il secondo addendo del secondo membro rappresenta la *correzione dinamica di latitudine* ed il terzo, la *correzione dinamica di altitudine* (Faye–Bouguer).

I simboli ora introdotti $\varphi_{m/i}$ e $Z_{m/i}$ rappresentano le medie aritmetiche delle latitudini e delle altitudini corrispondenti a due caposaldi successivi $(i-1)$-*esimo* ed *i-esimo* rispettivamente.

Si osservi che nella (7), da noi posta, un solo elemento presenta in pratica un certo grado di incertezza, il valore della densità superficiale δ. Per un errore $\Delta\delta$ di δ si commette in conseguenza un errore nella determinazione di Q_P espresso dalla:

$$\Delta Q_P = \frac{3}{2}\cdot\frac{\Delta\delta}{\delta_m}\cdot\sum_{i=1}^{P} Z_{m/i}\cdot\Delta z_i\,. \tag{8}$$

Per una incertezza di δ di 0,1 per i c. s. considerati [5] si hanno in base alla (8) variazioni di quote dei seguenti importi:

c. s.	ΔQ	c. s.	ΔQ
1	0,000 mm	6	−0,046 mm
2	+0,006	7	−0,063
3	+0,098	8	−0,057
4	+0,261	9	−0,022
5	−0,138	10	−0,016

(4) Cfr. C. Lallemand, *Nivellement de haute précision*, Paris, Libr. Polytechnique.
(5) Cfr. nota (1).

Nell'esemplificazione fatta essi in generale non sono rilevanti, fatta eccezione per il c. s. n. 4 e per il c. s. n. 5. Per un errore di valutazione della densità superficiale dell'importo $\pm 0{,}5$, la quota del caposaldo n. 4 risulta affetto di un errore di circa $\pm$ 1 mm; eppertanto è necessario valutare con molta cautela il valore di δ ricorrendo a saggi diretti o, se si tratta di livellazioni sviluppate sul territorio del nostro Paese, ricorrendo a rilievi eseguiti [6].

Prendendo ancora a base dei calcoli la linea di livellazione n. 1 della I.G.M. con applicazione della (7) si ottengono i risultati inseriti nella Tabella I.

TABELLA I.

N. d'ordine	n. c. s.	Δz_i	$Z_i = \sum_1^i {}_j \Delta z_j$	Correzioni dinamiche di		Quote dinamiche Q_P
				latitudine	altitudine	
		m	m	mm	mm	m
1	l. m.	—	0,000.00	—	—	0,000.00
2	9	+ 51,097.51	51,097.51	— 2.66	— 0,24	51,094.61
3	18	+ 169,586.78	220,684.29	— 10.69	— 4.45	220,669.05
4	26	+ 192,118.99	412,803.28	— 18.88	— 16.03	412,768.37
5	34	— 88,062.58	324,740.70	— 15.54	— 9.95	324,715.21
6	42	— 35,910.19	288,830.81	— 14.36	— 7.90	288,808.55
7	52	— 56,893.04	231,937.47	— 12.71	— 5.13	231,919.63
8	63	— 50,158.53	181,778.94	— 11.50	— 2.61	181,764.83
9	72	— 31,787.29	149,991.65	— 10.93	— 1.63	149,979.09
10	80	— 28,797.38	121,194.27	— 10.59	— 0.90	121,182.78

È ovvio che i risultati ottenuti per le quote Q_P dei singoli c. s. con applicazione dei valori normali delle gravità, corrette per gli effetti dovuti alle altezze dei c. s. stessi sul livello del mare, non coincidono con quelle Q'_P determinate nella Nota precedente [7] utilizzando le gravità osservate, con applicazione diretta della (1), e trascritti nella Tabella II.

In tale Tabella sono riportate altresì le *differenze* $Q'_P - Q_P$ e le *anomalie gravimetriche di Bouguer*: $\Delta g''_o$ [8].

(6) Cfr. Pubb. della Commissione Geodetica Italiana, II serie, n. 9: *Carta della densità media sino al livello del mare in Italia* compilata da O. VECCHIA.

(7) Cfr. nota (1).

(8) Cfr. nota (1).

TABELLA II.

N. d'ordine	Quote dinamiche		$Q'_P - Q_P$	Anomalie grav. di Bouguer $\Delta g''_o$
	Q'_P (gravità osservata)	Q_P (gravità normale)		
	m	m	mm	milligal
1	0,000.00	0,000.00	0.00	+ 0.4
2	51,094.38	51,094.61	— 0.23	— 7.0
3	220,665.11	220,669.05	— 3.94	— 26.3
4	412,756.32	412,768.37	— 12.05	— 36.4
5	324,708.30	324,715.21	— 6.83	— 55.5
6	288,804.24	288,808.55	— 4.31	— 76.9
7	231,920.86	231,919.63	+ 1.23	— 85.3
8	181,771.08	181,764.83	+ 6.25	— 119.7
9	149,989.58	150,979.09	+ 10.49	— 130.9
10	121,197.27	121,182.78	+ 14.49	— 131.8

TABELLA III.

N. d'ordine	$Q' - Q$ campagna	$Q' - Q$ calcolo	Differenze
	mm	mm	mm
1	0,00	0.00	0.00
2	— 0.23	— 0.18	— 0.05
3	— 3.94	— 4.72	+ 0.78
4	— 12.05	— 11.80	— 0.25
5	— 6.83	— 6.83	0.00
6	— 4.31	— 4.02	— 0.29
7	+ 1.23	— 0.64	+ 0.59
8	+ 6.25	+ 6.76	— 0.51
9	+ 10.49	+ 11.00	— 0.51
10	+ 14.49	+ 14.86	— 0.37

Le differenze $Q'_P - Q_P$ si giustificano esclusivamente con la presenza delle anomalie gravimetriche. Le differenze $Q'_P - Q_P$ (ved. grafico allegato) non risultano legate alle anomalie gravimetriche di Bouguer $\Delta g''_o$ da una relazione lineare (almeno per la linea di livellazione da noi considerata); ciò è confermato dal valore $-0{,}710 \pm 0{,}108$ che assume il corrispondente *coefficiente di correlazione* (Bravais-Pearson). Esse invece risultano espresse dalla:

$$(9) \qquad Q'_P - Q_P = \frac{1}{\gamma_{0/45^\circ}} \cdot \sum_{i=1}^{P} \Delta g''_{o/i} \cdot \Delta z_i$$

che si ricava, tenendo conto di quanto detto, sottraendo membro a membro le (1), (7), precedenti.

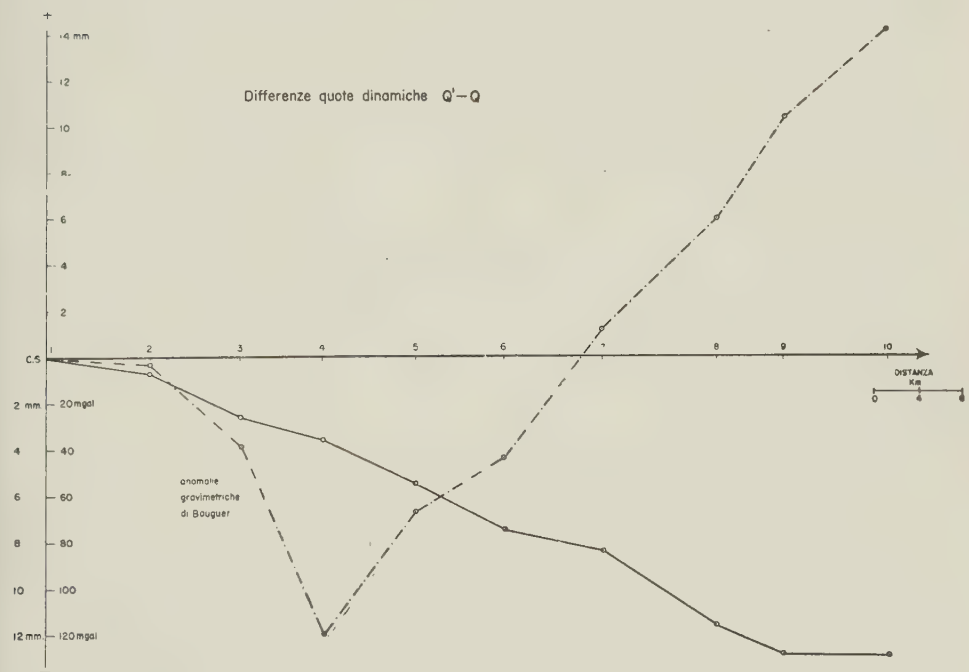


Fig. 1.

Introducendo nella (9) i valori inseriti nelle Tabelle I e II si traggono i contributi $Q' - Q$ calcolati, riportati nella terza colonna della Tabella III, dove per confronto sono trascritti anche i contributi $Q' - Q$ provenienti dalle misurazioni eseguite in campagna elaborate nel modo esposto (colonna seconda).

Come risulta dai valori inseriti nella quarta colonna della Tabella III, i termini delle due serie di valori

$$(Q' - Q)_{\text{campagna}} \quad , \quad (Q' - Q)_{\text{calcolo}}$$

differiscono fra loro di quantità assai piccole. Tali quantità presentano i caratteri di veri e propri *residui* di osservazione e di approssimazioni di calcolo (si osservi che sono stati scelti caposaldi a circa 7 Km di distanza l'uno dall'altro, anziché, come sarebbe stato preferibile, a distanze mutue di 1 Km). Per tutta la linea di livellazione considerata, della lunghezza di circa 74 Km, la somma degli scarti positivi è + 1,37 mm e quella degli scarti negativi — 1,98 mm. Lo scarto medio algebrico risulta con ciò dell'importo ± 0,06 mm e quello medio assoluto 0,33 mm. Quest'ultimo produce un errore medio chilometrico dell'importo 0,004 mm e quindi del tutto trascurabile.

Ciò premesso e considerato possiamo affermare che per la determinazione delle quote dinamiche per lunghi tragitti di livellazione geometrica di precisione e specialmente in zone che presentano grandi anomalie gravimetriche, non è consentito l'impiego dei valori gravimetrici normali, ma è indispensabile effettuare misure gravimetriche lungo l'itinerario altimetrico in tutti i caposaldi ed utilizzare conseguentemente la formula (1) per la determinazione delle quote in discorso.

Chimica. — *Sugli spettri Raman ed ultrarossi dell'osmiocianuro di potassio allo stato cristallino ed in soluzione acquosa.* (*) Nota di Giov. Battista Bonino, Paolo Chiorboli e Gianfranco Fabbri, presentata (**) dal Socio G. B. Bonino.

In precedenti pubblicazioni di questa serie si è riferito sui risultati di alcune ricerche sugli spettri Raman ed ultrarossi del ferrocianuro [1] e del ruteniocianuro [2] di potassio sia in soluzione acquosa che allo stato cristallino.

I risultati pubblicati si riferiscono specialmente alle manifestazioni spettroscopiche delle oscillazioni di valenza dei gruppi CN dei citati complessi.

Completiamo qui la serie riferendo i risultati delle nostre ricerche sugli spettri Raman ed ultrarossi dell'osmiocianuro di potassio. Le analogie chimiche e chimico-fisiche dei tre elementi Fe, Ru e Os (quali risultano dalla loro posizione nel sistema periodico degli elementi) rendono necessario questo completamento della ricerca.

L'osmiocianuro di potassio cristallizza, come il ferrocianuro ed il ruteniocianuro, con tre molecole di acqua in grandi cristalli monoclini trasparenti. Misure quantitative condotte da Dufet [3] su questi cristalli, in paragone con i corrispondenti complessi di ferro e di rutenio, hanno dato i seguenti risultati;

	a : b : c	β
$K_4[Fe(CN)_6]\cdot 3H_2O$	0,3936 : 1 : 0,3943	90° 2′
$K_4[Ru(CN)_6]\cdot 3H_2O$	0,3936 : 1 : 0,3948	90° 6′
$K_4[Os(CN)_6]\cdot 3H_2O$	0,3929 : 1 : 0,3940	90° 6′

Viene confermata così la stretta analogia cristallografica dei tre complessi

Partendo dall'ipotesi della struttura molecolare ottaedrica dei tre ioni complessi isolati, era da attendersi dunque una stretta analogia degli spettri ultrarossi e Raman anche in conseguenza dell'azione del campo cristallino sulle oscillazioni che competono alla struttura ottaedrica considerata isolata.

L'osmiocianuro di potassio era noto già dalle prime preparazioni di Claus [4] e di C. A. Martius [5]. In tempi più recenti il complesso venne preparato da F. Krauss e G. Schrader [6] facendo reagire cianuro di potassio sull'osmiato potassico.

(*) Lavoro eseguito al Centro Studi di Chimica fisica del C. N. R. presso l'Istituto Chimico «G. Ciamician» dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta dell'8 novembre 1958.

Il complesso è molto stabile anche al riscaldamento, però fuori del contatto dell'aria. Meno stabile se riscaldato in atmosfera di ossigeno; si decompone in queste condizioni e lascia un residuo di osmiato di potassio. Anche la soluzione acquosa concentrata, se riscaldata a 80–100° non si mostra del tutto stabile.

TABELLA I.

Spettro ultrarosso dell'osmiocianuro di potassio.

$K_4[Os(CN)_6]\cdot 3H_2O$		$K_4[Os(CN)_6]$		
ν (cm^{-1})	I	ν (cm^{-1})	I	
3574	*f*			
3530	*f*			νH_2O
3455	*m*			
3399	*m*			
(3274)				
2475	*dd*	2473	*dd*	
2439	*dd*	2441	*dd*	
2358	*dd*	2353	*dd*	
2115	*d*	2115	*d*	
2083	*f*	2082	*f*	
2070	*f*	2070	*f*	
2056	*ff*	2053	*ff*	$\nu C \equiv N$
2041	*ff*	2045	*ff*	
2034	*f*	2032	*f*	
2025	*f*	2026	*f*	
2009	*dd*	2007	*dd*	
1984	*dd*	1982	*dd*	
1647	*f*			δH_2O
1623	*f*			
1159	*dd*	1159	*dd*	
1117	*dd*	1115	*dd*	
1031	*dd*			
1004	*dd*	1004	*dd*	
920	*dd*	924	*dd*	
872	*dd*	864	*dd*	
831	*dd*	830	*dd*	
547	*f*	547	*f*	$\nu Os\text{-}C$
		479	*d*	

Soluzione acquosa: assorbimento semplice con massimo a 2049 cm^{-1}.

Il complesso da noi preparato secondo le indicazioni della più recente letteratura è stato ricristallizzato perciò a temperatura ambiente per lenta evaporazione di una soluzione satura. L'analisi termoponderale ci ha mo-

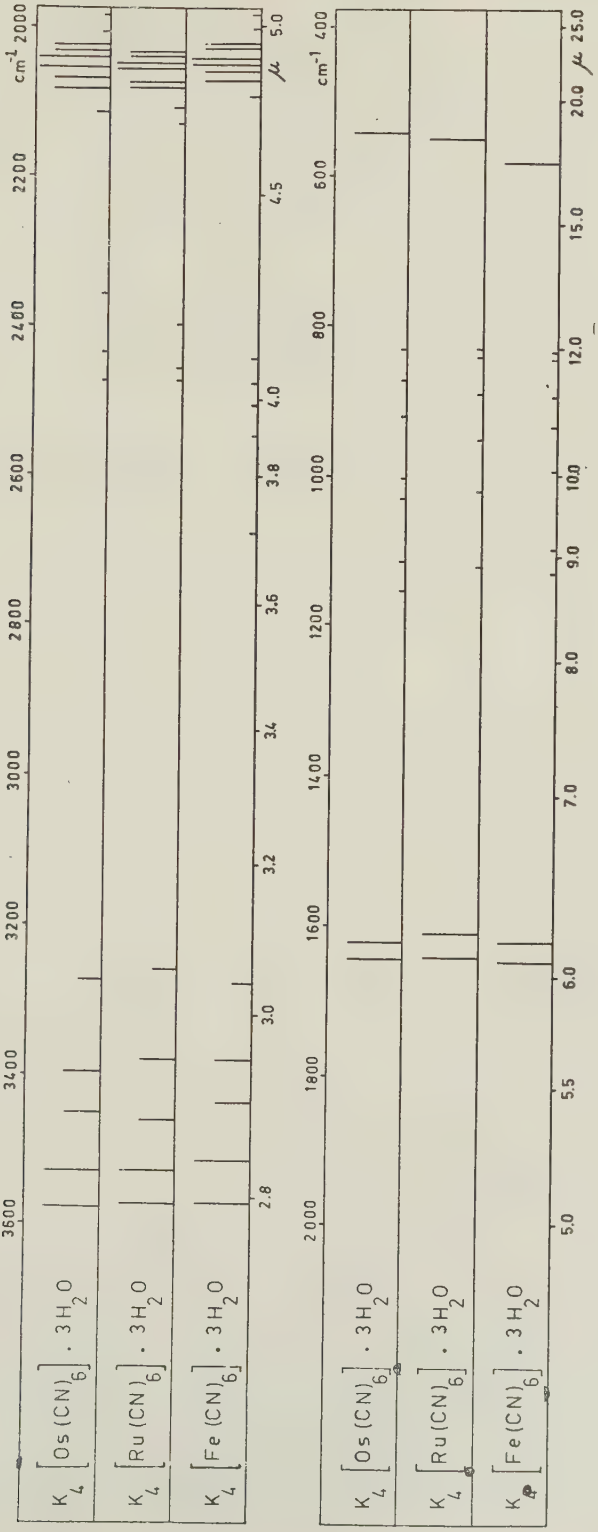

$K_4[Os(CN)_6] \cdot 3H_2O$
$K_4[Ru(CN)_6] \cdot 3H_2O$
$K_4[Fe(CN)_6] \cdot 3H_2O$
cm⁻¹ 3600 3400 3200 3000 2800 2600 2400 2200 2000
μ 2.8 3.0 3.2 3.4 3.6 3.8 4.0 4.5 5.0
cm⁻¹ 2000 1800 1600 1400 1200 1000 800 600 400
μ 5.0 5.5 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 12.0 15.0 20.0 25.0

Fig. 1.

strato una perdita in peso tra 100° e 150° corrispondente a tre molecole di acqua per ogni molecola di complesso.

I cristalli di osmiocanuro di potassio lasciati a sé all'aria sfioriscono e tendono a perdere le tre molecole di acqua di cristallizzazione.

Gli spettri ultrarossi sono stati ottenuti sia su soluzioni acquose concentrate sia su campioni di complesso allo stato cristallino, utilizzando cristalli finemente polverizzati ed impastati con olio di vasellina o con perclorobutadiene.

Per la registrazione degli spettri ultrarossi si è usato fra 2 e 5 μ uno spettrografo Beckman IR2 con ottica in LiF, fra 5,5 e 15 μ uno spettrometro Perkin Elmer 21 con ottica in salgemma e tra 15 e 25 μ uno spettrometro Perkin Elmer 112 G con ottica in KBr.

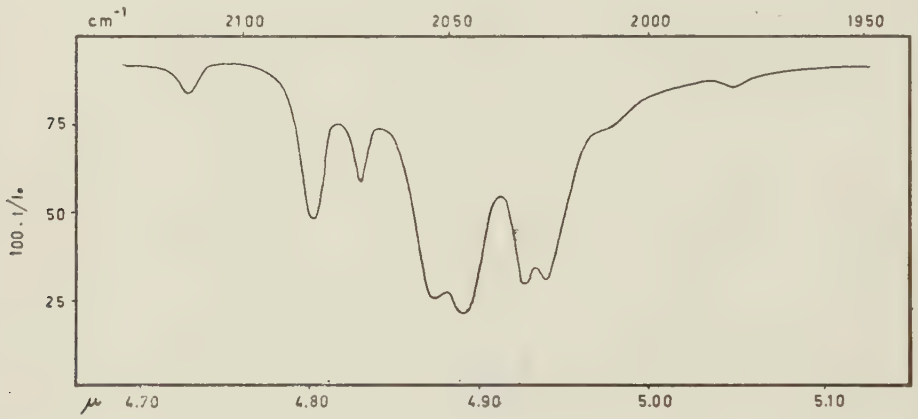


Fig. 2.

Lo spettro della soluzione acquosa è limitato alla zona delle oscillazioni di valenza CN ed è stato registrato usando una goccia di soluzione ridotta a strato sottilissimo tra due sottili vetrini coprioggetto. La trasparenza nella zona spettrale delle oscillazioni CN permette ancora buone misure.

Gli spettri Raman del complesso sia in soluzione che allo stato cristallino sono stati rilevati con l'apparecchiatura e con le tecniche già descritte in altri lavori (Chiorboli e Cappellina [1]).

I risultati sono rappresentati nelle tabelle.

Nella Tabella I è riprodotto lo spettro ultrarosso dell'osmiocianuro di potassio allo stato cristallino sia idrato con 3 molecole di acqua, sia anidro. È segnato pure in calce alla tabella il valore della frequenza del massimo di assorbimento ultrarosso della banda corrispondente alle oscillazioni di valenza CN del complesso allo stato di soluzione acquosa. Nella figura 1 sono riprodotti per comodità del lettore gli spettri ultrarossi dei tre cianuri complessi di Fe, Ru e Os. Nella fig. 2 è riprodotta la struttura della banda CN di oscillazione dell'osmiocianuro di potassio registrata sul composto anidro.

Nella fig. 3 è riprodotta in via schematica e comparativa la struttura delle bande CN dei tre complessi (rispetto alle componenti più intense).

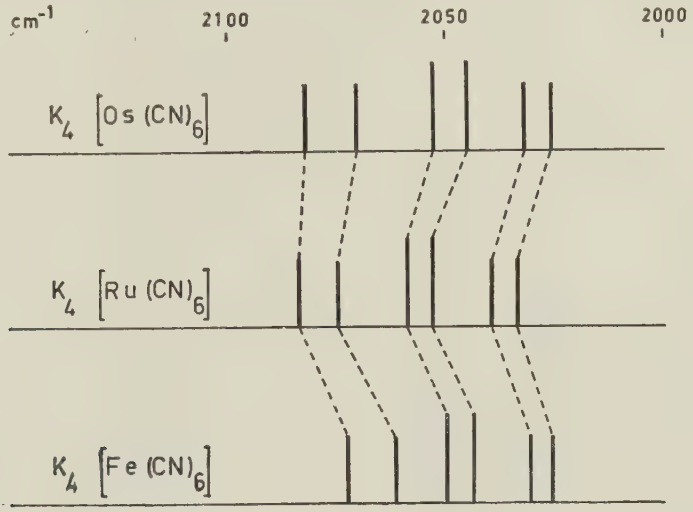


Fig. 3.

Nella Tabella II sono riportati i valori delle frequenze delle righe Raman riferentesi pure alle oscillazioni di valenza CN (zona tra 2000 e 2150 cm^{-1}) rilevate per l'osmiocianuro di potassio sia in soluzione acquosa che allo stato cristallino. Nella figura 4 sono riprodotte le registrazioni microfotometriche delle stesse righe Raman.

Tabella II.

Spettro Raman dell'osmiocianuro di potassio.

Soluzione acquosa	2059 *f*, dep.	2109 *f*, pol.	(cm^{-1})
Stato cristallino	2063 (2070) *m*, dep.	2111 *m*, dep.	

Nello spettro ultrarosso del complesso triidrato si osservano cinque massimi di assorbimento nella zona caratteristica delle oscillazioni di valenza delle molecole d'acqua ($\sim$ 3300–3500 cm^{-1}) e due massimi nella zona caratteristica delle oscillazioni di deformazione delle stesse ($\sim$ 1600 cm^{-1}).

Queste bande (sia relative ad oscillazioni di valenza che di deformazione delle molecole di acqua) mancano del tutto negli spettri del sale anidro. Nello spettro del complesso idrato la struttura e la posizione di queste bande dell'acqua di cristallizzazione risultano pressocché coincidenti con le bande mostrate dagli spettri ultrarossi del ferrocianuro e del ruteniocianuro di potassio triidrato.

Questo risultato può far ritenere che la situazione delle molecole d'acqua nei cristalli dei tre complessi, e cioè la loro posizione nel reticolo cristallino e le forze a cui esse molecole sono soggette, risultino perfettamente corrispondenti nei tre sali complessi studiati.

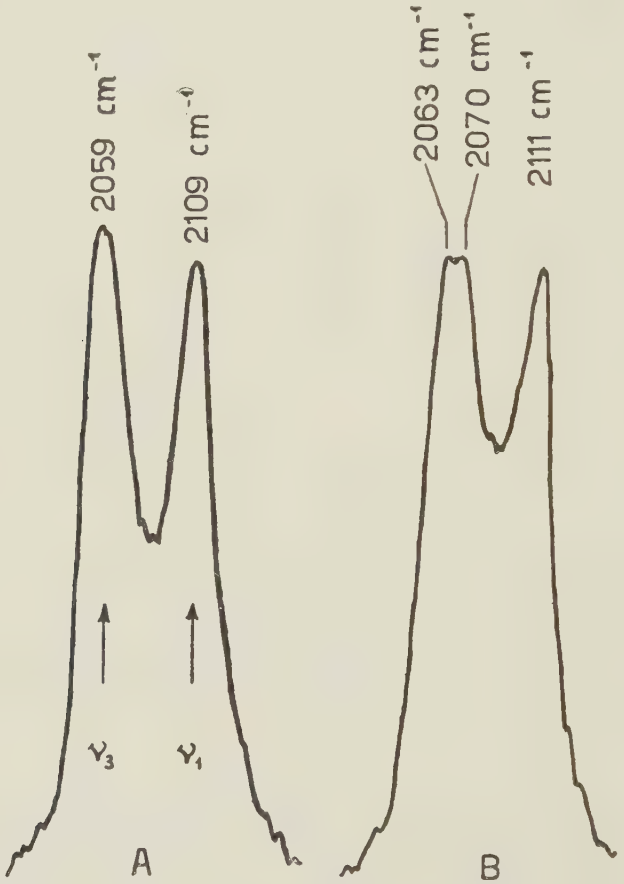


Fig. 4. – Osmiocianuro di potassio: righe Raman riferibili alle oscillazioni di valenza C≡N.
A: soluzione acquosa; B: stato cristallino.

Oscillazioni di valenza dovute ai gruppi CN.

Già in precedenti lavori si sono discusse le manifestazioni in spettro Raman ed ultrarosso dovute alle oscillazioni di valenza dei gruppi CN del ferrocianuro e del ruteniocianuro di potassio. Gli spettri delle soluzioni acquose di questi complessi sono stati riferiti alle oscillazioni della molecola isolata del complesso nella simmetria ottaedrica (gruppo O_h).

In tali condizioni (ione complesso isolato) le oscillazioni di valenza CN avrebbero le caratteristiche di simmetria e di attività riportate nella Tabella III (confermate dalle esperienze Raman e ultrarosse).

Tabella III.

$[Me(CN)_6]^{4-}$ (isolato, simmetria O_h) Tipi di oscillazioni	Attività	Risultati sperimentali Spettri della soluzione acquosa					
		$K_4[Fe(CN)_6]$		$K_4[Ru(CN)_6]$		$K_4[Os(CN)_6]$	
		Raman	u.r.	Raman	u.r.	Raman	u.r.
1 A_{1g} (ν_1)	Ra. pol.	2090	—	2106	—	2109	—
1 E_g (ν_3)	Ra. dep.	2056	—	2067	—	2059	—
(C—N) 1 F_{1u} (ν_6)	u. r.	—	2041	—	2051	—	2049
(Me—C) 1 F_{1u} (ν_7)	u. r.	—	587	—	552	—	547

Le indicazioni ν_1, ν_3, ν_6, ν_7 corrispondono alla classificazione adottata da noi (cfr. G. B. Bonino, O. Salvetti, « Ricerca scientifica », *26*, 3627 (1956)). 1 A_{1g} significa che è presente *una* oscillazione di tipo A_{1g}. I quattro diversi tipi di oscillazioni sono schematicamente nella fig. 5.

Per gli stessi complessi allo stato cristallino occorre tener conto invece della perturbazione dovuta alla più bassa simmetria del campo cristallino (C_{2h}). I cristalli monoclini di $K_4[Fe(CN)_6]\cdot 3\,H_2O$ e di $K_4[Ru(CN)_6]\cdot 3\,H_2O$ hanno celle elementari riferibili al gruppo C_{2h}^6 con 4 molecole di complesso per cella [7]. È supponibile che anche per il $K_4[Os(CN)_6]\cdot 3\,H_2O$ la cella elementare abbia la stessa struttura. Si è visto nel caso del ferrocianuro e del

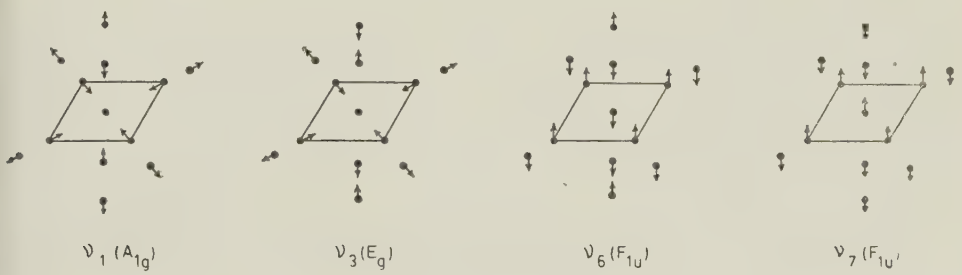


Fig. 5.

ruteniocianuro di potassio che l'azione perturbatrice nel campo cristallino è nettamente percepibile negli spettri Raman e meglio ancora negli spettri ultrarossi studiati allo stato solido per ciò che riguarda le oscillazioni di valenza CN, mentre non è nettamente percepibile per le oscillazioni di valenza Me—C.

Si può pensare che la risoluzione delle oscillazioni degeneri che impegnano particolarmente i legami Me—C corrisponda a separazioni assai piccole delle varie componenti (data la minore influenza del campo cristallino nella parte interna e centrale della struttura ottaedrica del complesso). Queste

componenti non si risolverebbero sia per il minore potere dispersivo delle apparecchiature nella zona dello spettro ultrarosso dove cadono queste oscillazioni, sia ancora per l'allargamento che mostrano queste bande e che può coprire negli spettri rilevati ogni accenno di risoluzione delle stesse.

Forse uno studio di questa banda Me—C rilevata a bassissima temperatura (per esempio azoto liquido o idrogeno liquido) e con mezzi di maggior potere risolutivo (spettrometro a reticolo) potrebbe dare qualche utile indicazione.

Stiamo appunto occupandoci di una tale ricerca.

Per le oscillazioni del gruppo CN nei tre complessi studiati si nota che l'oscillazione di tipo A_{1g} della simmetria ottaedrica si ritrova inalterata e semplice (però depolarizzata per le ragioni alle quali in altri lavori (ved. Chiorboli e Cappellina [1]) si è accennato) nello spettro Raman del cristallo.

La oscillazione E_g doppiamente degenere si osserva nettamente risolta (e cioè sdoppiata per cessazione della degenerescenza) negli spettri Raman dei cristalli di ruteniocianuro e di osmiocianuro di potassio. Nello spettro Raman del ferrocianuro di potassio non si riesce a rilevare tale sdoppiamento che però si registra negli spettri Raman dei ferrocianuri di metalli alcalino–terrosi.

Dunque per ciò che riguarda lo spettro Raman dei tre complessi studiati allo stato cristallino si ha per la oscillazione $\nu_3\,(E_g)$ una pura e semplice cessazione della degenerescenza della oscillazione stessa ma non si osservano ulteriori aumenti del numero delle righe imputabili ad eventuale accoppiamento delle oscillazioni dei vari ioni complessi contenuti nella stessa cella cristallina elementare.

Nel caso dello spettro ultrarosso dei tre cianuri complessi allo stato cristallino si osserva invece che la banda dovuta alle oscillazioni di valenza CN e corrispondente alla oscillazione triplamente degenere $\nu_6\,(F_{1u})$ del complesso isolato ottaedrico si scinde nettamente in sei intense componenti più alcune altre di bassa intensità. La spiegazione delle sei bande intense si troverebbe nella cessazione della tripla degenerescenza, con comparsa di tre massimi distinti al posto della semplice ν_6, e ciascuno di questi massimi si raddoppierebbe poi per effetto dell'accoppiamento delle stesse oscillazioni di ioni complessi differenti contenuti nella stessa cella cristallina elementare.

Queste sei componenti intense nelle quali si scinde la unica banda $\nu_6\,(F_{1u})$ sono immediatamente rilevabili. Restano da interpretare le altre due o tre bande deboli che compaiono pure nella stessa zona delle oscillazioni CN dello spettro ultrarosso dell'osmiocianuro di potassio cristallino, come in quello del ferrocianuro e del ruteniocianuro.

In un precedente lavoro (Bonino e Salvetti, « Ricerca sci. », [1]) si è mostrato che nel caso di una cella elementare cristallina riferibile al gruppo spaziale C_{2h}^6 e contenente 4 molecole per cella (caso tipico del cristallo di ferrocianuro di potassio) l'accoppiamento antisimmetrico di oscillazioni, anche inattive inizialmente in ultrarosso, può portare a componenti attive

che si aggiungono alle precedenti nello spettro. Tali componenti però sarebbero caratterizzate da una intensità assai più bassa, come effettivamente si osserva. La stessa interpretazione si potrebbe proporre per il caso dell'osmiocianuro di potassio.

Nei casi studiati si vede dunque che la semplice teoria di Halford [8] che non tien conto degli accoppiamenti delle oscillazioni tra ioni della stessa cella cristallina è insufficiente (come già aveva osservato in altri casi Couture [9]) a renderci conto della molteplicità delle bande che si trovano nella zona dello spettro ultrarosso delle oscillazioni CN, zona che, nel caso dello spettro del complesso isolato (per esempio in soluzione acquosa), mostra un sol massimo di assorbimento corrispondente alla nota oscillazione triplamente degenere ν_6 (F_{1u}).

Nella zona dello spettro ultrarosso dell'osmiocianuro di potassio cristallino fra 500 e 600 cm^{-1} si osserva una banda di assorbimento intensa da attribuirsi alla oscillazione di valenza che impegna i legami Os—C e che corrisponderebbe, per la struttura ottaedrica del complesso isolato, alla oscillazione triplamente degenere ν_7 (F_{1u}). Negli spettri del ferrocianuro e del ruteniocianuro di potassio cristallino compare un'altra banda rispettivamente a 416 e a 419 cm^{-1}. Questi assorbimenti si osservano già con difficoltà con i nostri mezzi sperimentali poiché compaiono ai limiti della zona spettrale da essi rilevabile. Si può pensare che nel caso dell'osmiocianuro di potassio tale banda cada a frequenze anche di poco minori e non sia quindi più accessibile agli apparecchi di cui disponiamo. Ci riserviamo di estendere la ricerca con mezzi atti al rilevamento di una zona dello spettro ultrarosso spostata verso le minori frequenze.

Da tutto l'insieme di queste ricerche si può però già concludere che la stretta analogia degli spettri dei tre complessi studiati allo stato cristallino costituisce un argomento a favore della corrispondenza della struttura e della simmetria della cella cristallina elementare dell'osmiocianuro di potassio con quella del ferrocianuro e del ruteniocianuro corrispondenti.

Bibliografia.

[1] G. B. Bonino, G. Fabbri, questi « Rendiconti » [VIII], *20*, 386 (1955); id. id., *20*, 414 (1956); G. B. Bonino, O. Salvetti, id. id., *20*, 150 (1956); G. B. Bonino, id. id., *20*, 419 (1956); P. Chiorboli, F. Cappellina, « Annali di chimica », *46*, 873 (1956); G. B. Bonino, O. Salvetti, « Ricerca scientifica », *26*, 3627 (1956).

[2] G. B. Bonino, G. Fabbri, questi « Rendiconti » [VIII], *23*, 191 (1957).

[3] « C.R. » *120*, 377 (1895).

[4] *Beitrage zur Chemie der Platinmetalle* (Fortschrift der Universität Kasan), p. 94 (1854).

[5] « Ann. », *117*, 362 (1861).

[6] « J. Prakt. Chem. » [2], *119*, 279 (1928).

[7] V. A. Pospelov, G. S. Zdanov, « Z. Fiz. Khim. S.S.S.R. », *21*, 405 (1947); *21*, 879 (1947).

[8] « J. Chem. Phys. », *14*, 8 (1946); *17*, 607 (1949).

[9] « J. Chem. Phys. », *15*, 153 (1947).

Chimica. — *Spettro ultrarosso di alcuni ferricianuri* (*). Nota di Giov. Battista Bonino e Gianfranco Fabbri, presentata (**) dal Socio G. B. Bonino.

Lo spettro ultrarosso dei ferricianuri allo stato solido è stato già oggetto di ricerche da parte di alcuni Autori [1].

In particolare ricordiamo una ricerca relativamente recente di Guy Emschwiller [2]. Questo autore osserva che la banda ultrarossa relativa alle oscillazioni di valenza CN da lui studiata in una serie di ferricianuri allo stato solido, si trova nella stessa zona dello spettro, ma a frequenza leggermente superiore, della corrispondente banda mostrata dai ferrocianuri. Lo stesso autore studia poi lo spettro ultrarosso del bleu di Prussia e trova una banda pressocché coincidente come posizione con quella dei ferrocianuri. Di qui egli vorrebbe concludere che lo studio degli spettri infrarossi permette di riconoscere che i bleu di Prussia si comportano come dei ferrocianuri.

Non ci sembra però che a questa interpretazione si possa giungere in modo così netto e definitivo sulla base degli spettri pubblicati dal detto autore data anche la delicatezza che è insita nell'argomento della costituzione dei bleu di Prussia, come emerge dalla letteratura chimica ed in particolare dai magistrali lavori di Livio Cambi e della sua Scuola [3].

Abbiamo voluto perciò riprendere lo studio degli spettri ultrarossi dei ferricianuri per esaminare più a fondo la consistenza ed il significato dei risultati e delle argomentazioni svolte nel lavoro citato.

Osserviamo innanzi tutto che i precedenti Autori i quali hanno esaminato lo spettro ultrarosso dei ferricianuri allo stato solido nella zona dello spettro riferibile alle oscillazioni di valenza CN hanno lavorato con mezzi sperimentali che non riescono a risolvere la banda ultrarossa del CN, dovuta come si sa, nello ione isolato, ad una oscillazione triplamente degenere (1). Ma in precedenti nostri lavori noi abbiamo mostrato sperimentalmente che nel caso dei cianuri complessi la cessazione della degenerescenza delle oscillazioni CN per effetto della perturbazione del campo cristallino e la possibilità di accoppiamento delle oscillazioni di molecole contenute nella stessa cella elementare portano ad una risoluzione della banda ultrarossa relativa all'oscillazione di valenza triplamente degenere CN in un certo numero di bande.

Era perciò supponibile che anche per il ferricianuro di potassio come per altri ferricianuri esaminati allo stato solido detta banda (non risolta

(*) Lavoro eseguito nel Centro Studi di Chimica fisica del Consiglio Nazionale delle Ricerche presso l'Istituto Chimico « Giacomo Ciamician » della Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1958.

(1) Soltanto Wiberley, Spragner e Campbell (loc. cit.) accennano a due assorbimenti rispettivamente a 4,7 e 4,9 μ nella zona del CN per il ferricianuro di potassio. Evidentemente si tratta dei due doppietti che noi troviamo rispettivamente, uno a 4,715 e a 4,721 μ e l'altro a 4,879 e 4,891 μ e che non vengono risolti dagli Autori citati.

dai mezzi sperimentali dei citati Autori) potesse invece risolversi in un certo numero di componenti.

È chiaro allora che se in realtà, come era supponibile, la banda risultasse ad un più approfondito esame come costituita da più componenti la posizione del massimo apparente di assorbimento rilevato negli spettri non risolti e pubblicati dagli Autori citati avrebbe avuto un significato piuttosto provvisorio e non tale da costituire una base sicura per affrontare discussioni strutturistiche sui bleu di Prussia.

Abbiamo studiato così lo spettro ultrarosso di alcuni ferricianuri nella zona delle oscillazioni di valenza CN utilizzando i mezzi sperimentali che già ci avevano permesso una netta risoluzione di tali bande nel caso di altri cianuri complessi.

Spettro ultrarosso del ferricianuro di potassio $K_3[Fe(CN)_6]$.

Il ferricianuro di potassio allo stato solido si presenta in cristalli monoclini con cella elementare riferibile al gruppo spaziale C_{2h}^5 contenente 4 ioni [4] ferricianidrici.

Le varie porzioni dello spettro ultrarosso del ferricianuro di potassio cristallino sono state da noi studiate con uno spettrografo Beckman IR 2 con ottiche di LiF, NaCl e KBr.

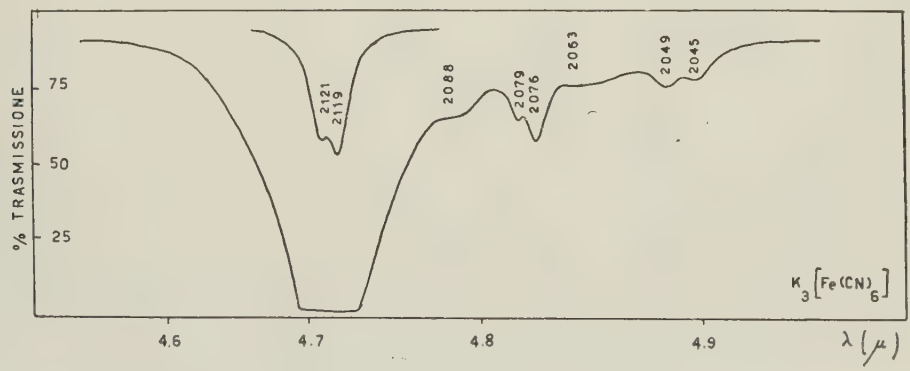


Fig. 1.

I campioni da sottoporre all'esame sono stati ottenuti polverizzando i cristalli e impastandoli poi con olio di vasellina o con perclorobutadiene seguendo la manualità già descritta in precedenti lavori di questa serie.

Nella Tabella I sono riportate le frequenze ultrarosse di massimo assorbimento.

I dati della tabella, come pure la curva di assorbimento della fig. 1, mostrano nettamente che nella zona delle oscillazioni di valenza CN dello spettro del ferricianuro solido si ha una netta risoluzione dell'unica banda

mostrata dal complesso allo stato di soluzione acquosa a 2118 cm^{-1}. Invece di questa unica banda si osservano nello spettro del cristallo sei massimi di diverse intensità da 2121 a 2045 cm^{-1} e in più due deboli massimi rispettivamente a 2088 e 2063 cm^{-1}.

TABELLA I.

λ (μ)	ν (cm^{-1})	I
3,641	2746	*dd*
3,771	2653	*dd*
3,995	2503	*dd*
4,052	2468	*dd*
4,128	2422	*dd*
4,715	2121	*ff*
4,721	2119	*ff*
(4,791)	(2088)	
4,809	2079	*d*
4,817	2076	*d*
(4,847)	(2063)	
4,879	2049	*d*
4,891	2045	*d*
19,58	510	*m*

Soluzione acquosa: banda semplice a 4,723 = 2118 cm^{-1}.

I sei massimi principali corrispondono nel loro insieme (a parte la precisa localizzazione) alla struttura già rilevata per la banda CN del cobalticianuro di potassio la cui cella elementare è riferibile, come quella del ferricianuro di potassio, al gruppo spaziale C_{2h}^5 [4].

Qualche componente della banda CN del ferricianuro di potassio (vedi fig. 2) cade proprio nella zona dello spettro verso i 2050 cm^{-1} nella posizione cioè dove si registra il massimo della banda non risolta del ferrocianuro di potassio in soluzione acquosa (2041 cm^{-1}).

Per maggior chiarezza riportiamo nella fig. 2 le posizioni dei massimi di assorbimento relativi alle oscillazioni CN sia del $K_3[Fe(CN)_6]$ che del $K_4[Fe(CN)_6] \cdot 3\,H_2O$.

Studiando lo spettro del ferricianuro di potassio con la tecnica dei dischi KBr abbiamo osservato (analogamente a quanto già avevamo rilevato Wiberley, Sprague e Campbell (loc. cit.) che il doppietto a 2049–2045 cm^{-1} (non risolto però dagli Autori ora citati) aumenta notevolmente di intensità prolungando l'operazione di polverizzazione della miscela del complesso e KBr nel mulino a vibrazione nella preparazione del campione da esaminare. Tale aumento della intensità del doppietto 2049–2045 cm^{-1} (che corrisponde alla posizione dove il ferrocianuro di potassio mostra le più intense componenti della banda CN) può spostare il baricentro della intensità (e quindi il massimo di assorbimento della banda CN quando essa non è risolta) verso

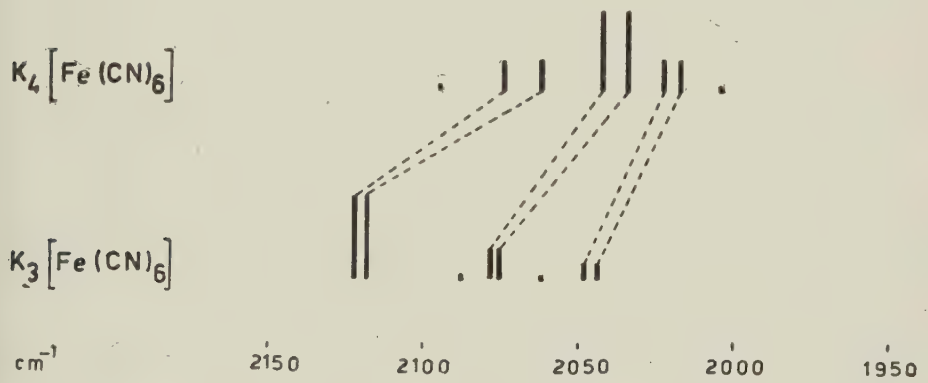


Fig. 2.

i valori caratteristici per il ferrocianuro di potassio. Si conferma così quanto sia delicato, basandosi su spettri non sufficientemente risolti, attribuire senz'altro lo spettro ultrarosso di un bleu di Prussia al tipo ferrocianuro o al tipo ferricianuro.

Ci sembrerebbe opportuno, se mai, tentare di appoggiare considerazioni di tal natura su un più preciso esame della banda CN completamente risolta nelle sue componenti.

Passando ad altre parti dello spettro ultrarosso del ferricianuro di potassio osserviamo a 2500 e 2900 cm^{-1} una serie di bande debolissime riferibili probabilmente a frequenze di combinazione.

Il massimo osservato a 510 cm^{-1} può verosimilmente attribuirsi alla oscillazione di valenza Fe—C e cioè corrisponderebbe alla oscillazione che in altri lavori abbiamo indicato con $\nu_7\,(F_{1u})$ [ovvero $\nu_7\,(T_{1u})$].

Mancano, come era da attendersi, nello spettro del ferricianuro di potassio, le bande dell'acqua di cristallizzazione dato che detto sale cristallizza anidro. Però, a causa di una certa igroscopicità del ferricianuro allo stato di finissima polvere, se non si prendono le dovute precauzioni possono

apparire nel suo spettro ultrarosso deboli accenni di bande nella zona delle oscillazioni di valenza H_2O.

Abbiamo completato la ricerca studiando lo spettro ultrarosso di altri cinque ferricianuri di Cu, Ni, Co, Cd e Mn, allo stato solido. I sali sono stati preparati secondo le indicazioni di A. K. van Bever [5].

I prodotti precipitati, filtrati e lavati venivano seccati a bassa temperatura. Gli spettri, come al solito, sono rilevati con lo spettrometro Beckman IR 2 con ottica di LiF. Le misure sono limitate a rilevare la porzione di spettro caratteristico per le oscillazioni di valenza CN.

Gli spettri ottenuti mostrano la banda CN risolta in tre componenti come se si verificasse pertanto (per effetto del campo cristallino) la cessazione della degenerescenza dell'oscillazione CN $\nu_6 (F_{1u})$ triplamente degenere. Ciascuna di queste tre componenti non si mostra però raddoppiata per accoppiamento delle oscillazioni come invece nettamente si rileva nello spettro del ferricianuro di potassio. Probabilmente l'allargamento della banda e la più piccola separazione impediscono di ottenere con i nostri mezzi per questi ferricianuri la netta risoluzione delle tre componenti.

Però dobbiamo osservare che i nostri spettri presentano già un più soddisfacente grado di risoluzione dei precedenti spettri degli stessi ferricianuri pubblicati da Guy Emschwiller. Infatti questo autore non risolve per gli stessi composti la banda del CN nei tre massimi che invece appaiono nettamente negli spettri da noi ottenuti.

Nella Tabella II e nella fig. 3 sono riportate le posizioni di massimo assorbimento delle tre componenti della banda CN messe in evidenza dai nostri spettri.

TABELLA II.

Frequenze dei massimi di assorbimento e intensità approssimative delle componenti della banda CN *rilevate sui ferricianuri dei cationi bivalenti esaminati.*

Cu^{++}	2176 *ff*	2137 *dd*	2104 *m*
Ni^{++}	2167 *ff*	2125 *dd*	2096 *dd*
Co^{++}	2161 *ff*	2120 *f*	2092 *dd*
Cd^{++}	2153 *ff*	2113 *dd*	2079 *dd*
Mn^{++}	2151 *ff*	2105 *dd*	2076 *dd*

L'insieme dei tre massimi è spostato leggermente a seconda del sale studiato.

Dai valori della frequenza che si hanno per il sale di rame, si nota un progressivo spostamento verso le minori frequenze passando rispettivamente ai sali di Ni, Co, Cd, Mn.

Fig. 3.

A prima vista sembra che ci sia una certa corrispondenza tra l'andamento delle posizioni di queste bande del CN ed il secondo potenziale di ionizzazione dei cationi corrispondenti [2].

Nella fig. 4 è riprodotto per ciascuna delle tre componenti della banda CN dei ferricianuri di cationi bivalenti studiati questo andamento della

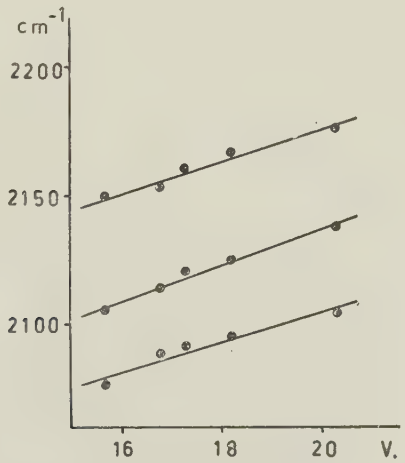


Fig. 4.

(2) Assumiamo i valori di questi potenziali dati dalle tabelle di Wicke-Landolt, *Atom und Molekular Physik*, I Tomo, Berlin (1950) e cioè Mn: 15,64 v.; Cd: 16,9 v.; Co: 17,4 v.; Ni: 18,2 v.; Cu: 20,2 v.

posizione del massimo di assorbimento in funzione potenziale di ionizzazione del catione.

In un prossimo lavoro comunicheremo i risultati delle ricerche che stiamo eseguendo sullo spettro ultrarosso di ferrocianuri di metalli pesanti come su quello di cianuri ferroso–ferrici (bleu di Prussia ecc.). Per la discussione di questi nuovi dati ci varremo dei risultati ottenuti nello studio degli spettri ultrarossi dei ferricianuri riferiti in questa Nota.

Bibliografia.

[1] *a*) R. Duval, C. Duval e J. Leconte, « Bull. Soc. Chim. France » [V], *14*, 1048 (1947).
b) F. A. Miller e C. H. Wilkins, « Anal. Chem. », *24*, 1253 (1952).
c) S. E. Wiberley, J. W. Spragne e J. E. Campbell, « Anal. Chem. », *29*, 210 (1957).
d) Lo spettro Raman del ferrocianuro di potassio è dato da J. P. Mathieu e S. Cornevin, « J. Chim. Phys. », *36*, 271 (1939).
[2] G. Emschwiller, « C. R. », *238*, 1414 (1954).
[3] Ved. per sempio L. Cambi, « Gazz. Chim. Ital. », *77*, 575 (1947).
[4] Ved. per esempio « *Crystal Data* » di Donney e Novaki, p. 337 (The geol. Soc. of. Amer. (1954)).
[5] A. K. van Bever, « Rec. Trav. Chim. Pays Bas »; *57*, 1259 (1938).

Chimica. — *Determinazione dei metalli legati a catene di polipropilene isotattico* (*). Nota di GIULIO NATTA, LUIGI GIUFFRÈ e ITALO PASQUON, presentata (**) dal Socio G. NATTA.

INTRODUZIONE.

È stato riferito, in lavori precedenti, che durante la polimerizzazione del propilene a polimero isotattico, con il sistema catalitico $Al(C_2H_5)_3$—α–$TiCl_3$, hanno luogo reazioni di scambio (cineticamente equivalenti a processi di trasferimento di catena) tra catene polimeriche in accrescimento ed alchili di composti metallorganici presenti in soluzione (1) (2) (3).

Le ricerche cinetiche sulla polimerizzazione avevano rivelato l'esistenza di due processi di trasferimento di catena, che potevano essere considerati cineticamente indipendenti (nelle condizioni sperimentate di temperatura, pressione e concentrazione dei reagenti), l'uno avente velocità dipendente dalla concentrazione dell'alluminio alchile e l'altro dalla quantità del composto di titanio introdotto nel sistema nel quale veniva effettuata la polimerizzazione.

Per il primo di tali processi si era proposto lo schema seguente:

$$(1)\qquad [Cat]—CH_2CH(CH_2CH)_n\,R + Al(C_2H_5)_3 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow [Cat]—C_2H_5 + (C_2H_5)_2Al\,CH_2CH(CH_2CH)_nR$$

Seguito dalla crescita di una nuova catena polimerica:

$$(2)\qquad [Cat]—C_2H_5 + n\,C_3H_6 \longrightarrow [Cat]—(C_3H_6)_nC_2H_5$$

ove: [Cat] = complesso catalitico formatosi sulla superficie del α–$TiCl_3$ per azione del $Al(C_2H_5)_3$.

R = —C_2H_5 oppure —C_3H_7.

In base a tale schema ogni catena polimerica distaccatasi dal complesso catalitico dovrebbe risultare legata all'alluminio.

Tale processo di scambio, che influisce sul peso molecolare del polimero, può essere interpretato anche in un altro modo, cineticamente equivalente, che può portare allo stesso risultato finale. Si può infatti interpretare il pro-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1958.

(1) G. NATTA, I. PASQUON, E. GIACHETTI, «Makrom. Chemie», *24*, 258 (1957).

(2) G. NATTA, I. PASQUON, E. GIACHETTI, «Chim. e Ind.», *39*, 1002 (1957).

(3) G. NATTA, I. PASQUON, E. GIACHETTI, G. PAJARO, «Chim. e Ind.», *40*, 267 (1958).

cesso, che causa una interruzione della crescita delle macromolecole polimeriche, che pur restano legate all'alluminio, come uno scambio tra alluminio alchili in soluzione ed alluminio alchili complessati alla superficie del $TiCl_3$

$$(3) \qquad TiX_n \underline{Al}R_2P + Al(C_2H_5)_3 \longrightarrow TiX_n\, Al(C_2H_5)_3 + \underline{Al}R_2P$$

dove con P si intende una catena polimerica.

Anche il secondo processo, cineticamente equivalente ad un trasferimento di catena, la cui velocità dipende dalla quantità di composti di titanio introdotti nel sistema, può essere interpretato come uno scambio di alchili, a cui partecipano gli alchili polimerici legati al complesso catalitico e gli alchili legati a complessi metallorganici solubili, contenenti alluminio e titanio.

Se si ammette l'esistenza di tali complessi metallorganici solubili contenenti titanio ed alluminio, la loro concentrazione in soluzione può dipendere dalla quantità di composti di titanio introdotti nel sistema catalitico. Ciò dovrebbe ad esempio verificarsi, se solo una parte aliquota degli atomi di titanio, presenti sulla superficie del $TiCl_3$, fosse in grado di complessarsi con gli alluminio alchili per dare dei complessi solubili.

Tale ipotesi è in accordo con l'esistenza dimostrata in questo Istituto di numerosi composti di titanio e di complessi contenenti titanio e metalloalchili la cui aggiunta ai sistemi catalitici contenenti α–$TiCl_3$ ne eleva o modifica l'attività catalitica [4].

Sia la prima ipotesi, corrispondente alla reazione (1), che quella corrispondente alla (3) presentano la caratteristica comune di condurre alla formazione di catene polimeriche legate ad un atomo di alluminio, distaccate dal complesso catalitico, contenente metalli di transizione, che le ha generate.

Nel presente lavoro ci siamo prefissi di ricercare per via analitica la presenza di tali composti alluminio alchilici contenenti catene polimeriche e di determinarne la quantità riferita alle moli di propilene polimerizzate.

Composti metallorganici contenenti catene polimeriche.

Per la determinazione dell'alluminio legato agli alchili polimerici, presenti nel sistema di reazione dopo un certo tempo di polimerizzazione, è stato necessario usare particolari cautele per evitare una loro decomposizione durante le operazioni per la loro separazione dal catalizzatore e dai composti metallorganici non polimerici contenuti nel sistema.

Infatti oltre ad un eventuale processo di trasferimento di catena con il monomero, che viene facilmente evitato eliminando il monomero

(4) G. Natta, I. Pasquon, E. Giachetti, Brev. Ital. 580507 (6 agosto 1958 – priorità ital. 26 febbraio 1957). G. Natta, conferenza tenuta all'« International High-Polymer Conference » Nottingham, Luglio 21-24 (1958) in corso di pubblicazione su « J. of Polymer-Science ».

stesso al termine della polimerizzazione, vi è possibilità di dissociazione ad idruro:

$$AlR_2(CH_2CHCH_3)_nR' \longrightarrow AlR_2H + CH_2=CCH_3(CH_2CHCH_3)_{n-1}R$$

Tale reazione, che è favorita dalle alte temperature (superiori ai 100°) è stata evitata operando a temperature inferiori.

Si sono dovute poi adottare delle cautele particolari per impedire la decomposizione dei composti metallorganici per ossidazione o per azione di composti ad idrogeno mobile, operando in completa assenza di aria e di umidità.

Come è descritto nella parte sperimentale, la separazione degli allumini alchili polimerici, da quelli a basso peso molecolare (alluminio trialchile usato per la preparazione del catalizzatore) liberi o chemiadsorbiti dal catalizzatore, è stata effettuata utilizzando la loro diversa solubilità.

I componenti insolubili del catalizzatore sono stati separati dai polimeri liberi o combinati per dissoluzione del polimero in xilolo a 100°, dopo aver allontanato gli alluminio–alchili a basso peso molecolare per estrazione con eptano freddo.

Tale sistema di separazione ha consentito di confermare i risultati cinetici, dimostrando che una notevole parte delle catene polimeriche rimane legata all'alluminio. Coi sistemi catalitici usati non si è osservata alcuna dissoluzione di complessi contenenti titanio legato a catene polimeriche.

I risultati ottenuti sono riportati nella Tabella I, in cui viene riportata anche la quantità di gruppi terminali $-C_2H_5$, sia di quelli provenienti dagli alluminio–alchili inizialmente presenti nei complessi catalitici sia di quelli provenienti da processi di trasferimento di alchili.

I dati sugli etili terminali si riferiscono a polimeri ottenuti in prove di polimerizzazione condotta in condizioni paragonabili, ma con catalizzatori preparati usando alluminio–alchili marcati con ^{14}C [3].

PARTE SPERIMENTALE.

1. – *Polimerizzazione.*

Il polipropilene isotattico è stato ottenuto per polimerizzazione del propilene usando come catalizzatore il sistema $Al(C_2H_5)_3$—α–$TiCl_3$.

Il volume del solvente anidro usato è stato sempre di cm^3 250. Si è operato a pressione atmosferica in un pallone di vetro, di 500 cm^3, munito di agitatore.

Alcune prove sono state eseguite in eptano a 70° C, alcune altre in xilolo a 100° C.

Sono state effettuate polimerizzazioni con concentrazioni diverse di $Al(C_2H_5)_3$ e con quantità diverse di α–$TiCl_3$ (vedi Tabella I).

La preparazione e la depurazione dei reagenti e dei solventi sono già state descritte in altri lavori [5].

(5) G. NATTA, I. PASQUON, E. GIACHETTI, «Angew. Chemie», *69*, 213 (1957); ID., «Chim. e Ind.», *39*, 993 (1957).

TABELLA I.

Gruppi terminali dovuti a processi di trasferimento di catena nel polipropilene isotattico (sistema catalitico α–$TiCl_3$—$Al(C_2H_5)_3$.

Polimerizzazione				Atomi Al per mole C_3H_6 polimerizzata nella frazione di polimero isotattico solubile in xilolo a 100° C	Gruppi terminali $-C_2H_5$ per mole C_3H_6 nel polimero insolubile in *n*-eptano a 20° C	Gruppi terminali $-C_2H_5$ per mole C_3H_6 nel polimero isotattico residuo alla estrazione con eptano 98,5°C(*)
$TiCl_3$ g	$Al(C_2H_5)_3$ cm³	solvente cm³ 250	t °C			
0,50	1,35	eptano	70	$1,3\times10^{-3}$	$2,7\times10^{-3}$	$1,7\times10^{-3}$
0,50	1,35	»	70	$1,4\times10^{-3}$	$2,7\times10^{-3}$	$1,7\times10^{-3}$
0,50	1,35	»	70	$1,4\times10^{-3}$	$2,7\times10^{-3}$	$1,7\times10^{-3}$
0,50	1,35	»	70	$1,3\times10^{-3}$	$2,7\times10^{-3}$	$1,7\times10^{-3}$
0,50	5,40	»	70	$2,7\times10^{-3}$	$4,9\times10^{-3}$	$3,0\times10^{-3}$
0,15	1,35	»	70	$0,6\times10^{-3}$	$2,3\times10^{-3}$	$1,4\times10^{-3}$
0,11	1,35	»	70	$0,5\times10^{-3}$	$2,3\times10^{-3}$	$1,4\times10^{-3}$
0,50	1,35	xilolo	100	$2,2\times10^{-3}$	n. d.	n. d.

(*) Dati calcolati in base alla percentuale ed al peso molecolare dei polimeri a stereoblocchi contenuti nella frazione estraibile con *n*-eptano all'ebollizione.

2. – *Separazione del polimero dall'eccesso di catalizzatore.*

Allo scopo di ricercare l'Al legato alla catena polimerica si è provveduto al totale allontanamento dell'eccesso di catalizzatore, disciolto nel solvente usato per la polimerizzazione, e, successivamente, alla separazione del polimero dalla fase solida contenente il α–$TiCl_3$ cristallino, avendo cura di non distruggere i legami Al—C presenti nelle catene polimeriche.

A tale scopo, dopo la polimerizzazione, si è lasciato raffreddare fino a temperatura ambiente e si è poi allontanato, per filtrazione, il solvente contenente l'eccesso di alluminio trietile. In questa operazione si allontana anche il polimero atattico (che è solubile in *n*-eptano a freddo) ed una parte della frazione di polimero a stereoblocchi.

Si sono aggiunti quindi cm³ 150 di eptano anidro scaldando a 50° C per un'ora sotto agitazione. Dopo raffreddamento fino a temperatura ambiente si è filtrato ripetendo questa operazione quattro o cinque volte.

Infine si sono aggiunti cm³ 250 di xilolo anidro e si è portata la temperatura a 100° C allo scopo di sciogliere una parte del polimero (circa 50 %). In questa operazione non si scioglie la totalità del polimero presente e ciò assicura una sua migliore separazione dal $TiCl_3$. Dopo un'ora di agitazione si

è lasciata decantare e si è sifonata, sempre a 100° C, la soluzione viscosa limpida in un provettone da vuoto. La soluzione così raccolta è stata successivamente raffreddata dapprima con ghiaccio e sale e poi con ghiaccio secco e metanolo allo scopo di precipitare il polimero. Si è filtrato, sempre a freddo, e sul liquido filtrato si è rilevata la presenza di Al per via spettrofotometrica [6].

Il polimero veniva ulteriormente disciolto in xilolo anidro e riprecipitato mediante raffreddamento a —70° C.

Queste operazioni sono state ripetute (solitamente tre o quattro volte) fino alla constatazione della completa assenza di alluminio nel filtrato.

Tutte le operazioni fin qui descritte sono state eseguite in atmosfera di azoto purissimo.

3. – *Ricerca e dosaggio dell'alluminio legato al polimero.*

Il polimero solido residuo dopo l'ultima filtrazione sopra descritta è stato ridisciolto a 100° C in cm^3 250 di xilolo anidro in atmosfera inerte.

La soluzione xilolica di polipropilene veniva successivamente filtrata su lana di vetro.

Da queste operazioni si è ottenuto un polimero completamente depurato dal $TiCl_3$ e dall'alluminio alchile in eccesso.

La soluzione filtrata veniva evaporata in capsula di platino. Il residuo secco veniva pesato e successivamente calcinato.

Le ceneri ottenute, disgregate con $KHSO_4$, sono state disciolte in H_2O e si è determinato pure per via spettrofotometrica l'Al presente nella soluzione ottenuta.

4. – *Ricerca del titanio nel polimero.*

Su una porzione della soluzione xilolica di polipropilene usata per il dosaggio dell'Al, si è ricercato il titanio per reazione con H_2O_2.

In tutte le prove la reazione è stata negativa. Data la sensibilità di tale metodo [7] possiamo ritenere che il Ti eventualmente presente col polimero è inferiore a 5×10^{-8} moli/g di polimero. Le quantità di alluminio da noi riscontrate nel polimero sono invece comprese nell'intervallo $1 \div 6{,}5 \times 10^{-5}$ moli/g di polimero.

CONCLUSIONI.

Dai risultati riportati in Tabella I, e da quanto riportato in lavori precedenti [3] si possono trarre le seguenti conclusioni:

1° Nella polimerizzazione del propilene a polimero isotattico, con il sistema catalitico $Al(C_2H_5)_3$—α–$TiCl_3$, il processo di trasferimento di catena

(6) S. E. WIBERLEY and L. G. BASSETT, «Anal. Chem.», *21*, 609 (1949).

(7) F. D. SNELL and C. T. SNELL, *Colorimetric methods of analysis*, vol. II, p. 438. Ed. D. Van Nostrand Co, N. Y., 1949.

la cui velocità è funzione della radice quadrata della concentrazione dell'alluminio alchile, introduce gruppi terminali $—C_2H_5$ in catene polimeriche che restano in gran parte legate all'alluminio.

Tali risultati sono in accordo con gli schemi di reazione (1) e (2).

Col variare della concentrazione dell'alluminio alchile, si osserva una variazione del numero di gruppi terminali $—C_2H_5$, ed una corrispondente variazione nello stesso senso del numero di atomi di Al che restano legati alle catene polimeriche (vedi Tabella I).

La quantità di Al ritrovata nel polimero, depurato nel modo sopra indicato, risulta dello stesso ordine di grandezza (sebbene inferiore) della quantità di gruppi terminali $—C_2H_5$ determinati sul polimero depurato dal catalizzatore (Tabella I). Si deve però osservare che tale confronto ha un significato solo orientativo poiché i gruppi terminali $—C_2H_5$ presenti nel polimero sono stati determinati sulla frazione insolubile in *n*–eptano a freddo, che contiene anche la frazione di polimero a stereoblocchi e che presenta un minore peso molecolare. Ciò appare dai dati riportati nella colonna 7 della Tabella I, che sono stati calcolati in base alla percentuale ed al peso molecolare dei polimeri a stereoblocchi (estraibili con *n*–eptano all'ebollizione). La determinazione dell'alluminio è stata invece limitata, per assicurare una completa separazione del polimero dal α–$TiCl_3$, ad una frazione contenente solo una parte delle catene isotattiche ed esente di polimero a stereoblocchi. La minor quantità di Al ritrovata nel polimero, rispetto ai gruppi terminali $—C_2H_5$, pur tenendo conto dell'approssimazione del metodo di determinazione, necessariamente limitata dato il tipo delle misure, può essere in parte attribuita a processi di trasferimento di catena tra alluminio alchili in soluzione (formatisi nella reazione 1) e catene polimeriche in accrescimento. Mediante tali processi di trasferimento una stessa molecola di alluminio trietile inizialmente presente potrebbe introdurre nelle catene polimeriche fino a tre gruppi $—C_2H_5$ per ogni atomo di alluminio.

Inoltre le catene polimeriche si possono staccare dall'atomo di alluminio a cui erano inizialmente legate:

$$(4)\qquad (C_2H_5)_2AlCH_2\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{C}}H(CH_2\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{C}}H)_nR \longrightarrow (C_2H_5)_2AlH + CH_2{=}\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{C}}(CH_2\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{C}}H)_nR$$

$$(5)\qquad (C_2H_5)_2AlCH_2\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{C}}H(CH_2\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{C}}H)_nR + C_3H_6 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow (C_2H_5)_2AlC_3H_7 + CH_2{=}\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{C}}(CH_2\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{C}}H)_nR$$

Alla temperatura alla quale si è operato, questi ultimi processi si possono ritenere di importanza limitata.

2° La quantità di alluminio ritrovata nel polimero non è indipendente dalla quantità di α–$TiCl_3$ (grezzo) con la quale è stata effettuata la polimerizzazione.

Tale risultato conferma i risultati cinetici e potrebbe essere attribuito alla presenza di complessi metallorganici solubili (contenenti Al e Ti e la cui concentrazione dipende dalla quantità di composto di titanio usato), che intervengono cataliticamente nel processo di trasferimento di catena tra alluminio trietile in soluzione e catena polimerica in accrescimento. In tale caso i due processi di trasferimento di catena, le cui velocità dipendono rispettivamente dalla concentrazione dell'alluminio alchile e del titanio, sarebbero, solo in apparenza, cineticamente indipendenti.

Il trasferimento di catena, la cui velocità dipende dalla quantità di titanio potrebbe anche, per lo meno in parte, essere dovuto ad una reazione di scambio tra tali complessi metallorganici in soluzione e le catene polimeriche in accrescimento.

3° Il polimero, ottenuto effettuando la polimerizzazione a 100° C, è più ricco in alluminio del polimero ottenuto in polimerizzazioni condotte a 70° C. Ciò fa ritenere che nella polimerizzazione condotta a 100° C, il rapporto: somma delle velocità dei processi di trasferimento di catena dipendente dalle concentrazioni dei componenti il sistema catalitico diviso per la velocità di polimerizzazione, abbia un valore superiore a quello relativo alle prove di polimerizzazione condotte a 70° C.

Tale risultato è in accordo con il fatto che il peso molecolare del polipropilene, ottenuto a temperature superori a 80° C, diminuisce all'aumentare della temperatura di polimerizzazione.

Chimica. — *Polimeri a struttura doppiamente isotattica* (*). Nota di Giulio Natta, Mario Farina e Mario Peraldo, presentata (**) dal Socio G. Natta.

Quattro anni fa nella seduta dell'11 dicembre 1954 di questa Accademia, era stata comunicata la sintesi di una nuova classe di polimeri, aventi una eccezionale regolarità di struttura, ottenuti per polimerizzazione delle α–olefine (1).

Per tali polimeri era stato allora proposto il nome di « isotattico », che è ora di uso generale nella letteratura macromolecolare.

Il notevole interesse suscitato da questi nuovi polimeri a struttura stericamente regolare, sia nel campo scientifico che in quello applicativo, ci ha indotto ad estendere lo studio della stereoisomeria a macromolecole, la cui catena principale è costituita da una successione regolare di coppie di atomi di carbonio aventi sostituenti diversi ed entrambi capaci di configurazioni steriche enantiomorfe.

Poiché i catalizzatori stereospecifici più efficaci attualmente noti, costituiti da sistemi che agiscono con meccanismo coordinato, polimerizzano particolarmente bene le α–olefine, abbiamo iniziato questo studio partendo da olefine mono–deuterate in posizione 1, le quali pur comportandosi chimicamente come α–olefine, dànno luogo nel polimero ad unità monomeriche contenenti 2 atomi di C asimmetrici diversamente sostituiti. A tale scopo abbiamo preparato i due deutero–propeni $CHD{=}CHCH_3$ stereoisomeri: cis e trans.

Questi monomeri sono stati ottenuti, come verrà descritto dettagliatamente in una successiva pubblicazione, per reazione tra l'acqua pesante ed i litio–propenili corrispondenti. La preparazione dei propenil–litio è stata effettuata secondo il metodo descritto da E. A. Braude e coll. (2).

L'esame infrarosso dei due propeni 1 d_1 dimostra che la configurazione sterica corrisponde a quella dei bromo derivati di partenza, fatto del resto prevedibile in seguito ai lavori di Braude su alcuni derivati del cis–propenil–litio (3).

La purezza isòtopica dei monomeri è risultata vicina o superiore al 95 %, mentre la purezza sterica è risultata inferiore, dipendendo anche dalla purezza e dalla stabilità dei bromo derivati di partenza. Il trans–propene 1 d_1 da noi

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano con il contributo della Soc. Montecatini.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1958.

(1) G. Natta, « Atti Acc. Naz. Lincei », Memorie, *4* (8), 61 (1955).

(2) E. A. Braude, J. A. Coles, « J. Chem. Soc. », 2078, 2085 (1951).

(3) E. A. Braude, *Organic Compounds of Lithium* in *Progress in Organic Chemistry*, vol. III, cap. IV, p. 172 sgg. Ediz. J. W. Cook – London (1955).

polimerizzato presentava una purezza sterica del 95 %; il cis-propene 1 d_1 dell'85 %. Si è operato su quantità dell'ordine dei decimi di grammo, e si può prevedere che in preparazioni su scala maggiore la purezza, sia isotopica che sterica, possa migliorare.

La polimerizzazione, eseguita con tecniche semimicro, evitando accuratamente presenza di aria e di umidità, è stata condotta con catalizzatori a base di alluminio trietile e α–$TiCl_3$ in n–eptano, sistema che – come è noto – risulta altamente stereospecifico nella polimerizzazione del propilene.

Oltre alla polimerizzazione di ciascuno dei due stereoisomeri, aventi la purezza sopra indicata, sono state effettuate alcune copolimerizzazioni di loro miscele.

52 Ncm^3 dell'isomero cis, 257 Ncm^3 dell'isomero trans e 82 Ncm^3 di miscela cis/trans in rapporto 2/1 sono stati separatamente polimerizzati con 0,225 g di alluminio trietile, 0,065 g di α–$TiCl_3$ in n–eptano, a temperatura ambiente per durate variabili tra 20 e 40 ore. I polimeri sono stati purificati dal catalizzatore per trattamento con alcool butilico anidro e dopo precipitazione con acetone sono stati frazionati mediante estrazioni successive con i seguenti solventi: etere etilico, n–eptano e n–ottano alla loro temperatura di ebollizione, secondo le tecniche note [4]. Gli estratti etereo, eptanico, ed ottanico, così ottenuti, sono stati esaminati all'infrarosso. Non vennero esaminati i residui ottanici poiché ricerche precedenti sui polipropileni [5] avevano rilevato che l'estratto ottanico possiede praticamente la stessa purezza sterica e la medesima temperatura di fusione del residuo ottanico, ma possiede una maggiore purezza chimica essendo il residuo maggiormente inquinato da ceneri.

TABELLA.

Solventi impiegati nel frazionamento	Frazioni ottenute per estrazione dei polimeri % in peso		
	poli (cis–propene 1 d_1)	poli (trans–propene 1 d_1)	poli (cis–trans–propene 1 d_1)
Acetone	28,6	9,6	11,9
Etere	4,2	3,1	2,6
n–eptano	4,2	3,5	6,2
n–ottano	50,0	53,4	55,5
Residuo	13,0	30,4	23,8

(4) G. NATTA, P. PINO, G. MAZZANTI, «Gazz. Chim. It.», *87*, 528 (1957).

(5) G. NATTA, G. MAZZANTI, G. CRESPI, G. MORAGLIO, «La Chim. e l'Ind.», *39*, 275 (1957).

Gli estratti ottanici presentano all'esame con i Raggi X lo stesso spettro di un polipropilene isotattico, ad elevata cristallinità, ed i loro spettri infrarossi come era da prevedersi, sono differenti da quelli del polipropilene. Gli spettri infrarossi del poli–cis–propene 1 d_1 e del poli–trans–propene 1 d_1 sono completamente differenti tra di loro, come si vede in fig. 1. Il netto dicroismo che si nota inoltre negli spettri I. R. di campioni stirati di questi due polimeri dimostra che questi sono costituiti da catene in cui tutti gli atomi sono disposti regolarmente. I due polimeri, che posseggono gli stessi scheletri di atomi di carbonio nelle loro catene come dimostrano i Raggi X, sono perciò diastereoisomeri.

Per polimerizzazione di miscele dei due isomeri si ottengono prodotti, nei cui spettri infrarossi le bande corrispondenti allo spettro dell'omopolimero del componente presente in proporzione minore, decrescono molto rapidamente di intensità, al decrescere della concentrazione dell'isomero considerato. Ciò è facilmente spiegabile con considerazioni statistiche, se si tiene presente che sono necessarie in genere successioni di due o più unità monomeriche identiche, per dare luogo alle vibrazioni del diastereoisomero corrispondente.

D'altra parte alcuni assorbimenti, come ad esempio quello fra 7,35 e 7,40 μ del poli (cis–propene 1 d_1), sono osservabili anche se l'unità monomerica è isolata fra altre differenti, come è dimostrato da copolimeri fra il propene 1 d_1 (cis e trans) e il propene 1 d_2, di cui si riferirà più dettagliatamente in altra sede. Queste bande permettono di apprezzare il rapporto tra le due forme monomeriche presenti nel polimero.

La formazione di diastereoisomeri dimostra che, durante la polimerizzazione, non avvengono rilevanti fenomeni di isomerizzazione dei monomeri, sebbene si sia osservata una certa variazione di composizione stereoisomerica e chimica nei gas residui della polimerizzazione, rispetto a quelli inizialmente introdotti, variazione che può essere attribuita ad una isomerizzazione catalitica, non necessariamente connessa con il processo di polimerizzazione.

Come già detto la differenza tra gli spettri infrarossi, essendo uguali gli spettri ai Raggi X del polimero del cis–propene 1 d_1 e del trans–propene 1 d_1, non può essere dovuta che ad una diversa e regolare disposizione sterica del deuterio rispetto al metile nei due tipi di polimeri cristallini.

Infatti, ammesso che i due polimeri siano isotattici rispetto all'atomo di carbonio β ($CHCH_3$), sono possibili due diverse disposizioni regolari del deuterio legato all'atomo di carbonio α (CHD).

In fig. 2 tali possibili configurazioni vengono illustrate adoperando la stessa rappresentazione già usata nella prima pubblicazione sui polimeri isotattici, che si ottiene supponendo stesa a zig–zag su un piano la catena principale del polimero.

In un caso (fig. 2 *a*) gli atomi D si trovano dalla stessa parte dei gruppi CH_3 e nell'altro caso (fig. 2 *b*) dalla parte opposta.

Per definire la contemporanea regolarità sterica, di tipo isotattico, posseduta sia dagli atomi di carbonio α, sia dagli atomi di carbonio β, proponiamo il nome di polimeri « di–isotattici ».

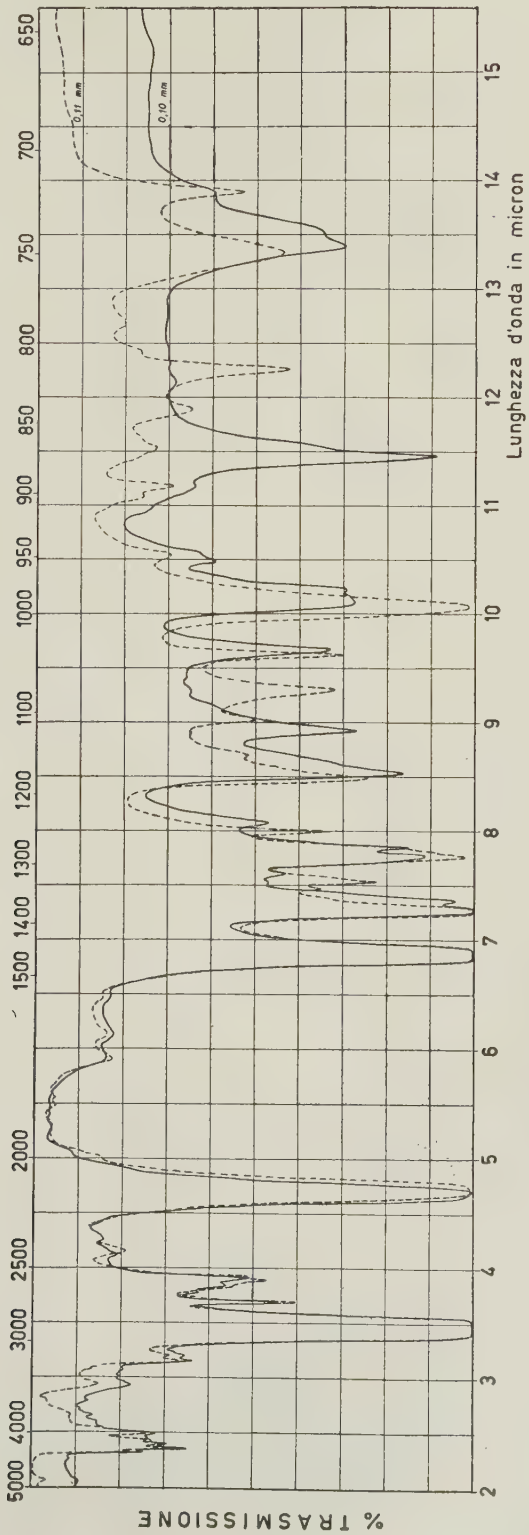


Fig. 1. – Spettri infrarossi degli estratti ottanici del poli (cis–propene I d_1) linea continua, e del poli (trans–propene I d_1) linea tratteggiata.

Per distinguere le strutture dei due tipi indicati in figura, si propone di estendere, nel campo dei polimeri, l'uso dei prefissi « eritro » e « treo », già applicati nel campo della chimica delle sostanze a basso peso molecolare, quando sono presenti contemporaneamente due centri diversi di isomeria ottica.

Nel caso dei polimeri eritro–diisotattici, i sostituenti CH_3 e D si trovano, rispettivamente da una parte e da quella oppsta del piano in cui è stesa a zig–zag la catena principale, mentre, nel caso dei polimeri treo–diisotattici, i due sostituenti si trovano dalla stessa parte del piano.

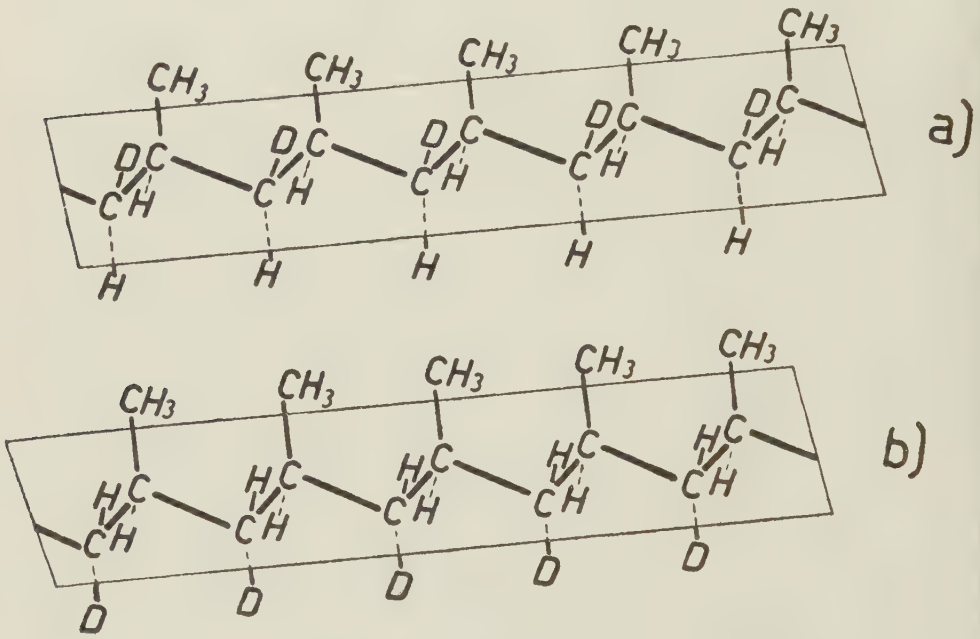


Fig. 2. – Rappresentazione di una catena del polipropene I d_1.

a) forma treo–di–isotattica;
b) forma eritro–di–isotattica.

I due tipi di isomeri sono rappresentati in proiezione di Fischer nella fig. 3, e nella forma che assumono nel cristallo nella fig. 4.

È interessante notare che lo spettro I. R. delle frazioni amorfe solubili in etere dei due polimeri, ottenuti rispettivamente dai monomeri cis e da quelli trans, sono differenti tra loro. Ciascuno di essi presenta attenuate le bande del polimero di–isotattico corrispondente, esaminato allo stato fuso. Entrambi d'altra parte presentano alcune bande assai simili fra loro, assenti in ambedue le frazioni di–isotattiche ed attribuibili ai particolari elementi di struttura dipendenti dalle inversioni, causanti la struttura atattica, che si può prevedere portino ad eguali effetti qualunque sia il monomero adoperato. L'intensità di queste bande fa ritenere che le inversioni siano molto frequenti. Queste bande si trovano invece molto attenuate negli spettri degli estratti eptanici, notoriamente costituiti da polimeri a stereoblocchi di lun-

ghezza sufficiente ad impartire una certa cristallinità rilevabile anche nello spettro infrarosso.

I risultati ottenuti possono essere attribuiti ad una costanza, o per lo meno prevalenza del modo di apertura del doppio legame, che si mantiene anche nelle frazioni atattiche.

La conoscenza della struttura del polimero di–isotattico, relativa ad un dato monomero, permette di stabilire in modo sicuro il tipo di apertura, ammessa una presentazione costante del monomero sul centro attivo del catalizzatore: infatti dal monomero trans, per apertura trans, si ottiene il polimero eritro–di–isotattico e, per apertura cis, il suo diastereoisomero treo–; mentre dal monomero cis si ottengono rispettivamente il treo– e l'eritro–.

Uno studio più accurato, attualmente in corso, degli spettri I. R. e meglio l'esame degli spettri di diffrazione di neutroni, potranno permettere di decidere il tipo di apertura.

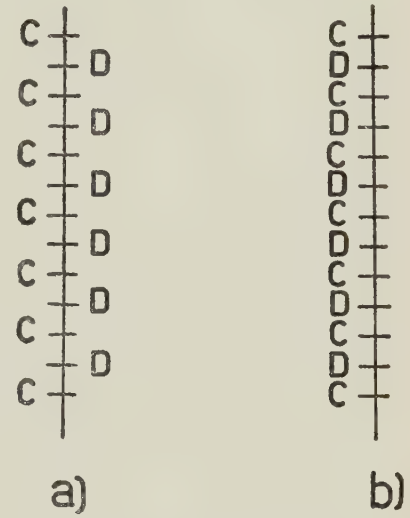


Fig. 3. Rappresentazione secondo Fischer di una catena di polipropene 1 d_1

a) forma treo–di–isotattica;
b) forma eritro–di–isotattica.

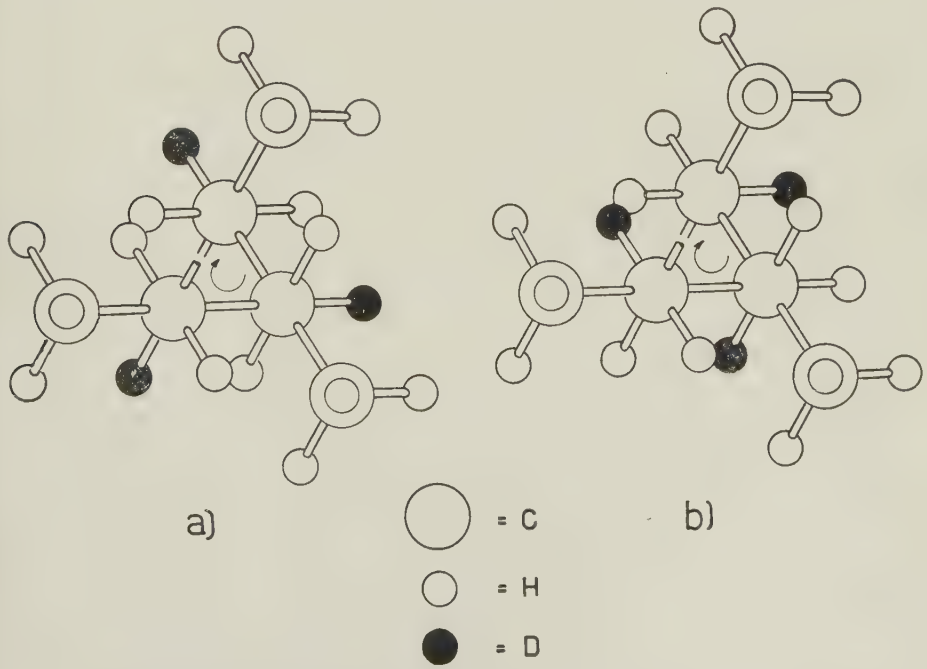


Fig. 4. – Proiezione su un piano normale all'asse della catena di una spirale levogira di polipropene 1 d_1.

a) forma treo–di–isotattica;
b) forma eritro–di–isotattica.
Gli atomi di carbonio dei gruppi CHD risultano coperti dagli atomi di carbonio terziari dei gruppi $CH–CH_3$.

L'estensione di tali concetti ai monomeri ed ai processi di polimerizzazione che forniscono polimeri sindiotattici, lascia prevedere che i polimeri sindiotattici risulteranno identici, sia se ottenuti da un monomero di tipo cis che di tipo trans. Si avranno in questo caso polimeri sindiotattici rispetto ad entrambi gli atomi di carbonio asimmetrici, che si potranno chiamare « di–sindiotattici ».

Si deve prevedere che i fenomeni di stereoisomeria, riscontrati nei polimeri deuterati qui descritti, si possano estendere ad altri polimeri di monomeri del tipo generale: CHR=CHR′ e che, per polimerizzazione stereospecifica di monomeri di tipo cis o trans, possano essere ottenuti polimeri a struttura regolare che differiscono tra di loro per la configurazione sterica. Tale diversità non sarebbe limitata al caso dei polimeri eritro–diisotattici e treo–diisotattici, che possono differire anche nella struttura cristallina, ma può estendersi pure ai polimeri amorfi, che generalmente accompagnano i polimeri cristallini, ottenuti con i normali sistemi di catalisi stereospecifica.

Elettrochimica. — *Progressi nei metodi e dispositivi per la misura delle sovratensioni di elettrodo.* Nota di ROBERTO PIONTELLI, GIOVANNI SERRAVALLE (*) e GIUDO POLI, presentata (**) dal Corrisp. R. PIONTELLI.

La cinetica dei processi elettrodici è attualmente il campo di maggior interesse in elettrochimica, ai fini sia teorici, sia delle basi scientifiche della corrosione, della galvanotecnica, dell'elettrometallurgia.

Le rilevantissime difficoltà sperimentali sono ben note e giustificano la discordanza di risultati tra i vari Autori e l'attuale mancanza di dati veramente attendibili, anche sui più essenziali aspetti fenomenologici.

In una serie di precedenti pubblicazioni (1), è stata data notizia dei dispositivi, messi a punto in questo laboratorio, ed atti a ridurre al minimo gli errori sistematici, dipendenti dalle caratteristiche delle celle di misura e dei dispositivi tensiometrici.

Un secondo notevole progresso è derivato dall'uso di superfici elettrodiche aventi proprietà strutturali ben controllate (superfici orientate, ad alto grado di finitura, di monocristalli metallici) (2).

Poiché le tecniche elettroniche soddisfano, ormai da tempo, le esigenze, anche più raffinate, per quanto concerne l'alimentazione elettrica delle celle e la registrazione delle risposte di tensione degli apparati tensiometrici; restava essenzialmente il problema delle contaminazioni della superficie elettrodica, sia prima dell'introduzione in cella, sia a causa di tracce di impurezze contenute nelle soluzioni di misura. Sulla importanza e gravità spesso assunte da questo problema (il quale si riteneva praticamente risolto con le precauzioni usuali per le misure di precisione), abbiamo riferito in una recente Nota (3), nella quale abbiamo indicato i criteri, che possono conferire adeguata efficacia ai procedimenti di preelettrolisi (4).

(*) G. Serravalle ha fruito di una Borsa concessa dalla A. Tonolli e C. di Milano.

(**) Nella seduta de 13 dicembre 1958.

(1) R. PIONTELLI, « Gazz. Chim. ital. », *83*, 357, 370 (1953); « Z. Elektrochem. », *59*, 778 (1955); « Rend. Ist. Lomb. Sci. e Lett. », *88*, 51 (1955); R. PIONTELLI, G. BIANCHI e R. ALETTI, « Z. Elektrochem. », *56*, 86 (1952); R. PIONTELLI, G. BIANCHI, U. BERTOCCI e B. RIVOLTA, « Ricerca Scientifica », *26*, 838 (1956); R. ALETTI, U. BERTOCCI, G. BIANCHI, C. GUERCI, R. PIONTELLI, G. POLI e G. SERRAVALLE, « C. R. », 2e Réunion CITCE, Milano, Manfredi (1951), p. 30; R. PIONTELLI, G. BIANCHI, U. BERTOCCI, C. GUERCI e B. RIVOLTA, « Z. Elektrochem. », *58*, 54 (1954); R. PIONTELLI, U. BERTOCCI, G. BIANCHI, C. GUERCI e G. POLI, « Z. Elektrochem. », *58*, 86 (1954).

(2) R. PIONTELLI, U. BERTOCCI, L. BICELLI, G. POLI, B. RIVOLTA, G. STERNHEIM e C. TAMPLENIZZA, « Rend. Ist. Lomb. Sci. e Lett. », *91*, 347 (1957).

(3) R. PIONTELLI e G. POLI, « Rend. Ist. Lomb. Sci. e Lett. » (in corso di stampa).

(4) Da tempo in uso (ved. alla nota precedente per riferimenti bibliografici), seguendo criteri almeno poco espliciti, in quanto, in genere, descritti indicando solo la densità di cor-

La depurazione (galvanica) da noi consigliata, è pure effettuata mediante preelettrolisi ma utilizzando anodi (purissimi [5]), solubili, dello stesso metallo in istudio, e realizzata in modo da favorire l'incorporazione, nel deposito catodico del metallo stesso [6] delle impurezze adsorbite alla superficie elettrodica, dove il loro apporto è assicurato da un'efficace convezione, prodotta da flusso di gas.

Con questo, è anche risultato possibile eliminare gran parte delle operazioni preliminari [7], le quali, pur implicando notevolissime complicazioni di apparecchiatura, si son rivelate un tenue palliativo ai fini di una depurazione adeguata.

Diamo ora notizia dei dispositivi, da noi studiati e messi a punto, i quali, pur conservando le caratteristiche di assenza di errori sistematici dei nostri precedenti apparati, consentono misure di precisione, in condizioni d altissimo grado di purezza anche delle soluzioni.

Conservando le caratteristiche di uniformità di distribuzione della corrente alla superficie elettrodica; e l'uso di sonde del tipo « a canale laterale »; si sono introdotte una, od eventualmente due, celle di preelettrolisi, solidali a quella di misura, e in una delle quali si effettua in ogni caso la depurazione della soluzione di misura; mentre, nell'altra, si effettua la depurazione della soluzione eventualmente utilizzata per il pretrattamento della superficie elettrodica.

Si utilizzano ancora gas purissimi (idrogeno, argon, azoto), a scopo di disaerazione dei recipienti, e, quando sia previsto l'impiego di « anodi a idrogeno », per la saturazione degli anodi stessi.

Per ridurre al minimo sia il volume di soluzione, sia l'area delle pareti del recipiente, che vengono a contatto con la soluzione, e per conseguire

rente e la durata della preelettrolisi, ma non la superficie degli elettrodi utilizzati in rapporto al volume della soluzione da sottoporre a depurazione, fattore, altrettanto essenziale, per la buona riuscita del trattamento.

(5) Ottenuti per fusione, o per elettrodeposizione solo da soluzioni preventivamente soggette a depurazione galvanica spinta. Le condizioni (carica da far circolare, densità di corrente e superficie elettrodica minima, in rapporto al volume di soluzione da depurare; pH, temperatura ecc.) devono essere messe a punto, caso per caso, in relazione alla natura del metallo e della soluzione in istudio.

(6) La procedura indicata si riferisce ai casi, da noi particolarmente studiati, in cui le determinazioni di sovratensione riguardano processi di scambio di ioni del metallo elettrodico. In altri casi, come quello delle misure di sovratensione di idrogeno da soluzioni acide, abbiamo studiato, in particolare, un procedimento analogo, basato sull'aggiunta, alla soluzione dell'acido da depurare (di concentrazione ridotta rispetto a quella da usare nella misura) del sale dell'acido stesso e del metallo, sul quale si vuol determinare la sovratensione di idrogeno.

In questo caso, la preelettrolisi si effettua: dapprima, con anodo solubile del metallo in questione, e, successivamente, con anodo a idrogeno, fino a praticamente totale separazione dei cationi metallici. Nei casi in cui, il metallo elettrodico non si presti a consentire tale risultato, la depurazione galvanica si può anche iniziare con anodo solubile di un metallo idoneo, tipo Ag., e con una soluzione di un suo sale, e prolungare (con anodo a idrogeno) fino a eliminazione totale di Ag dalla soluzione.

(7) Uso di acqua ripetutamente distillata, di sali purissimi più volte ricristallizzati ecc.

un'agitazione regolabile a piacere, fino alle massime intensità; nei nuovi apparati, anziché l'agitazione ad ascensore delle celle precedenti, si utilizza ora un agitatore magnetico (del tipo da noi recentemente studiato [8]).

La fig. 1 schematizza l'apparato nella sua più completa forma di realizzazione (lo scomparto Z' potendo essere eliminato in molti casi, come appresso indicato).

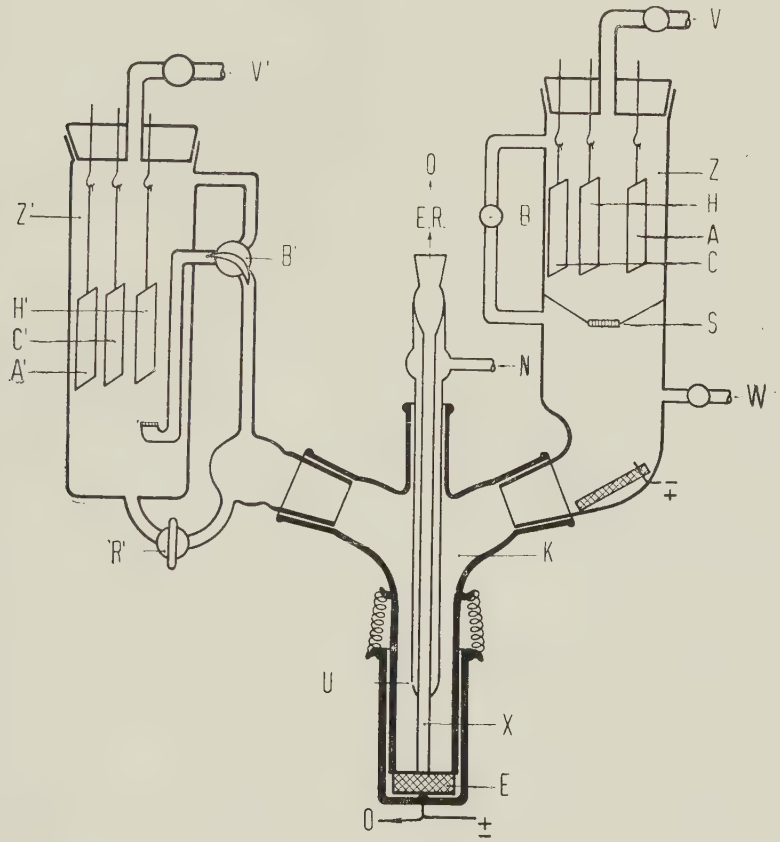


Fig. 1.

Le modalità di impiego sono le seguenti: le operazioni di preelettrolisi si effettuano negli scomparti Z e Z' (muniti di uscite di gas, a valvola liquida: V e V' e di rubinetti B e B' per le diverse operazioni di circolazione di liquido e gas).

Nei casi in cui la superficie dell'elettrodo non richiede nessun trattamento preliminare, si effettua la sola preelettrolisi in Z, con anodo solubile A, e con catodo C entrambi del metallo in istudio, e con anodo ausiliario H di platino platinato, saturato di idrogeno, per regolare il pH al valore finale voluto. L'idrogeno fluisce da N e U, disaerando la cella K, e passa

(8) E descritto in altra sede.

in Z attraverso al setto poroso S. La soluzione depurata si fa scendere da Z in K.

Quando si debba assoggettare la superficie elettrodica ad un pretrattamento (in genere catodico, o di decapaggio), come prima operazione viene purificata, nello scomparso Z' [9], la soluzione da usarsi nel pretrattamento, la quale si introduce poi in K attraverso il rubinetto R.

Il pretrattamento catodico si può effettuare utilizzando l'anodo solubile A' o quello H' ad idrogeno.

Dopo il trattamento, la soluzione è scacciata (attraverso U e N), mediante idrogeno (introdotto da W), e viene sostituita da soluzione depurata in Z, di composizione tale da dare, con la soluzione rimasta in K, approssimativamente la composizione voluta. Questa operazione si può, eventualmente, ripetere, dopo controllo della composizione su di un campione.

In fig. 1, X è la sonda a canale laterale, in comunicazione con l'elettrodo di riferimento (E. R.) non indicato.

Con apparato di registrazione O (ad esempio oscillografico), si registrano le risposte di tensione della catena formata dall'elettrodo di riferimento stesso con quello E in istudio, quando questo è sottoposto all'azione di correnti polarizzanti, fatte circolare tra E e l'elettrodo ausiliario.

Il dispositivo descritto si presta per determinazioni inerenti a soluzioni sia acquose, sia non acquose.

(9) Nel modo indicato alla nota [6], per le soluzioni usate in misure di sovratensione di idrogeno.

Biochimica. — *Ricerche sui pigmenti respiratori dei molluschi.* - II. *Equilibrio con l'ossigeno della mioglobina di* Aplysia [*]. Nota di Alessandro Rossi-Fanelli e Eraldo Antonini, presentata [**] dal Corrisp. A. Rossi-Fanelli.

In una precedente Nota [1] è stato descritto l'isolamento, la cristallizzazione ed alcune caratteristiche di un nuovo tipo di mioglobina (Mb) presente nei muscoli della radula di alcuni molluschi (*Aplysia Depilans* e *Limacina*). In questa Nota riferiamo i risultati di un accurato studio sull'equilibrio con l'ossigeno di questo pigmento.

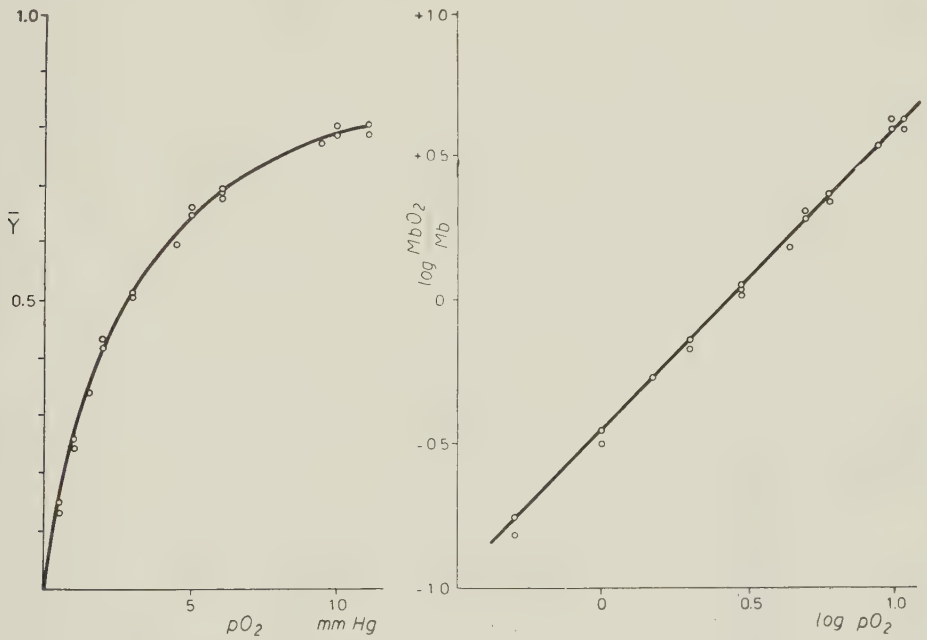


Fig. 1. – Equilibrio con l'O_2 della Mb di *Aplysia Limacina*.

pH 7,2; tampone di Tris 0,05 M; 20° C Mb 2×10^{-4} M; log p 1/2 = 0,43; log K = — 0,44; n = 1,03.

Per la determinazione delle curve di dissociazione sono state usate preparazioni pure di Mb di *Aplysia Depilans* e *Limacina* cristallizzate col procedimento esposto nella Nota I. La riduzione del pigmento e le determinazioni delle curve di dissociazione con l'O_2 sono state eseguite con i metodi descritti in un precedente lavoro [2].

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Biologica della Università di Roma e nella Stazione Zoologica di Napoli.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1958.

(1) A. Rossi-Fanelli e E. Antonini, « Rend. Acc. Naz. Lincei » XXII, 133 (1957).

(2) A. Rossi-Fanelli e E. Antonini, « Arch. Biochem. Bioph. », 77, 478 (1958).

La fig. 1 mostra la curva di equilibrio con l'O_2 della Mb di *Aplysia Limacina* a pH 7,2 in Tris 0,05 M a 20° C. Come si può osservare, la curva è rappresentata da un iperbole equilatera e l'equilibrio con l'O_2 di questo pigmento può essere rappresentato dall'equazione di Hill [3]:

$$\frac{(MbO_2)}{(Mb)} = K\,(p\,O_2)^n$$

per $n = 1$.

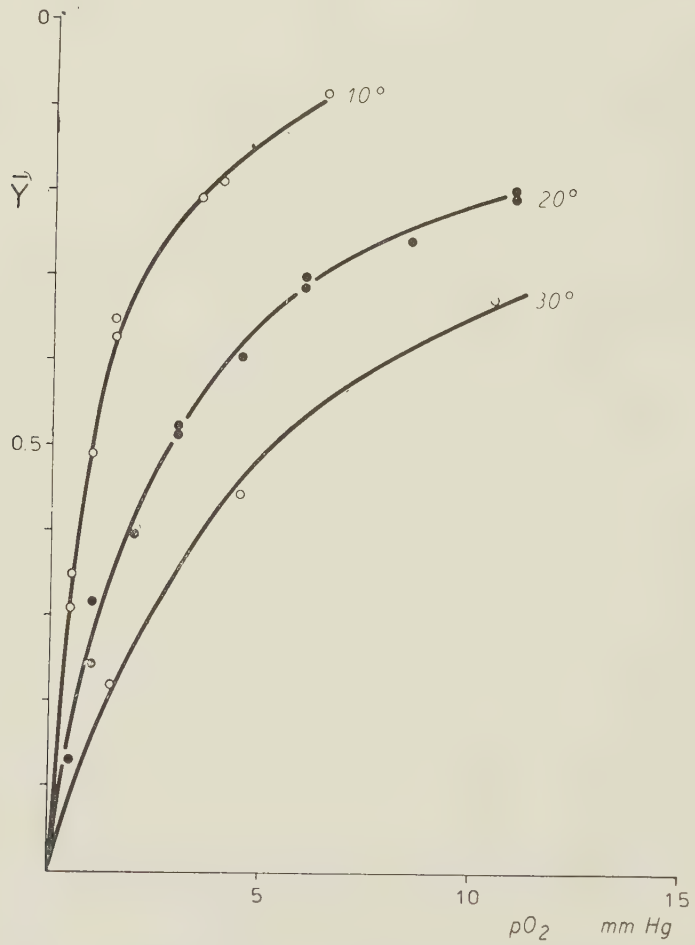


Fig. 2. – Equilibrio con l'O_2 della Mb di *Aplysia Depilans*.
pH 7,4; tampone di Tris 0,05 M; Mb 2×10^{-4} M.

Il valore di n calcolato per circa 30 curve di dissociazione in differenti condizioni di pH e temperatura è stato trovato per la Mb di *Aplysia Depilans* e *Limacina* fra 0,98 ed 1,07 con un valore medio di 1,01. La forma della curva di dissociazione ben si accorda con il fatto che la Mb di *Aplysia* contiene un eme per molecola.

(3) J. Wyman, «Advances in Protein Chem.», *4*, 410 (1948).

La pressione di ossigeno corrispondente al 50 % di saturazione (p 1/2) a 20° C (identica per la Mb di *Aplysia Depilans* e *Limacina*) è di 2,7 mm Hg, (figg. 1 e 2): questo dimostra che la Mb di *Aplysia* possiede una notevole affinità per l'O_2 notevolmente inferiore però a quella delle Mb dei vertebrati superiori (p 1/2 per la Mb umana a 20° C, pH 7,4 = 0,7 mm Hg [2]).

L'influenza della concentrazione idrogenionica sull'equilibrio con l'O_2 della Mb di *Aplysia* è stata studiata fra pH 6,2 e 8,9. I dati riportati nella fig. 3 dimostrano che in questa emoproteina l'effetto Bohr è praticamente assente.

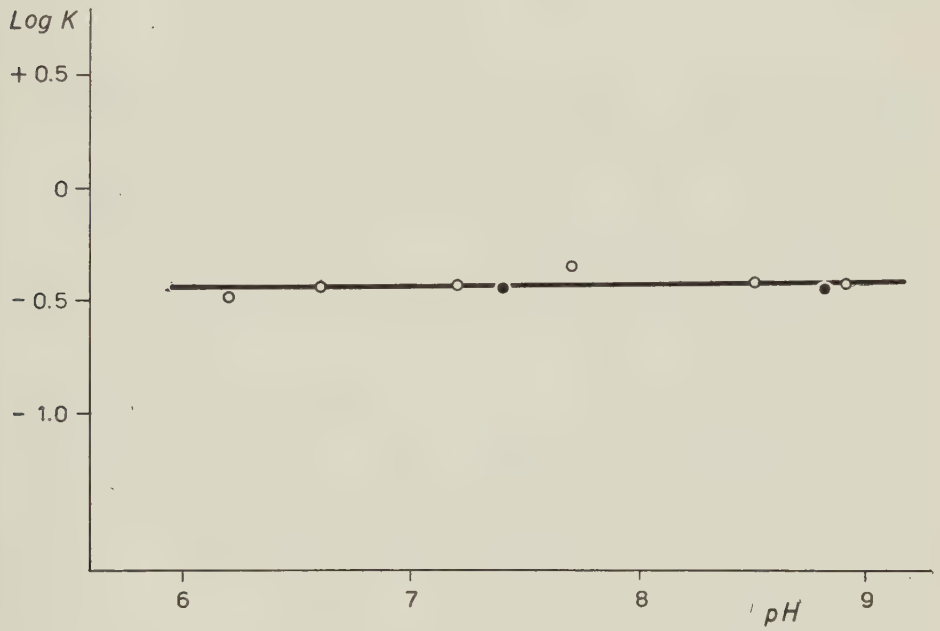


Fig. 3. – Effetto Bohr nell'equilibrio con l'O_2 della Mb. di *Aplysia Depilans* (●) e *Limacina* (○).
Forza ionica 0,05; 20° C; Mb 2×10^{-4} M.

La fig. 4 mostra l'influenza della temperatura sull'equilibrio con l'O_2 della Mb di *Aplysia*. I dati dimostrano che vi è una relazione lineare tra log K e 1/T. È così possibile calcolare indirettamente, mediante l'equazione di van't Hoff, il calore totale, ΔH, per la reazione $Mb + O_{2\,(gas)} = MbO_2$:

$$\Delta H = - \frac{R d \ln K}{d(1/T)} .$$

Il valore di ΔH, tra 10 e 30° C, è risultato essere — 13,6 kcal/mole. È da notare che questo valore è simile a quello ottenuto per le altre Mb finora studiate [2,3].

I dati riportati nella presente Nota dimostrano che il pigmento ematinico isolato dai muscoli di *Aplysia* presenta le proprietà funzionali caratteristiche della mioglobina.

Infatti la Mb di *Aplysia* è identica alle Mb dei mammiferi per la forma iperbolica della curva di dissociazione, per l'assenza dell'effetto Bohr e per il calore di ossigenazione. Differente risulta invece l'affinità per l'ossigeno: se

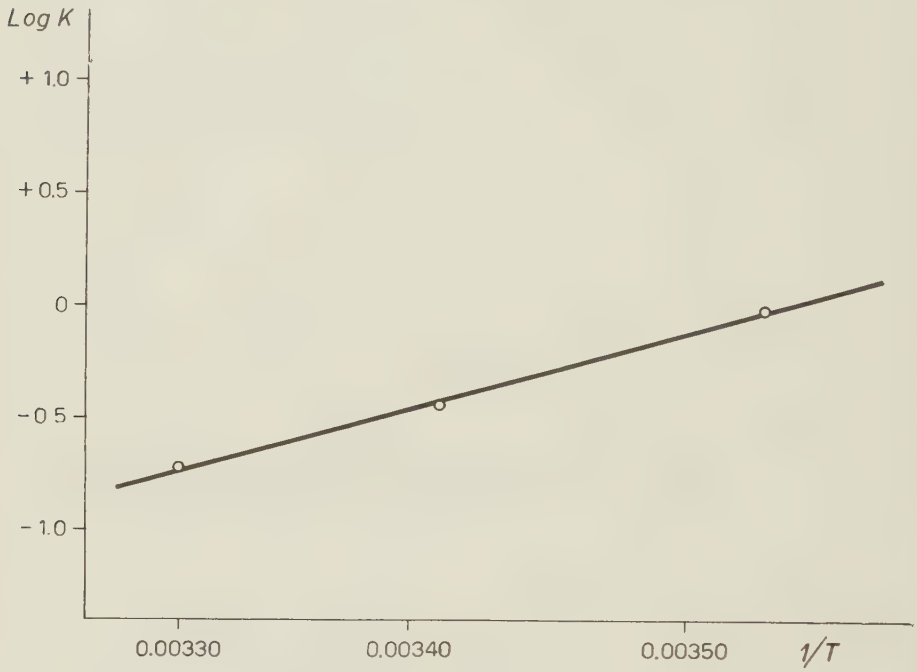


Fig. 4. – Effetto della temperatura dell'equilibrio con l'ossigeno della Mb di *Aplysia Depilans*. Stesse condizioni della fig. 2.

T = temperatura assoluta.

paragoniamo i valori di $p\ 1/2$ in funzione della temperatura per la Mb di *Aplysia* e per la Mb umana osserviamo che mentre ad una stessa temperatura i due pigmenti hanno un'affinità per l'O_2 differente, alla temperatura del corpo, cioè a 37–38° C per l'uomo e a 15–20° C per l'*Aplysia*, l'affinità per l'O_2 è pressoché la stessa ($p\ 1/2 \simeq 2{,}7$ mm Hg) per i due pigmenti.

Biochimica. — *Ricerche sui pigmenti respiratori dei molluschi.* - III. *Proprietà chimico-fisiche della mioglobina di* Aplysia (*). Nota di Alessandro Rossi-Fanelli, Eraldo Antonini e Angela Rosa De Stefano, presentata (**) dal Corrisp. A. Rossi-Fanelli.

In precedenti ricerche [1, 2, 3] abbiamo descritto l'isolamento ed alcune proprietà strutturali e funzionali di una emoproteina presente nei muscoli dell'*Aplysia* (*Depilans* e *Limacina*).

Le nostre ricerche hanno dimostrato che questo pigmento è una vera mioglobina (Mb): contiene infatti protoferroeme come gruppo prostetico, ha un peso molecolare di circa 20.000 con un eme per molecola, si combina reversibilmente con l'ossigeno e presenta una curva di dissociazione con l'O_2 iperbolica con assenza di effetto Bohr.

In questa Nota riferiamo su alcune proprietà chimico-fisiche di questo pigmento.

Affinità relativa per O_2 e CO. – Per la reazione reversibile $MbO_2 + CO = MbCO + O_2$, la costante di equilibrio $K = [MbCO] \times [O_2]/[MbO_2] \times [CO]$ è stata determinata con la tecnica precedentemente decritta [4].

Le determinazioni sono state eseguite sul pigmento ridotto enzimaticamente [4] (da Fe^{+++} a Fe^{++}) a 20° C e pH 7,4 in tampone di Tris 0,05 M.

I risultati ottenuti sono riportati nella Tabella I.

Tabella I.

Affinità relativa per l'ossigeno ed ossido di carbonio della Mb *di* Aplysia (Depilans) $K = [MbCO] \times [O_2]/[MbO_2] \times [CO]$.

$\frac{[MbCO]}{[MbO_2]}$	$\frac{[O_2]}{[CO]}$	K
12	9	110
4,2	25	105
2,6	40	104

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Biologica dell'Università di Roma e nella Stazione Zoologica di Napoli.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1958.

Il valore medio di K è risultato essere 106: è interessante notare che tale valore si discosta notevolmente da quelli ottenuti per la Mb dei vertebrati superiori (K da 20 a 50).

« Span ». – Lo « span », che come è noto rappresenta la distanza in Angstrom fra i massimi di assorbimento delle bande α del composto con l'O_2 e

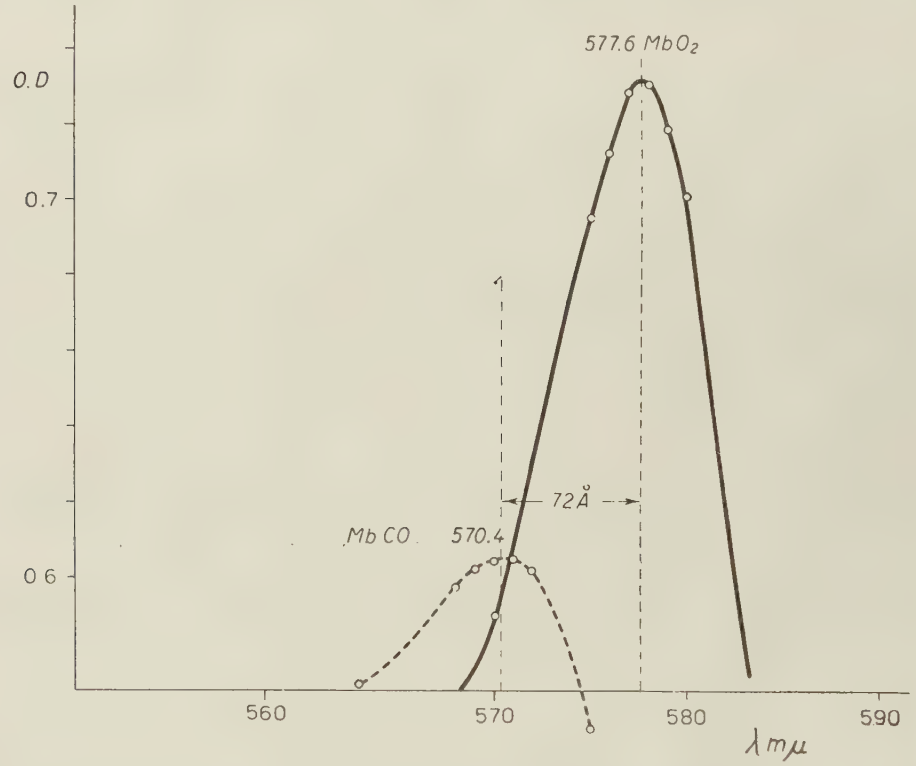


Fig. 1. – Curve di assorbimento della luce del composto con l'O_2 ed il CO della Mb di *Aplysia* (*Depilans*).

La curva mostra la distanza in Angstrom tra le bande α dei due composti.

con il CO, è risultato essere per la Mb di *Aplysia* di 72 Å, come è mostrato nella figura 1. Il valore trovato è relativamente alto se paragonato a quello delle Mb (31–36 Å) e delle emoglobine (Hb) (43–56 Å) dei vertebrati [5].

Relazione tra « span » e costante di ripartizione tra CO e O_2. – Auson ed altri [6] esaminando le Hb di numerose specie di vertebrati avevano dimostrato che nelle Hb di specie diversa esiste una certa relazione tra lo « span » e la costante di ripartizione tra CO e O_2. Il rapporto log K/span rimaneva praticamente costante con un valore oscillante tra 0,045 e 0,050. Tale regola era stata anche confermata per le Mb di mammiferi, da Theorell per la Mb di cavallo [7], e da noi stessi per la Mb umana [4] e per le Mb adulta e fetale di vacca [8].

Poiché la variazione del log di K indica la variazione di energia libera del sistema, dalla relazione lineare tra i valori di log di K e dello « span », Auson ed altri avevano supposto che lo « span » fosse legato ad una variazione ben definita e prevedibile dell'energia libera. Per quanto riguarda le Hb una deviazione dalla regola su menzionata era stata trovata da Keilin [5] per la emoglobina della *Gastrophilus* e per la Hb delle radici delle leguminose. I risultati delle nostre ricerche smentiscono ora tale regola anche per Mb. Per la Mb di *Aplysia* infatti è stato trovato un valore di $Y = \log K/\text{span} = 0{,}028$.

Viene così definitivamente esclusa la possibilità di attribuire al rapporto log K/span un carattere e significato generale.

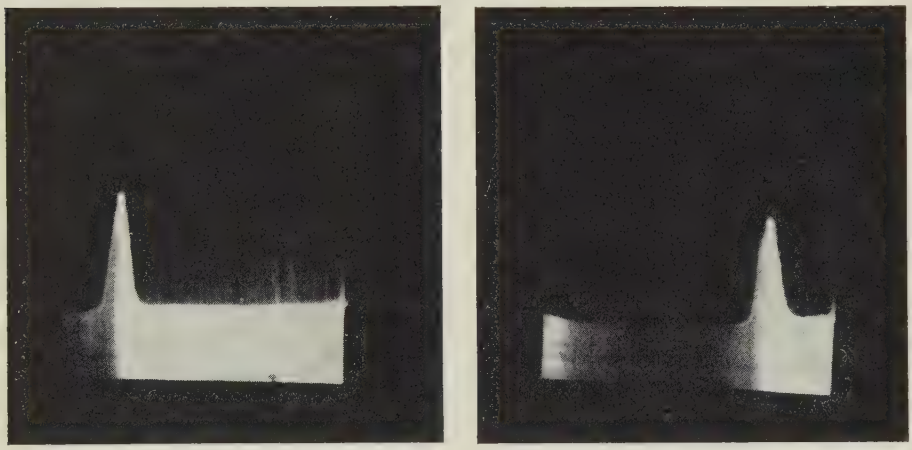


Fig. 2. – Diagrammi elettroforetici della Mb di *Aplysia* (*Depilans*).

A destra: branca ascendente; a sinistra: branca discendente.
Tampone di Miller e Golder, pH $\Gamma/2 = 0{,}1$; 12 mA; 6.900 sec.

Proprietà elettrochimiche. – Le proprietà elettrochimiche della Mb di *Aplysia* sono state studiate con l'apparecchio di Tiselius (Perkin Elmer) tra pH 4 e 6 in tamponi a forza ionica 0,1 (Miller e Golder) [9]: in queste condizioni il pigmento è stabile, come si può giudicare anche spettrofotometricamente.

Ai vari pH, in accordo con i risultati precedenti, il pigmento appare perfettamente omogeneo: si osserva infatti la presenza di un solo componente omogeneo e simmetrico (fig. 2).

Nella Tabella II sono riportati i valori di mobilità ottenuti ai diversi pH: il punto isoelettrico determinato dalla curva della mobilità verso il pH è risultato essere 4,75.

La Mb di *Aplysia* ha dunque il carattere di una proteina nettamente acida in accordo con i risultati ottenuti sulla composizione in aminoacidi che hanno mostrato una prevalenza di aminoacidi dicarbossilici su quelli basici [3].

È noto che le Mb e le Hb dei vertebrati superiori sono proteine neutre, con punto isoelettrico intorno a pH 7, mentre alcune Hb degli invertebrati, le così dette eritrocruorine, hanno punti isoelettrici piuttosto bassi per cui, da questo punto di vista, la Mb di *Aplysia* mostra analogia con questi ultimi pigmenti.

TABELLA II.

Mobilità elettroforetica della Mb *di* Aplysia (Depilans *e* Limacina) *in tamponi di Miller e Golder di forza ionica* 0,1.

*p*H	$u \times 10^5$
4,0	+ 2,20
4,5	+ 0,54
5,0	— 0,53
5,1	— 1,00
5,5	— 1,5
6,1	— 3,4

I risultati della presente ricerca mostrano dunque che la Mb di *Aplysia*, pur possedendo alcune tipiche proprietà strutturali e funzionali caratteristiche delle Mb dei vertebrati, mostra differenze notevoli nell'affinità relativa per l'O_2 ed il CO, span e punto isoelettrico, avvicinandosi di più per questi ultimi caratteri alle eritrocruorine. Il pigmento da noi studiato rappresenta dunque un tipo nuovo di mioglobina presente in muscoli di animali che non posseggono ancora né emoglobina né emocianina nel liquido circolante e deve perciò considerarsi come il primo ed il più semplice pigmento ematinico che compare nella scala zoologica con capacità di legare reversibilmente l'ossigeno. Questi risultati rivestono un particolare interesse per l'interpretazione dell'evoluzione funzionale delle emoproteine: essi infatti indicherebbero che la comparsa della Mb, forse per le particolari esigenze del muscolo, precederebbe nella evoluzione la comparsa della Hb come proteina respiratoria.

BIBLIOGRAFIA.

[1] A. ROSSI–FANELLI e E. ANTONINI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », XXII, 133 (1957).
[2] A. ROSSI–FANELLI e E. ANTONINI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (vedi Nota precedente).
[3] A. ROSSI–FANELLI e E. ANTONINI, *Symposium on Protein Structure* (*Parigi 1957*). Ed. A. Neuberger–Mathuen & Co. Ltd. Londra 1958, p. 144.
[4] A. ROSSI–FANELLI e E. ANTONINI, « Arch. Bioch. Bioph. », 77, 478 (1958).
[5] D. KEILIN, Y. L. WANG, « Biochem. J. », *40*, 855 (1946).
[6] M. L. AUSON, J. BARCROFT, A. E. MIRSKY, S. OINUMA, « Proc. Roy. Soc. », *97*, 61 (1924),
[7] H. THEORELL, « Biochem. Z. », *268*, 73 (1934).
[8] A. ROSSI–FANELLI e E. ANTONINI (esperimento non pubblicato).
[9] G. L. MILLER, R. H. GALDER, « Arch. Biochem. Bioph. », *29*, 420 (1950).

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Sur un dual du théorème de Hahn–Banach et sur un théorème de Banach.* Nota di IVAN SINGER, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

1. Dans la Note [3] nous avons démontré le théorème suivant, dual, dans une certaine mesure, du théorème de Hahn–Banach:

Soient E *un espace vectoriel normé réel,* $\mathfrak{M}$ *un sous–espace vectoriel régulièrement fermé de l'espace adjoint* E^* *et* $x \in E$. *Alors, pour tout nombre* $\varepsilon > 0$ *il existe un élément* $x_\varepsilon \in E$ *tel que*

$$f(x_\varepsilon) = f(x_0) \quad \textit{pour tout} \quad f \in \mathfrak{M},$$

$$\| x_\varepsilon \| \leq \| x_0 \|_{\mathfrak{M}} + \varepsilon,$$

où l'on a désigné par $\| x_0 \|_{\mathfrak{M}}$ *le nombre* $\sup_{f \in \mathfrak{M}} \frac{|f(x_0)|}{\|f\|}$.

En considérant, comme dans la Note [3], l'ensemble

$$G = \{x \in E \,|\, f(x) = f(x_0) \quad \text{pour tout} \quad f \in \mathfrak{M}\},$$

on vérifie facilement que le théorème ci–dessus est équivalent à l'inégalité

$$\inf_{x \in G} \| x \| \leq \| x_0 \|_{\mathfrak{M}}. \tag{1}$$

Or, on a aussi le suivant renforcement du théorème ci–dessus:

TÉORÈME 1. – *Dans les hypothèses ci–dessus, on a*

$$\inf_{x \in G} \| x \| = \| x_0 \|_{\mathfrak{M}}. \tag{2}$$

En effet, cela résulte ou bien de (1) et des relations

$$|f(x_0)| = |f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| \quad \text{pour tout} \quad x \in G \,, f \in \mathfrak{M},$$

ou bien de l'égalité suivante, démontrée dans la note [3]:

$$\| x_0 \|_{\mathfrak{M}} = \operatorname{dist}(O, G).$$

Remarque. – On peut donner une demonstration nouvelle, très simple, du théorème 1, en utilisant un théorème d'isomorphie de J. Dieudonné ([2], théorème 17 *b*). Soient, un effet,

$$\mathfrak{M}^\perp = \{x \in E \,|\, f(x) = 0 \quad \text{pour tout} \quad f \in \mathfrak{M}\}, \tag{3}$$

$$(\mathfrak{M}^\perp)^\perp = \{f \in E^* \,|\, f(x) = 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathfrak{M}^\perp\}. \tag{4}$$

(*) Nella seduta dell'8 novembre 1958.

Comme $\mathfrak{M}$ est régulièrement fermé, on a $(\mathfrak{M}^{\perp})^{\perp} = \mathfrak{M}$, donc, en vertu du théorème mentionné de J. Dieudonné, l'espace adjoint $(E/\mathfrak{M}^{\perp})^*$ de l'espace quotient $E/\mathfrak{M}^{\perp}$ est isomorphe, avec sa norme [1], au sous-espace $\mathfrak{M}$ de E^*. À toute fonctionnelle linéaire continue $\varphi \in (E/\mathfrak{M}^{\perp})^*$ il correspond, dans cette équivalence, une fonctionnelle linéaire continue $f \in \mathfrak{M}$ telle que l'on ait $\varphi(\dot{x}) = f(x)$ pour toute classe $\dot{x} \in E/\mathfrak{M}^{\perp}$ et tout élément $x \in \dot{x}$. On aura donc, en désignant par $\dot{x}_0$ la classe de $E/\mathfrak{M}^{\perp}$ contenant l'élément x_0, et par $|||\ |||$ la norme dans $E/\mathfrak{M}^{\perp}$,

$$\| x_0 \|_{\mathfrak{M}} = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \frac{|f(x_0)|}{\|f\|} = \sup_{\varphi \in (E/\mathfrak{M}^{\perp})^*} \frac{|\varphi(\dot{x}_0)|}{\|\varphi\|} = ||| \dot{x}_0 ||| =$$

$$= \inf_{y \in \mathfrak{M}^{\perp}} \| x_0 - y \| = \inf_{x \in G} \| x \|,$$

ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE. – *Dans les hypothèses du théorème* 1, *pour qu'il existe un élément* $x \in E$ *tel que*

$$f(x) = f(x_0) \quad \textit{pour tout} \quad f \in \mathfrak{M}, \tag{5}$$

$$\| x \| = \| x_0 \|_{\mathfrak{M}}, \tag{6}$$

il faut et il suffit que parmi les solutions x *du système d'équations* (5) *il existe une solution de norme minimale.*

Comme première application du théorème 1, on a le suivant renforcement d'une généralisation, donnée dans [4] (v. [4], théorème 2), du deuxième théorème de E. Helly sur le problème des moments:

THÉORÈME 2. – *Soient* E *un espace vectoriel normé réel,* $\mathfrak{F}$ *un sous-ensemble de l'espace adjoint* E^*, *tel que le sous-espace vectoriel engendré par* $\mathfrak{F}$ *soit régulièrement fermé,* x_0 *un élément donné de l'espace* E, A *l'ensemble*

$$\{x \in E \mid f(x) = f(x_0) \quad \textit{pour tout} \quad f \in \mathfrak{F}\},$$

et M_0 *le plus petit des nombres* $M > 0$ *tels que*

$$\left| \sum_{k=1}^{r} \lambda_k f_k(x_0) \right| \leq M \left\| \sum_{k=1}^{r} \lambda_k f_k \right\|$$

pour toute collection finie de nombres $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ *et d'éléments* $f_1, \cdots, f_r$ *de* $\mathfrak{F}$. *Alors*

$$\inf_{x \in A} \| x \| = M_0.$$

Pour la démonstration on applique le théorème 1 au sous-espace vectoriel $\mathfrak{M}$ de E^*, engendré par l'ensemble $\mathfrak{F}$, en tenant compte de $\| x_0 \|_{\mathfrak{M}} = M_0$.

COROLLAIRE. – *Dans les hypothèses du théorème* 2, *pour qu'il existe un élément* $x \in E$ *tel que*

$$f(x) = f(x_0) \quad \textit{pour tout} \quad f \in \mathfrak{F}, \tag{7}$$

$$\| x \| = M_0, \tag{8}$$

(1) C'est-à-dire, équivalent (dans la terminologie de BANACH [1]).

il faut et il suffit que parmi les solutions x du système d'équations (7) *il existe une solution de norme minimale.*

2. S. Banach a démontré ([1], p. 122, théorème 1), le théorème suivant, dont nous avons donné une nouvelle démonstration dans la Note [4]:

Soient E *un espace vectoriel normé réel,* $\mathfrak{M}$ *un sous-espace vectoriel régulièrement fermé de l'espace adjoint* E* *et* f_0 *une fonctionnelle linéaire continue sur* E, *telle que* $f_0 \in \mathfrak{M}$. *Alors, pour tout nombre* $M > 0$ *tel que*

$$0 < M < \inf_{f \in \mathfrak{M}} \|f - f_0\| \tag{9}$$

il existe un élément $x_M \in E$ *tel que*

$$f(x_M) = 0 \quad \textit{pour tout} \quad f \in \mathfrak{M}\ ,\ f_0(x_M) = 1, \tag{10}$$

$$\|x_M\| \leq \frac{1}{M}. \tag{11}$$

Remarquons tout d'abord, qu'on peut donner une démonstration nouvelle, très simple, de ce théorème de Banach, en utilisant un théorème d'isomorphie de J. Dieudonné ([2], théorème 17 *a*). Soient, en effet, $\mathfrak{M}^\perp$ et $(\mathfrak{M}^\perp)^\perp$ définis de nouveau par (3) et (4). Comme $\mathfrak{M}$ est régulièrement fermé, on a $(\mathfrak{M}^\perp)^\perp = \mathfrak{M}$, donc, en vertu du théorème mentionné de J. Dieudonné, l'espace adjoint $(\mathfrak{M}^\perp)^*$ de $\mathfrak{M}^\perp$ est isomorphe, avec sa norme, à l'espace quotient $E^*/\mathfrak{M}$. Dans cette équivalence, à toute fonctionnelle linéaire continue $\varphi \in (\mathfrak{M}^\perp)^*$ il correspond la classe $\dot{f} \in E^*/\mathfrak{M}$ des fonctionnelles linéaires continues sur E qui prolongent φ. En désignant par $\dot{f}_0$ la classe de $E^*/\mathfrak{M}$ contenant f_0 et par $|||\ |||$ la norme dans $E^*/\mathfrak{M}$, l'hypothèse (9) signifie que $0 < M < |||\dot{f}_0|||$. Par conséquent, comme $|||\dot{f}_0||| = \sup_{\substack{y \in \mathfrak{M}^\perp \\ \|y\| \leq 1}} |f_0(y)|$, il existe un élément $y_M \in \mathfrak{M}^\perp$ tel que

$$f_0(y_M) \geq M\ ,\ \|y_M\| = 1.$$

L'élément $x_M = \frac{1}{f_0(y_M)}\, y_M$ possède alors toutes les propriétés voulues (10) et (11), ce qui achève la démonstration.

Remarque. – Les deux théorèmes d'isomorphie de J. Dieudonné ([2], théorèmes 17 *a* et 17 *b*) permettent de donner des démonstrations très rapides, aussi pour beaucoup d'autres théorèmes classiques de la théorie des espaces vectoriels normés, démontrés jusqu'à présent par des méthodes différentes.

Comme une application du théorème 1, on a le suivant renforcement du théorème ci-dessus de Banach:

THÉORÈME 3. – *Soient* E *un espace vectoriel normé réel,* $\mathfrak{M}$ *un sous-espace vectoriel régulièrement fermé de l'espace adjoint* E*, f_0 une fonctionnelle linéaire continue sur* E *et*

$$V = \{x \in E \mid f(x) = 0 \quad \textit{pour tout} \quad f \in \mathfrak{M}\ ,\ f_0(x) = 1\}.$$

Alors

$$\inf_{x \in V} \|x\| = \frac{1}{\inf\limits_{f \in \mathfrak{M}} \|f - f_0\|}. \tag{12}$$

Pour la démonstration on applique le théorème 1 au sous–espace vectoriel $\mathfrak{M}'$ de E^* engendré par $\mathfrak{M}$ et f_0, en tenant compte que $\mathfrak{M}'$ est régulièrement fermé [4] et que pour tout $x_0 \in V$ on a $\|x_0\|_{\mathfrak{M}'} = \frac{1}{\inf\limits_{f \in \mathfrak{M}} \|f - f_0\|}$ [4].

Remarque. – On peut aussi donner une démonstration directe du théorème 3, qui n'utilise pas le théorème 1. En effet, on vérifie facilement que le théorème de Banach équivaut à l'inégalité

$$\inf_{x \in V} \|x\| \leq \frac{1}{\inf\limits_{f \in \mathfrak{M}} \|f - f_0\|};$$

d'autre part, on a, pour tout $x \in V$ et $f \in \mathfrak{M}$,

$$1 = |(f - f_0)(x)| \leq \|f - f_0\| \cdot \|x\|,$$

d'où il résulte l'inégalité

$$\inf_{x \in V} \|x\| \geq \frac{1}{\inf\limits_{f \in \mathfrak{M}} \|f - f_0\|},$$

et, par conséquent, l'égalité (12).

COROLLAIRE. – *Dans les hypothèses du théorème 3, pour qu'il existe un élément* $x \in E$ *ayant les propriétés*

$$f(x) = 0 \quad \textit{pour tout} \quad f \in \mathfrak{M}, \; f_0(x) = 1, \tag{13}$$

$$\|x\| = \frac{1}{\inf\limits_{f \in \mathfrak{M}} \|f - f_0\|}, \tag{14}$$

il faut et il suffit que parmi les solutions x *du système d'équations* (13) *il existe une solution de norme minimale.*

BIBLIOGRAPHIE.

[1] S. BANACH, *Théorie des opérations linéaires*, Varsovie (1932).

[2] J. DIEUDONNÉ, *La dualité dans les espaces vectoriels topologiques*, «Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.», t. 59, pp. 107–139 (1942).

[3] I. SINGER, *Un dual du théorème de Hahn–Banach*, «C. R. Acad. Sci.», Paris, t. 247, n. 4, pp. 408–411 (1958).

[4] I. SINGER, *Quelques applications d'un dual du théorème de Hahn–Banach*, «C. R. Acad. Sci.», Paris, t. 247, n. 12, pp. 846–849 (1958).

Algebra. — *Sugli N-gruppi risolubili.* Nota di MARIO CURZIO, presentata (*) dal Socio R. CACCIOPPOLI.

Diremo N-*gruppo* ogni gruppo finito G di cui ciascun sottogruppo normale risulti unico nel suo ordine fra i sottogruppi di G. Sono ad esempio N-gruppi: i gruppi ciclici finiti, i gruppi di Hölder, i gruppi simmetrici di grado finito. Recentemente K. Honda [1] ha provato che ogni gruppo finito a sottogruppi di Sylow ciclici è un N-gruppo.

Nella presente Nota vien data una caratterizzazione degli N-gruppi risolubili, rilevando fra l'altro che i sottogruppi di Sylow di tali N-gruppi sono ciclici, abeliani elementari, isomorfi al gruppo dei quaternioni. Da quanto precede discende in modo quasi immediato che tutti e soli gli N-gruppi supersolubili sono quelli considerati da Honda in [1]. Infine si determinano gli N-gruppi risolubili a sottogruppo di Frattini identico e si consegue qualche proprietà del derivato di un N-gruppo.

1. In questo numero indagheremo sulla struttura degli N-gruppi risolubili. Cominciamo col premettere i seguenti:

LEMMA I. – *Sia* G *un* N-*gruppo risolubile. I suoi sottogruppi di Sylow sono ciclici, abeliani elementari, isomorfi al gruppo dei quaternioni; e, se* G *possiede un sottogruppo dei quaternioni, in una serie principale di* G *vi è un fattoriale d'ordine* 4.

G abbia ordine $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_t^{\alpha_t}$ (p_i num. primo, $p_i \neq p_j$). Se $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_t \leq 4$ si giunge facilmente all'asserto; allora, supposto $\alpha_1 + \cdots + \alpha_t > 4$, faremo induzione rispetto a $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_t$. Un sottogruppo P di G, normale minimo, è risolubile e privo di sottogruppi caratteristici propri; perciò P ha ordine $p_i^{\alpha'_i}$ ed è ciclico ($\alpha'_i = 1$) o abeliano elementare non ciclico (1) ($\alpha'_i > 1$). Distinguiamo ora i casi seguenti:

1° P *ha ordine dispari.*

Giacché G è un N-gruppo, P è unico nel suo ordine in ogni sottogruppo di Sylow $\overline{P}$ relativo a G e p_i, per note proprietà dei p-gruppi (2), $\overline{P}$ è ciclico se tale è P, $\overline{P}$ è abeliano elementare e coincide con P se P non è ciclico. Il fattoriale G/P è un N-gruppo risolubile al pari di G; onde, per l'ipotesi d'induzione, l'asserto vale per G/P. Tramite l'omomorfismo di G su G/P, un sottogruppo di Sylow P' relativo a G ed a $p_j \neq p_i$, si muta in un sottogruppo di Sylow P'' di G/P ed è isomorfo a P''. Ne segue, che i sottogruppi di Sylow di G sono ciclici, abeliani elementari, isomorfi al gruppo dei quaternioni.

Se G possiede un sottogruppo dei quaternioni, G/P gode della stessa proprietà; allora, per l'ipotesi d'induzione G/P ha un fattoriale principale

(*) Nella seduta del 13 dicembre 1958.

(1) Cfr. [2] p. 61.

(2) Cfr. [3] p. 118, Teor. 15.

d'ordine 4 e sia (A/P)/(B/P). Si riconosce subito che A/B (d'ordine 4) è un fattoriale relativo ad una serie principale di G.

2° P *ha ordine pari.*

Se P ha ordine > 2, P è abeliano elementare ed è sottogruppo di Sylow per G; indi, ragionando come in 1° si prova che ogni sottogruppo di Sylow di G è ciclico o abeliano elementare.

Se P ha ordine 2, un sottogruppo di Sylow $\overline{P}$ relativo a G e 2, è ciclico o gruppo (eventualmente generalizzato) dei quaternioni. Dopo di ciò, se $\overline{P}$ è ciclico si procede come in 1°. Se $\overline{P}$ è gruppo (generalizzato) dei quaternioni, si distinguano le eventualità *a*) e *b*), indicando con R il sottogruppo di G che copre P in una serie principale Σ per P.

a) R/P è un p–gruppo ordine dispari.

G contiene un sottogruppo normale [3] $\overline{R}$ isomorfo a R/P. Quindi in G vi è un sottogruppo normale minimo T ($T \subseteq \overline{R}$) d'ordine dispari e si conclude come in 1°.

b) R/P *ha ordine* potenza di 2.

Se R/P avesse ordine 2 e quindi R ordine 4, i sottogruppi $\overline{P}$ contenendo un sol sottogruppo d'ordine 4 (il sottogruppo R) non sarebbero (generalizzati) dei quaternioni.

Se R/P ha ordine 4 e quindi R/P ordine 8, i sottogruppi $\overline{P}$ contenendo un sol sottogruppo d'ordine 8 (il sottogruppo R) sono isomorfi al gruppo dei quaternioni e $\overline{P} \equiv R$. Tenendo presente l'ipotesi d'induzione e l'omomorfismo di G su G/R, i sottogruppi di Sylow di G d'ordine dispari sono ciclici o abeliani elementari. Inoltre, nella serie principale Σ il fattoriale R/P ha ordine 4.

Se R/P avesse ordine > 4 e quindi R/P ordine > 8, i sottogruppi $\overline{P}$ contenendo un sol sottogruppo R d'ordine > 8 ed essendo gruppi generalizzati dei quaternioni, coinciderebbero tutti con R. Ma in R esisterebbe [4] un sottogruppo normale F, normale in G, distinto da G e contenente propriamente P. Ciò è contro l'ipotesi che R copra P nella serie principale Σ.

LEMMA II. – *Sia* G *un* N*–gruppo risolubile e* P *un suo sottogruppo di Sylow abeliano elementare non ciclico. In una serie principale di* G *vi è un fattoriale isomorfo a* P.

Detto al solito $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_t^{\alpha_t}$ l'ordine di G, l'asserto è ovvio per $\alpha_1 + \cdots + \alpha_t \leq 3$.

Allora, si farà induzione rispetto a $\alpha_1 + \cdots + \alpha_t$.

Essendo R un sottogruppo normale minimo di G e $p_i^{\alpha_i}$ l'ordine di P, distinguiamo i casi seguenti.

1° R *ha ordine* $p^{\alpha'_i}$.

(3) Si ha $R = P\overline{R}$ con $\overline{R}$ p–gruppo d'ordine dispari. Poiché P ha ordine 2 ed è normale in R, i gruppi P ed $\overline{R}$ sono permutabili elemento per elemento. È perciò $R = P \times \overline{R}$ e $\overline{R}$ (isomorfo a R/P) è normale in G poiché caratteristico in R.

(4) R è generabile con due elementi [2] perciò il suo sottogruppo di Frattini F ha indice 4 in R. F contiene propriamente P (P è l'unico sottogruppo di ordine 2 di R), è normale in G giacché è caratteristico in R ed R risulta normale in G.

Non può essere $\alpha_i' = 1$, altrimenti P contenendo un sol sottogruppo d'ordine p_i (il sottogruppo R) non sarebbe abeliano elementare non ciclico.

Se $\alpha_i' > 1$, R è abeliano elementare non ciclico. Essendo G un N-gruppo e poiché $P \supseteq R$, è $P \equiv R$. Allora, P è l'ultimo fattoriale d'una serie principale di G.

2° R *ha ordine primo con* $p_i^{\alpha_i}$.

Tramite l'omomorfismo di G su G/R, P si muta in un sottogruppo P' di G/R; essendo $p_i^{\alpha_i}$ primo con l'ordine di R, P e P' sono isomorfi e P' è sottogruppo di Sylow di G/R. Perciò, per l'ipotesi d'induzione G/R ha una serie principale con un fattoriale (A/R)/(B/R) isomorfo a P'. Risulta immediato che il fattoriale A/B, isomorfo a P, è relativo ad una serie principale di G.

LEMMA III. – *Sia* G *un* N*-gruppo risolubile con un sottogruppo dei quaternioni. Un sottogruppo normale di* G *non può avere ordine* $4m$ (*m dispari*).

Negando la tesi, esista in G un sottogruppo normale H d'ordine $4m$. Per il Lemma I, in una serie principale Σ per P vi è un fattoriale H_1/H_2 di ordine 4. È: $H \supseteq H_1 \supset H_2$, altrimenti l'ordine di G sarebbe divisibile per 2^4. Dunque, H_1 ha ordine $4m'$ (m' divide m) e H_1/H_2 è abeliano elementare (non ciclico) in quanto sottogruppo normale minimo di G/H_2. Si ha [5]: $H_1 = KH_2$ con K isomorfo a H_1/H_2; onde, K è un sottogruppo di G abeliano elementare di ordine 4. Ciò è assurdo giacché i sottogruppi di G d'ordine 4 sono ciclici per l'avere G un sottogruppo di Sylow isomorfo al gruppo dei quaternioni. Il Lemma III è così provato.

Siamo ora in grado di dare una caratterizzazione degli N-gruppi risolubili mediante il seguente:

TEOREMA I. – *Sia* G *un gruppo risolubile finito.* G *è un* N*-gruppo se, e solo se, sono soddisfatte le condizioni seguenti*:

1° *I sottogruppi di Sylow di* G *sono ciclici, abeliani elementari, isomorfi al gruppo dei quaternioni.*

2° *Se* G *possiede un sottogruppo dei quaternioni,* G *è privo di sottogruppi normali d'ordine* $4m$ (*m dispari*).

3° *In una serie principale di* G *vi sono fattoriali aventi ordini uguali agli ordini di ciascun sottogruppo di Sylow di* G *abeliano elementare non ciclico.*

Se G è un N-gruppo, le 1°, 2°, 3° sono soddisfatte per i Lemmi I, III, II rispettivamente.

Viceversa G verifichi le 1°, 2°, 3°. Mostreremo che G è un N-gruppo.

Sia $g = p_1^{\alpha_1} \cdots p_t^{\alpha_t} q_1^{\beta_1} \cdots q_s^{\beta_s} 2^{\gamma}$ l'ordine [6] di G; ogni sottogruppo d'ordine $p_i^{\alpha_i}$ sia abeliano elementare (non ciclico), ogni sottogruppo d'ordine $q_j^{\beta_j}$ sia ciclico, mentre ogni eventuale sottogruppo d'ordine 2^{γ} sia ciclico o abeliano elementare o isomorfo al gruppo dei quaternioni.

(5) Per il seguente teor. di P. HALL [4]: Sia Γ un gruppo risolubile avente ordine $r \cdot s$ (r, s primi tra loro). Esistono in Γ sottogruppi d'ordine r e costituiscono una classe completa di sottogruppi coniugati. Inoltre, se un sottogruppo di Γ ha ordine divisore di r, un tale sottogruppo appartiene ad un sottogruppo di Γ d'ordine r.

(6) I numeri p_i, q_j sono supposti numeri primi dispari distinti a due a due ($i = 1, 2, \cdots, t$; $j = 1, 2, \cdots, s$).

Distinguiamo i casi seguenti:

a) *I sottogruppi d'ordine* 2^γ *sono ciclici.*

Siano H un sottogruppo normale in G d'ordine $p_1^{\alpha'_1}\cdots p_t^{\alpha'_t} q_1^{\beta'_1}\cdots q_s^{\beta'_s}\, 2^{\gamma'}$ e Σ una serie principale di G passante per H. Per la 3ª esiste in Σ un fattoriale R_i/T_i d'ordine $p_i^{\alpha_i}$; se $\alpha'_i > 0$, H contiene R_i giacché in caso contrario l'ordine di G sarebbe divisibile per $p_i^{\alpha_i+\alpha'_i}$. Dunque è $\alpha'_i = 0$ oppure $\alpha'_i = \alpha_i$; ne segue per il già citato teorema di Hall che H essendo normale in G contiene ogni sottogruppo di G d'ordine $p_1^{\alpha'_1}\cdots p_t^{\alpha'_t}$. Per lo stesso teorema di Hall G è del tipo $G = AB$ con A e B d'ordini rispettivi $p_1^{\alpha_1}\cdots p_t^{\alpha_t}$ e $q_1^{\beta_1}\cdots q_s^{\beta_s}\, 2^\gamma$. In base ad un risultato di Szép [7] si ha $H = A'\,B'$ con A', B' d'ordini rispettivi $p_1^{\alpha'_1}\cdots p_t^{\alpha'_t}$ e $q_1^{\beta'_1}\cdots q_s^{\beta'_s}\, 2^{\gamma'}$, e normali in A e B rispettivamente. Proviamo ora che B' è coniugato di ogni sottogruppo $\overline{B}'$ di G d'ordine $q_1^{\beta'_1}\cdots q_s^{\beta'_s}\, 2^{\gamma'}$. Per il teorema di Hall, $\overline{B}'$ è contenuto in un sottogruppo $\overline{B}$ d'ordine $q_1^{\beta_1}\cdots q_s^{\beta_s}\, 2^\gamma$ ed esiste un automorfismo interno w di G che porta $\overline{B}$ in B. Il sottogruppo B', normale in B vi è anche unico nel suo ordine giacché B, avendo i sottogruppi di Sylow ciclici, è un N–gruppo [1]; perciò $w(\overline{B}') = B'$ e $\overline{B}'$, B' sono coniugati. Allora H essendo normale contiene ogni sottogruppo di G d'ordine $q_1^{\beta'_1}\cdots q_s^{\beta'_s}\, 2^{\gamma'}$; ricordando che H contiene anche ogni sottogruppo di G d'ordine $p_1^{\alpha'_1}\cdots p_t^{\alpha'_t}$ si ha facilmente che H è unico nel suo ordine fra i sottogruppi di G. Per l'arbitrarietà di H, G è un N–gruppo.

b) *I sottogruppi d'ordine* 2^γ *sono abeliani elementari* (*non ciclici*).

Con ovvie varianti, si ragiona come in *a*).

c) *I sottogruppi d'ordine* 2^γ *sono isomorfi al gruppo dei quaternioni* (*perciò* $\gamma = 3$).

Sia ancora H (d'ordine $p_1^{\alpha'_1}\cdots p_t^{\alpha'_t}\, q_1^{\beta'_1}\cdots q_s^{\beta'_s}\, 2^{\gamma'}$) un sottogruppo normale di G, per la 2° γ' vale 0, 1, 3. Con un procedimento del tipo seguito in *a*) si riconosce che H contiene tutti i sottogruppi di G d'ordini $p_1^{\alpha'_1}\cdots p_t^{\alpha'_t}$ e $q_1^{\beta'_1}\cdots q_s^{\beta'_s}$. In più, H contiene ogni sottogruppo di G d'ordine $2^{\gamma'}$; invero se $\gamma' = 1$, H contiene un sottogruppo d'ordine 2 ed i sottogruppi di G d'ordine 2 sono fra loro coniugati perché di essi ve n'è uno solo in ciascun sottogruppo di Sylow d'ordine 2^3; se $\gamma' = 3$, H contiene ogni sottogruppo di G d'ordine 2^3, essendo questi coniugati perché sottogruppi di Sylow. Dunque H è unico nel suo ordine fra i sottogruppi di G e G è un N–gruppo.

Dimostrato così il Teorema I si riesce ad invertire il già ricordato teorema di Honda. Precisamente si ha:

Teorema II. – *Sia* G *un gruppo finito. Condizione necessaria e sufficiente affinché* G *sia un* N–*gruppo supersolubile è che tutti i sottogruppi di Sylow di* G *siano ciclici.*

La sufficienza della condizione trovasi provata in [1].

(7) Sia Γ un gruppo del tipo $\Gamma_1\cdot\Gamma_2$ con Γ_1, Γ_2 d'ordini primi tra loro. Ogni sottogruppo normale di Γ è del tipo $\Gamma'_1\cdot\Gamma'_2$ con Γ'_1, Γ'_2 sottogruppi normali di Γ_1, Γ_2 rispettivamente.

La condizione è necessaria.

Sia G un N-gruppo supersolubile e Σ una sua serie principale. Se G possedesse qualche sottogruppo di Sylow non ciclico, in Σ esisterebbe (Lemmi I e II) un fattoriale d'ordine composto; ma, ciò non può essere, giacché, essendo G supersolubile, i fattori principali di G sono numeri primi.

Infine:

TEOREMA III. – *Sia* G *un gruppo risolubile del tipo* $A_1 \cdot A_2$ *con gli* A_i N-*gruppi risulubili aventi ordini primi tra loro. Allora,* G *è un* N-*gruppo.*

Per il teorema di Szép, ogni sottogruppo H normale in G è del tipo $A_1' \cdot A_2'$ con A_i' sottogruppo normale di A_i. Inoltre, sfruttando il teorema di Hall, si riconosce che tutti i sottogruppi di G aventi lo stesso ordine di A_i' sono coniugati e che H li contiene tutti essendo normale. Dunque, H è unico nel suo ordine fra i sottogruppi di G e G è un N-gruppo.

2. Segnaliamo ora alcune conseguenze dei Teoremi del num. 1. Si ha cioè:

1° *Sia* G *un* N-*gruppo risolubile. Condizione necessaria e sufficiente affinché* G *abbia il sottogruppo di Frattini identico è che ogni sottogruppo normale minimo di* G *sia un sottogruppo di Sylow.*

La condizione è necessaria.

Supposto G a sottogruppo di Frattini identico, sia P (d'ordine primo p) un sottogruppo normale minimo di G. P è dotato di un complemento C per un teorema [8] di Zacher. Supponiamo per assurdo che G contenga un sottogruppo di Sylow d'ordine p^α con $\alpha > 1$. Essendo P e C permutabili, C contiene un sottogruppo X' d'ordine $p^{\alpha-1}$; per il teorema di Sylow, X' appartiene ad un sottogruppo X di G d'ordine p^α. Giacché G è un N-gruppo, X contenendo P è ciclico o isomorfo al gruppo dei quaternioni, sicché: $X' \supseteq P$. Ciò implica $P \cup C = C$ mentre è invece $P \cup C = G$. L'assurdo cui siamo pervenuti comporta che α valga 1 e che quindi P sia sottogruppo di Sylow di G. Inoltre, essendo G un N-gruppo, ogni sottogruppo normale minimo non ciclico di G è sottogruppo di Sylow.

La condizione è sufficiente.

Sia P un sottogruppo normale minimo di G, per ipotesi P è un sottogruppo di Sylow. Allora P ha ordine primo col suo indice e per il teorema di Hall è dotato di complemento. Per il già ricordato teorema di Zacher, G ha il sottogruppo di Frattini identico.

2° *Sia* G *un* N-*gruppo risolubile. I sottogruppi normali minimi non ciclici di* G *sono sottogruppi di Sylow per il derivato di* G.

Un sottogruppo P, normale minimo non ciclico di G, è un sottogruppo di Sylow; pertanto G avrà ordine $p^\alpha m$ (m primo con p) ove p^α è l'ordine di P.

(8) Si ha [6]: Un gruppo finito risolubile G è a sottogruppo di Frattini identico se, e solo se, ciascun sottogruppo normale minimo di G risulta dotato di complemento (dicesi, *complemento* d'un sottogruppo A di G un eventuale sottogruppo B tale che: $A \cup B = G$, $A \cap B = 1$).

Il derivato K di G, non può avere ordine divisore di m; altrimenti K sarebbe contenuto in un sottogruppo D d'ordine m e si avrebbe $G = P \times D$ contro l'ipotesi che P sia normale minimo. Altrettanto facilmente si prova che K non ha ordine $k = p^{\alpha'} m'$ ($0 < \alpha' < \alpha$, m' divisore di m); infatti, se così non fosse, $K \cap P$, normale in G, sarebbe un sottogruppo proprio di P ciò che è escluso essendo P normale minimo. Dunque è necessariamente $k = p^{\alpha} m'$ e P sottogruppo di Sylow anche per K.

3° *Sia* G *un* N*–gruppo risolubile con un sottogruppo dei quaternioni. Se* G *è privo di sottogruppi normali d'ordine dispari e se il derivato di* G *è un* 2*–gruppo, l'ordine di* G *vale* $3 \cdot 2^3$.

Un sottogruppo di Sylow Q avente ordine 2^3 contiene il derivato di G. Per il teorema di Hall, G è del tipo RQ con R d'ordine dispari, R è ciclico poiché isomorfo a G/Q che un N-gruppo abeliano.

Un elemento $g \neq 1$ di R non può indurre su Q l'automorfismo identico, giacché, se così fosse, lo stesso automorfismo indurrebbe il sottogruppo $\{g\}$ generato da g; allora, $\{g\}$ sarebbe normale in G contro l'ipotesi. Ne segue che R è un sottogruppo dell'automorfo A_Q di Q e che quindi G è l'olomorfo di Q rispetto a R. Ma in A_Q un sottogruppo d'ordine dispari ha necessariamente ordine 3; pertanto, G ha ordine $3 \cdot 2^3$.

Viceversa, se G è l'olomorfo di Q rispetto a R, si prova subito che G è un N-gruppo.

Bibliografia.

[1] K. Honda, *On finite groups, whose Sylow–groups are all cyclic*, «Comm. Math. Univ. Sancti Pauli», *1*, p. 5 (1952).

[2] G. Scorza, *Gruppi astratti*, Ed. Cremonese. Roma (1942).

[3] H. Zassenhaus, *The theory of groups*, Chelsea Publ. Comp. New–York (1949).

[4] P. Hall, *A note on soluble groups*, « Journ. London Math. Soc.», *3*, p. 98 (1928); *A characteristic property of soluble groups*, « Journ. London Math. Soc.», *12*, p. 198 (1937).

[5] J. Szép, *On the structure of groups which can be represented as the product of two subgroups*, « Acta Scient. Math.», *12*, p. 57 (1950).

[6] G. Zacher, *Costruzione dei gruppi finiti a sottogruppo di Frattini identico*, «Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova», *22*, p. 383 (1953).

Matematica. — *Complementi e commenti ad un teorema di Beniamino Segre.* Nota di HEINRICH GUGGENHEIMER, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

1. In una recente Memoria [1] B. Segre ha studiato – con mezzi assai semplici – le relazioni omologiche fra una varietà algebrica non singolare e la stessa varietà tagliata lungo di una sua sottovarietà algebrica. In questa Nota ci proponiamo di utilizzare la successione esatta d'omologia per stabilire rapidamente il risultato centrale del Segre, cioè la (10), § 7 di [1], e per ottenere un risultato analogo in ogni dimensione. La nostra formola sarà valida in ogni spazio topologico compatto nel quale sia dato un sottospazio chiuso, tutti e due con gruppi d'omologia razionale di dimensione finita. Fra l'altro, possiamo così estendere alle varietà algebriche *con singolarità* tutti i risultati sulle trasformazioni birazionali della [1]. Daremo infine un'estensione molto forte del teorema di Cremona–Clebsch (ved. loc. cit.) relativo agli elementi fondamentali delle trasformazioni cremoniane.

In principio, il metodo utilizzato dovrebbe riuscire effettivo anche per stabilire i legami fra i gruppi di torsione in tutte le dimensioni. Però gli strumenti algebrici da usare a tale scopo saranno più complicati, e le ipotesi da fare più restrittive; rimandiamo quindi tale studio ad una Nota ulteriore.

Per le nozioni qui utilizzate di algebra omologica, si veda uno dei trattati standard, o per esempio [2]. Rammentiamo soltanto che una successione di gruppi e d'omomorfismi è detta esatta, se l'immagine di ogni gruppo mediante un omomorfismo è uguale al nucleo dell'omomorfismo seguente.

2. Sia V uno spazio topologico compatto (nel seno del Bourbaki), M un suo sottospazio chiuso; si sa che, per qualsiasi gruppo abeliano G di coefficienti, sussiste l'isomorfismo

$$H_r(V \bmod M, G) \cong H_r(V - M, G) \qquad (r = 0, 1, \cdots)$$

per i gruppi d'omologia a sopporto compatto. In questa Nota, il gruppo dei coefficienti sarà *sempre il gruppo* additvo *dei numeri razionali* che verrà quindi sottinteso nei gruppi d'omologia. A causa della possibile struttura di corpo sui razionali, i gruppi d'omologia sono degli spazi vettoriali, e la dimensione di $H_r(X)$, se finita, è il numero di Betti $b_r(X)$. Vogliamo assumere in ciò che segue che *i numeri di Betti di* V *ed* M *esistano.*

La successione esatta d'omologia diventa nel nostro caso

$$\cdots \xleftarrow{p_*} H_r(V) \xleftarrow{i_*} H_r(M) \xleftarrow{\partial_*} H_{r+1}(V - M) \xleftarrow{p_*} H_{r+1}(V) \xleftarrow{i_*} \cdots,$$

(*) Nella seduta del 13 dicembre 1958.

dalla quale abbiamo

$$(1) \qquad b_{r+1}(V - M) = \dim p_* H_{r+1}(V) + \dim \partial_* H_{r+1}(V - M).$$

Chiameremo s_r il numero delle classi d'omologia r–dimensionale di M che sono omologicamente indipendenti in V, cioè

$$(2) \qquad s_r = \dim i_* H_r(M).$$

Siccome abbiamo da fare con spazi vettoriali, vale da decomposizione in somma diretta:

$$H_{r+1}(V) \cong i_* H_{r+1}(M) \dot{+} p_* H_{r+1}(V),$$

$$H_r(M) \cong \partial_* H_{r+1}(V - M) \dot{+} i_* H_r(M),$$

e la (1) diventa

$$(3) \qquad b_{r+1}(V - M) = b_{r+1}(V) + b_r(M) - s_{r+1} - s_r,$$

con

$$(4) \qquad s_r \leq \min(b_r(M), b_r(V)).$$

La (3) ci dà la generalizzazione cercata della formola di Segre.

Supponiamo ora che M sia *di dimensione omologica finita m*, cioè

$$H_{m+k}(M) = 0 \quad , \quad k > 0;$$

dall'esattezza si trae

$$(5) \qquad H_{m+k}(V) = H_{m+k}(V - M),$$

e la (3) diventa per $r = m$:

$$(6) \qquad b_{m+1}(V - M) = b_{m+1}(V) + b_m(M) - s_m$$

che è il caso trattato nel lavoro di B. Segre [1] già citato. La sola differenza consiste nel fatto che la (6), in quella Memoria, è stabilita per *le dimensioni duali* in V. Ma poiché la dualità del Poincaré non vale nelle varietà con singolarità, è da presumere che soltanto le (3) e (6) valgano generalmente, e che soltanto nel caso non–singolare sia permesso sostituire ogni dimensione con la duale in V.

3. L'azione di una trasformazione birazionale sulle riemanniane delle varietà si può tradurre nel modo seguente in topologia: Chiameremo *trasformazione di modificazione*, T, una trasformazione fra due spazi V, $\bar{V}$ tale che esistano sottospazi $M \subset V$, $\bar{M} \subset \bar{V}$ (ipersuperficie eccezionali) in modo che la T risulta *biunivoca e bicontinua* fra $\bar{V} - \bar{M}$ e $V - M$. Il caso che ci interessa è quello di V , $\bar{V}$ compatti, M , $\bar{M}$ chiusi e di dimensione omologica finita. Designeremo con $\bar{s}_r$ la dim $i_* H_r(\bar{M})$ relativa a $\bar{V}$. In base all'ipotesi ammessa risulta

$$H_r(V - M) \cong H_r(\bar{V} - \bar{M}),$$

e quindi

$$b_r(V - M) = b_r(\bar{V} - \bar{M}).$$

Otteniamo così il risultato:

In ogni modificazione (in particolare, in ogni trasformazione birazionale fra varietà possibilmente singolari e riducibili) *sussistono le uguaglianze*

$$(7) \qquad b_{r+1}(V) + b_r(M) - s_{r+1} - s_r = b_{r+1}(\bar{V}) + b_r(\bar{M}) - \bar{s}_{r+1} - \bar{s}_r.$$

Se anche le V, $\bar{V}$ sono di dimensione omologica finita, si deduce dalla (7) per le caratteristiche di Euler (somme alternante dei numeri di Betti):

$$(8) \qquad \chi(V) - \chi(M) = \chi(\bar{V}) - \chi(\bar{M}).$$

Nel caso delle trasformazioni cremoniane, $V = \bar{V}$ è uno spazio lineare complesso e

$$s_{2k} = \bar{s}_{2k} = 1,$$

$$s_{2k+1} = \bar{s}_{2k+1} = 0,$$

siccome $H_{2k+1}(V) = 0$; inoltre i gruppi $H_{2k}(V)$ sono generati dalle potenze (nel prodotto cup) della forma esterna derivata dalla metrica, ed il volume ipersuperficiale delle varietà eccezionali non è nullo. In questo caso la (7) si riduce a

$$(9) \qquad b_r(M) = b_r(\bar{M}),$$

sicché *in ogni trasformazione cremoniana le ipersuperficie eccezionali della trasformazione* (*prese nel loro complesso*) *e della trasformazione inversa hanno gli stessi numeri di Betti.*

Se ci riferiamo al caso più generale di trasformazione di uno spazio in sé, $V = \bar{V}$, otteniamo invece la relazione

$$b_r(M) - s_r - s_{r+1} = b_r(\bar{M}) - \bar{s}_r - \bar{s}_{r+1};$$

e, se le dimensione omologiche m di M, $\bar{m}$ di $\bar{M}$ sono diverse, per esempio $m < \bar{m}$, abbiamo

$$(11) \qquad b_{m+k}(\bar{M}) = \bar{s}_{m+k} + \bar{s}_{m+k+1}, \qquad k > 0,$$

in particolare:

$$(12) \qquad b_{\bar{m}-1}(\bar{M}) = \bar{s}_{\bar{m}}.$$

Nel caso $b_{\bar{m}}(\bar{M}) \neq 0$, sempre verificato per le trasformazioni birazionali, abbiamo anche

$$(13) \qquad b_{\bar{m}-1}(\bar{M}) = \bar{s}_{\bar{m}-1} + \bar{s}_{\bar{m}} \geq b_{\bar{m}}(\bar{M}) > 0.$$

Quest'ultimo risultato è d'interesse speciale per le trasformazioni birazionali di varietà algebriche, in quanto mostra che, se $m \neq \bar{m}$, *la varietà eccezionale* $\bar{M}$ *non può essere uno spazio lineare,* $\bar{m} - 1$ essendo dispari. Se

$\bar{M}$ è composta di una somma di varietà non singolari, il doppio del numero degli integrali abeliani semplici di prima specie supera il numero delle componenti di $\bar{M}$, sicché secondo un risultato dovuto a Bochner [3], il tensore del Ricci associato alla metrica indotta sopra la $\bar{M}$ dalla metrica di uno spazio proiettivo ambiente non sarà mai definito positivo.

Bibliografia.

[1] Beniamino Segre, *Corrispondenze birazionali e topologia di varietà algebriche*, « Ann. di Mat. », IV, XLIII, 1–23 (1957).

[2] H. Guggenheimer, *Saggi di topologia delle varietà complesse*, « Rend. Acc. Sci. Bologna » (11), *3*, 185–253 (1955–56).

[3] S. Bochner, *Curvature and Betti Numbers*, « Ann. of Math. » (2), *49*, 378–390 (1948).

Geometria. — *Nuove caratterizzazioni della sfera.* Nota di GIACOMO SABAN, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

1. In una serie di Note relativamente recenti, varî Autori si sono soffermati sul problema della caratterizzazione della sfera mediante integrali estesi a curve chiuse.

Dette rispettivamente τ ed s la torsione e la lunghezza d'arco di una curva, lo Scherrer (1) per primo ha dimostrato che l'essere

$$(1) \qquad \oint_{\mathfrak{L}} \tau \, ds = 0$$

per ogni curva chiusa $\mathfrak{L}$ di una superficie implica che questa sia una sfera.

Successivamente il Segre (2) ha similmente provato che

$$(2) \qquad \oint_{\mathfrak{L}} \frac{\tau}{\varkappa} ds = 0$$

caratterizza le sfere, qualora $\varkappa$ denoti la flessione di $\mathfrak{L}$.

Sul teorema di Scherrer hanno dato precisazioni sia il Geppert (3) che il Signorini (4), mentre l'argomento è stato ripreso, dopo la pubblicazione della Nota del Segre, da Gallarati (5) e da Scherk (6).

Nella presente Nota vengono dimostrati i seguenti due teoremi:

TEOREMA I. – *Se* ρ, τ *ed* s *denotano rispettivamente il raggio di curvatura, la torsione e la lunghezza d'arco, gli integrali*

$$(3) \qquad I_n = \oint_{\mathfrak{L}} \rho^n \tau \, ds \qquad n = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$$

si annullano per tutte le curve chiuse $\mathfrak{L}$ *tracciate su superficie sferiche.*

(*) Nella seduta dell'8 novembre 1958.

(1) W. SCHERRER, *Eine Kennzeichnung der Kugel*, « Vierteljahrschrift der naturforsch. Ges. Zürich », *85*, Beiblatt 32, pp. 40–46 (1940).

(2) B. SEGRE, *Una nuova caratterizzazione della sfera*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sci. Fis. Mat. e Nat., *8*, III, pp. 420–422 (1947).

(3) H. GEPPERT, *Sopra una caratterizzazione della sfera*, « Annali di Mat. » (4), *20*, pp. 59–66 (1941).

(4) A. SIGNORINI, *Sopra una caratterizzazione della sfera*, « Annali di Mat. » (4), *20*, pp. 211–212 (1941).

(5) D. GALLARATI, *Alcune osservazioni sulle curve sferiche ed una nuova caratterizzazione della sfera*, « Rend. Accad. Naz. Lincei », Cl. Sci. Fis. Mat. e Nat., *8*, XIII, pp. 238–241 (1952).

(6) P. SCHERK, *Intorno alle curve sferiche*, « Boll. Un. Mat. It. » (3), *9*, pp. 38–40 (1954).

TEOREMA II. – *Se*

$$I_n = \oint_{\mathfrak{L}} \rho^n \tau \, ds = 0 \tag{4}$$

per un dato (ma arbitrario) valore di n, intero ≥ 0, *e per ogni curva chiusa tracciata sopra una superficie* S, *la superficie* S *è necessariamente una sfera (o un piano).*

Il Teorema II, assieme al Teorema I ristretto ad $n \geq 0$, fornisce quindi infinite nuove caratterizzazioni della sfera includenti quali casi particolari quelle segnalate sopra.

È finora rimasto vano ogni mio tentativo di dimostrare l'enunciato del Teorema II per valori negativi dell'intero n.

2. Si consideri una curva $\mathfrak{L}$, appartenente alla sfera S di raggio R, e sia $\xi = \xi(s)$ il raggio–vettore di tale curva, ove si assuma ad origine delle coordinate il centro O della sfera ed a parametro s l'arco della curva considerata. Si ha allora

$$\xi = \xi(s) = R \cdot e_1(s) \tag{5}$$

ove $e_1 = e_1(s)$ è il versore del raggio vettore di $\mathfrak{L}$, normale dunque alla sfera S. Sia e_2 il versore della tangente ad $\mathfrak{L}$, normale ad e_1: è

$$\frac{d\xi}{ds} = e_2 = R \frac{de_1}{ds} \tag{6}$$

per cui, definito $ds^* = ds/R$ come *elemento d'arco sferico* sulla curva $\mathfrak{L}$, si potrà scrivere

$$\frac{de_1}{ds^*} = e_2 . \tag{7}$$

La terna diretta, costituita dai versori mutuamente ortogonali e_1, e_2 ed $e_3 = e_1 \wedge e_2$, risulta associata intrinsecamente alla curva sferica $\mathfrak{L}$ ed è anzi il triedro *geodetico* di questa curva. Valgono le formule di derivazione [7]

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{de_1}{ds^*} &= e_2 , \\ \frac{de_2}{ds^*} &= -e_1 + \sigma e_3 , \\ \frac{de_3}{ds^*} &= -\sigma e_2 , \end{aligned} \right. \tag{8}$$

ove

$$\sigma = \left[e_1 , \frac{de_1}{ds^*} , \frac{d^2 e_1}{ds^{*2}} \right] \tag{9}$$

riceve il nome di *curvatura sferica* di $\mathfrak{L}$ e non differisce che per un fattore di proporzionalità costante dalla *curvatura geodetica* di questa curva.

(7) K. ERIM, *Die höheren Differentialelemente einer Regelflaeche und einer Raumkurve*, « Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul (A) », *10*, pp. 1–24 (1945).

Se si confrontano le formule (8) con le formule di Frénet, scritte per la curva sferica considerata, si verifica immediatamente che fra la flessione $\varkappa$, la torsione τ e la curvatura sferica σ di Σ intercorrono le seguenti relazioni

$$\varkappa = \frac{\sqrt{1+\sigma^2}}{R}, \tag{10}$$

$$\tau = \frac{\frac{d\sigma}{ds^*}}{R(1+\sigma^2)}. \tag{11}$$

3. Introdotto il raggio di curvatura $\rho = 1/\varkappa$, si consideri l'espressione

$$\rho^n \tau \tag{12}$$

ove l'esponente n è un intero positivo: dalle formule (10) ed (11) risulta

$$\rho^n \tau = \frac{\tau}{\varkappa^n} = \frac{\frac{d\sigma}{ds^*}}{R(1+\sigma^2)} \frac{R^n}{(1+\sigma^2)^{n/2}} \tag{13}$$

e, tornando all'elemento d'arco della curva considerata, si ottiene, ancora

$$\rho^n \tau\, ds = R^n \frac{d\sigma}{(1+\sigma^2)^{(n+2)/2}}. \tag{14}$$

A seconda della parità di n, questa equazione si scrive

$$\rho^{2k} \tau\, ds = R^{2k} \frac{d\sigma}{(1+\sigma^2)^{k+1}} \qquad \text{se} \quad n = 2k \text{ (con } k \text{ intero)}, \tag{15}$$

oppure

$$\rho^{2k+1} \tau\, ds = R^{2k+1} \frac{d\sigma}{(1+\sigma^2)^{(k+1)+1/2}} \qquad \text{se} \quad n = 2k+1. \tag{16}$$

Nel caso di n pari, essendo [8]

$$\int \frac{d\sigma}{(1+\sigma^2)^{k+1}} = \sigma \sum_{\nu=1}^{k} \frac{(2k-1;-2;\nu-1)}{(k;-1;\nu);2^\nu} \frac{1}{(1+\sigma^2)^{k-\nu}} + \frac{(1;2;k)}{2^k \cdot k!} \int \frac{d\sigma}{1+\sigma^2} \tag{17}$$

$$\int \frac{d}{1+\sigma^2} = \operatorname{arctg} \sigma + c \tag{18}$$

con

$$(m;d;\nu) = m(m+d)(m+2d)\cdots(m+(\nu-1)d) \tag{19}$$

e

$$(m;-d;\nu) = (m-(\nu-1)d;d;\nu), \tag{20}$$

si potrà scrivere

$$\rho^{2k} \tau\, ds = R^{2k} \cdot d\left[\sigma \sum_{\nu=1}^{k} \frac{(2k-1;-2;\nu-1)}{(k;-1;\nu)\cdot 2^\nu} \frac{1}{(1+\sigma^2)^{k-\nu}} + \frac{(1;2;k)}{2^k \cdot k!} \operatorname{arctg} \sigma + c\right]. \tag{21}$$

(8) W. GRÖBNER und N. HOFREITER, *Integraltafel*, I, Springer-Verlag, Wien u. Innsbruck, p. 15, formule (15 *a*) e (15 *b*) e p. VII (1949).

Indicando con $f(\sigma)$ l'espressione fra parentesi quadre, si giunge infine alla

$$\rho^{2k}\,\tau\,ds = d\,[R^{2k}\cdot f(\sigma)]; \tag{22}$$

sicché ovviamente, per ogni curva regolare Γ di S, è

$$\oint_{\Gamma} \rho^{2k}\,\tau\,ds = 0 \qquad \text{per ogni } k \geq 0. \tag{23}$$

Se invece n è dispari, valendo la formula [9]

$$\int \frac{d\sigma}{(1+\sigma^2)^{(k+1)+1/2}} = \sum_{\nu=0}^{h} (-1)^{\nu} \binom{k}{\nu} \left\{ \frac{\sigma^2}{1+\sigma^2} \right\}^{\nu+1/2} + c \tag{24}$$

si ha ancora, con ragionamento del tutto analogo,

$$\oint_{\Gamma} \rho^{2k+1}\,\tau\,ds = 0 \qquad \text{per ogni } k \geq 0 \tag{25}$$

e per ogni curva chiusa regolare tracciata su S, risultato quest'ultimo già intravvisto da Scherk.

4. L'espressione (12) con n intero negativo si riscrive, mediante le formule (10) ed (11), nella maniera seguente:

$$\frac{\tau}{\rho^m} = \varkappa^m \tau = \frac{(1+\sigma^2)^{m/2}}{R^m} \frac{\frac{d\sigma}{ds^*}}{1+\sigma^2}, \qquad n = -m\,,\ m > 0. \tag{26}$$

Di conseguenza si ha

$$\frac{\tau}{\rho^m}\,ds = \frac{1}{R^{m-1}}\,(1+\sigma^2)^{m-2/2}\,d\sigma, \qquad m > 0. \tag{27}$$

Il secondo membro è il differenziale di una funzione di σ, come risulta dalla formula

$$\int (1+\sigma^2)^k\,d\sigma = \int \sum_{\nu=0}^{h} \binom{k}{\nu} \sigma^{\nu}\,d\sigma = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} \frac{\sigma^{\nu+1}}{\nu+1} + c_1 \tag{28}$$

allorché m è pari ed in base alla formula [10]

$$\int (1+\sigma^2)^{k+1/2}\,d\sigma = \sigma \sum_{\nu=0}^{k} \frac{(2k+1\,;-2\,;\nu)}{(2k+2\,;-2\,;\nu+1)}\,(1+\sigma^2)^{k-\nu+1/2} + \tag{29}$$

$$+ \frac{(1\,;2\,;k+1)}{(k+1)!}\,\frac{1}{2^{k+1}} \log c\,(\sigma + \sqrt{1+\sigma^2})$$

per m dispari.

(9) W. Gröbner und N. Hofreiter, *Integraltafel*, I, Springer–Verlag, Wien und Innsbruck, p. 49, formule (7 *b*) (1949).

(10) W. Gröbner und N. Hofreiter, *Integraltafel*, I, Springer–Verlag, Wien und Innsbruck, p. 47, formula (7 *b*) (1949).

Si indichi con $f(\sigma)$ il secondo membro della formula (28) o della (29), a seconda che l'indice m sia pari o dispari: si potrà quindi scrivere

$$\frac{\tau}{\rho^m}\,ds = \frac{1}{R^{m-1}}\,d[f(\sigma)] \tag{30}$$

per cui, per ogni curva regolare Σ della sfera risulta ancora

$$\oint_{\Sigma} \frac{\tau}{\rho^m}\,ds = 0, \qquad m > 0. \tag{31}$$

5. I risultati espressi dalle formule (23), (25) e (31) si possono riunire nell'enunciato del teorema I (dato nel n. 1).

Per stabilire il teorema II basterà dimostrare che, assegnato un qualsiasi $n \geq 0$, se I_n si annulla per ogni curva chiusa di una superficie, questa è necessariamente una sfera. A tal fine il procedimento usato nelle Note di Geppert e Segre sembra essere quello più conveniente: tuttavia, come risulta da quanto segue, esso non servirebbe per $n < 0$.

Si assuma quindi come origine O un punto qualsivoglia regolare di S, e come piano Ox_1x_2 il piano tangente ad S in quel punto. La superficie, nell'intorno di O ha dunque un'equazione della forma

$$x_3 = \frac{1}{2}(a_{20}x_1^2 + a_{02}x_2^2) + [3], \tag{33}$$

ove con [3] viene indicata un'espressione in x_1 ed x_2, costituita da termini di grado superiore od eguale a 3. Prescelto poi un numero r sufficientemente piccolo, si consideri la curva chiusa Σ_r di S, rappresentata parametricamente dalle

$$\begin{cases} x_1 = r\left(\cos\vartheta + \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3\vartheta\right) \\ x_2 = r\left(\operatorname{sen}\vartheta + \frac{1}{3}\cos^3\vartheta\right) \\ x_3 = \frac{r^2}{2}\left[a_{20}\left(\cos\vartheta + \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3\vartheta\right)^2 + a_{02}\left(\operatorname{sen}\vartheta + \frac{1}{3}\cos^3\vartheta\right)^2\right] + [3] \end{cases} \tag{34}$$

ove ϑ varia fra 0 e 2π.

L'integrale I_n, esteso alla curva Σ_r, vale

$$I_n(\Sigma_r) = \oint_{\Sigma_r} \rho^n \tau\,ds = \int_0^{2\pi} \frac{(x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2)^{(3n+1)/2}}{[(x_2'x_3'' - x_3'x_2'')^2 + \cdots]^{1+n/2}} \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' \end{vmatrix} d\vartheta, \tag{35}$$

gli apici denotando derivazioni rispetto a ϑ ed i puntini al denominatore indicando le espressioni che si ottengono da quella in parentesi effettuando una permutazione circolare sugli indici. Tenendo conto della (35) e delle (34), quest'ultimo integrale diventa

$$I_n(\Sigma_r) = \int_0^{2\pi} r^{n+1}(1 - \operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta)^n [a_{20}(3\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta - 8\operatorname{sen}^2\vartheta\cos^2\vartheta + \tag{36}$$

$$+ 5\operatorname{sen}^4\vartheta) - a_{02}(3\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta - 8\operatorname{sen}^2\vartheta\cos^2\vartheta + 5\cos^4\vartheta)]\,d\vartheta + [n+2]$$

e può anche scriversi nella forma

$$(37)\quad I_n(\Omega_r)=r^{n+1}(a_{20}-a_{02})\int_0^{2\pi}(1-\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta)^n(3\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta-8\operatorname{sen}^2\vartheta\cos^2\vartheta)\,d\vartheta+$$

$$+r^{n+1}\int_0^{2\pi}(1-\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta)^n(5a_{20}\operatorname{sen}^4\vartheta-5a_{02}\cos^4\vartheta)\,d\vartheta+[n+2],$$

ove $[n+2]$ rappresenta termini infinitesimi in r di ordine maggiore ad $n+1$. Tutti e due questi integrali dànno luogo, a loro volta, a termini della forma

$$(38)\qquad \int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^s\vartheta\cos^t\vartheta\,d\vartheta$$

i quali, in base alla formula [11]

$$(39)\qquad \int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^s\vartheta\cos^t\vartheta\,d\vartheta=\frac{[1+(-1)^s][1+(-1)^t]}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{t+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+t+2}{2}\right)}$$

sono diversi da zero solo per s e t ambedue pari. I termini che soddisfano a questa condizione sono della forma

$$(40)\qquad A_k=\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^{2k}\vartheta\cos^{2k}\vartheta\,d\vartheta$$

per il primo integrale di (37) e della forma

$$(41)\qquad B_k=\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^{2k}\vartheta\cos^{2k+4}\vartheta\,d\vartheta\quad;\quad C_k=\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^{2k+4}\vartheta\cos^{2k}\vartheta\,d\vartheta$$

per il secondo. L'integrazione dà in tal caso [12]

$$(42)\qquad A_k=\frac{(1\,;2\,;k)^2}{2^{2k-1}(2k)!}\,\pi,$$

$$(43)\qquad B_k=C_k=\frac{(1\,;2\,;k)\,(1\,;2\,;k+2)}{2^{2k+1}(2k+2)!}\,\pi.$$

(11) W. Gröbner und N. Hofreiter, *Integraltafel*, II, Springer–Verlag, Wien u. Innsbruck, p. 96, formula (25) (1950).

(12) W. Gröbner und N. Hofreiter, *Integraltafel*, II, Springer–Verlag, Wien u. Innsbruck, p. 85, formula (2 *a*) (1950).

Dalla costituzione degli integrandi nella (37) segue che questa si può riscrivere:

$$(44)\qquad I_n(\Sigma_r) = r^{n+1}(a_{20} - a_{02})\int_0^{2\pi}\sum_{\mu=0}^{n}(-1)^{\mu}\binom{n}{\mu}\operatorname{sen}^{\mu}\vartheta\cos^{\mu}\vartheta\,(3\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta -$$

$$-8\operatorname{sen}^2\vartheta\cos^2\vartheta)\,d\vartheta + 5r^{n+1}\int_0^{2\pi}\sum_{\mu=0}^{n}(-1)^{\mu}\binom{n}{\mu}\operatorname{sen}^{\mu}\vartheta\cos^{\mu}\vartheta\,(a_{20}\operatorname{sen}^4\vartheta -$$

$$-a_{02}\cos^4\vartheta)\,d\vartheta + [n+2]$$

ossia

$$(45)\quad I_n(\Sigma_r) = r^{n+1}(a_{02} - a_{20})\left[3\sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{2k+1}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^{2k+2}\vartheta\cos^{2k+2}\vartheta\,d\vartheta +\right.$$

$$+8\sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{2k}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^{2k+2}\vartheta\cos^{2k+2}\vartheta\,d\vartheta + 5r^{n+1}\left[a_{20}\sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{2k}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^{2k+4}\vartheta\cos^{2k}\vartheta\,d\vartheta -\right.$$

$$-a_{02}\sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{2k}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^{2k}\vartheta\cos^{2k+4}\vartheta\,d\vartheta + [n+2]$$

ove $[n/2]$ denota – secondo l'uso – il massimo intero non superiore ad $n/2$.
Per via delle (40) e (41),

$$(46)\quad I_n(\Sigma_r) = r^{n+1}(a_{02} - a_{20})\left[3\sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{2k+1}A_{k+1} + 8\sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{2k}A_{k+1}\right] -$$

$$-5r^{n+1}(a_{02} - a_{20})\sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{2k}B_k + [n+2]$$

o ancora

$$(47)\quad I_n(\Sigma_r) = r^{n+1}(a_{02} - a_{20})\sum_{k=0}^{[n/2]}\left\{\left[3\binom{n}{2k+1} + 8\binom{n}{2k}\right]A_{k+1} - 5\binom{n}{2k}B_k\right\} + [n+2].$$

Si ponga

$$(48)\quad N(n) = \sum_{k=0}^{[n/2]}N^*(n) = \sum_{k=0}^{[n/2]}\left\{\left[3\binom{n}{2k+1} + 8\binom{n}{2k}\right]A_{k+1} - 5\binom{n}{2k}B_k\right\}:$$

si verifica facilmente che $N(n) \neq 0$, perché

$$(49)\qquad N^*(n) = \binom{n}{2k}\left[\frac{3n + 10k + 8}{2k+1}A_k - 5B_k\right],$$

e, tenendo conto della relazione

$$(50)\qquad (m\,;d\,;\nu+2) = (m\,;d\,;\nu)(m+\nu d)(m+(\nu+1)d),$$

che è conseguenza della definizione (19) e delle (42) e (43), si ha

$$(51)\quad N^*(n)=\pi\frac{(1\,;2\,;k)^2}{2^{2k+1}(2k+2)!}[(3n+10k+8)4(2k+2)-5(2k+1)(2k+3)]=$$

$$=\pi\frac{(1\,;2\,;k)^2}{2^{2k+1}(2k+2)!}[24n(k+1)+60k^2+104k+49]$$

che risulta dunque sempre positivo.

Quindi, tornando alla (47),

$$(52)\qquad I_n(\Omega_r)=r^{n+1}(a_{02}-a_{20})N(n)+[n+2],$$

ed affinché sia

$$(53)\qquad I_n(\Omega_r)=0$$

per ogni Ω_r di S, deve risultare

$$(54)\qquad a_{20}=a_{02}$$

cioè il punto O deve essere sferico o planare. Potendosi ripetere questo ragionamento in ciascun punto regolare di S, si conclude che questa superficie deve essere sferica o ridursi ad un piano. E ciò dimostra il teorema II.

Conviene infine aggiungere, col Segre, che le ipotesi di derivabilità fino al terzo ordine, imposte alle curve chiuse considerate, sono essenziali.

Geometria. — *Intorno ad un problema di W. Blaschke generalizzato.* Nota di ORAZIO SORACE, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

1. Sia F una superficie dello spazio proiettivo S_{2r+2} $(r \geq 2)$ soddisfacente ad una equazione di Laplace, cioè di tipo Φ (con C. Segre [1] (1)). Lo spazio r–oscuratore [2] alla F in un suo punto generico è allora un S_{2r}. Un S_3 di S_{2r+2} sarà chiamato un S_3 *di Blaschke per la* F, se esso viene secato dagli S_{2r} r–osculatori di F secondo rette di una *congruenza* W (a falde focali distinte e non degeneri). Nel presente lavoro saranno trovate condizioni necessarie e sufficienti perché una superficie F ed un S_3 di S_{2r+2} si trovino nella suddetta relazione. La denominazione di S_3 di Blaschke è stata adottata da B. Segre in omaggio al celebre matematico tedesco, che ha posto e risolto il problema di cui sopra nel caso particolare $r = 1$ [3]. B. Segre [4] ha dimostrato la compatibilità delle condizioni ottenute da Blaschke ed ha trovato quali siano le varie configurazioni presentabili dagli S_3 di Blaschke nel caso suddetto. In un mio precedente lavoro [5] mi sono occupato più particolareggiatamente di una di tali configurazioni.

2. Supporremo che l'equazione di Laplace cui soddisfa la F non sia di tipo parabolico (nel qual caso gli S_{2r} r–osculatori segherebbero un qualunque S_3 secondo rette di una congruenza a falde focali coincidenti), ed inoltre che su F le linee $u, v = \text{cost.}$ siano le linee della rete caratteristica di questa equazione. In tal caso le coordinate non omogenee $z^i = z^i(u, v)$ $(i = 1, 2, \cdots, 2r+2)$ di un punto corrente su F soddisfano ad una equazione di Laplace

$$z_{uv} = Pz_v + Qz_u , \tag{1}$$

ove le notazioni hanno significati evidenti. Più in generale, nel seguito indicheremo con $z_{u^h v^k}$ la $\frac{\partial^{h+k} z}{\partial u^h \partial v^k}$.

Lo spazio r–osculatore alla F in z è notoriamente lo spazio congiungente il punto z ed i suoi derivati sino all'ordine r. Ma, in forza della (1) e delle sue conseguenze differenziali, tutte le derivate parziali miste $z_{u^n v^{m-n}}$ $(n = 1, 2, \cdots, m-1)$ si esprimono linearmente per mezzo delle z_{u^h} e delle z_{v^h} $(h = 1, 2, \cdots, m-1)$, onde lo spazio r–osculatore in z è quello congiungente i punti (fra loro linearmente indipendenti), $z, z_u, z_v, z_{u^2}, z_{v^2}, \cdots$ $\cdots, z_{u^r}, z_{v^r}$, ed è quindi un S_{2r}. Chiamiamo $(z^0, z^1, z^2, \ldots, z^{2r+2})$ le coordinate omogenee di un punto dell'S_{2r+2} ambiente. Denotiamo poi con S_3^{1234} lo spazio S_3 di equazioni:

$$z^0 = z^5 = z^6 = \cdots z^{2r+2} = 0 .$$

(*) Nella seduta del 13 dicembre 1958.

(1) I numeri entro parentesi quadre rinviano alla bibliografia posta alla fine del lavoro.

Lo spazio r–osculatore alla F in z seca tale S_3^{1234} nella retta congiungente i punti:

$$x = [z_u z_v z_{u^2} z_{v^2} \cdots z_{u^{r-1}} z_{v^{r-1}} z_{u^r}],$$

$$y = [z_u z_v z_{u^2} z_{v^2} \cdots z_{u^{r-1}} z_{v^{r-1}} z_{v^r}],$$

dove ciascuno dei secondi membri denota un determinante di ordine $2r-1$ le cui righe si ottengono dando alle z come apici i valori $i, 5, 6, \cdots, 2r+2$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Ora è

$$x_u = P(r-1)x + a \quad , \quad x_v = Qrx + c,$$

$$y_u = Pry + b \quad , \quad y_v = Q(r-1)y + d,$$

dove

$$a = [z_u z_v z_{u^2} z_{v^2} \cdots z_{u^{r-1}} z_{v^{r-1}} z_{u^{r+1}}],$$

$$b = [z_u z_v z_{u^2} z_{v^2} \cdots z_{u^r} z_{v^{r-1}} z_{v^r}],$$

$$c = [z_u z_v z_{u^2} z_{v^2} \cdots z_{u^{r-1}} z_{v^r} z_{u^r}],$$

$$d = [z_u z_v z_{u^2} z_{v^2} \cdots z_{u^{r-1}} z_{v^{r-1}} z_{v^{r+1}}].$$

I quattro punti x, y, a, c sono complanari, perché devono appartenere all'S_2 traccia su S_3^{1234} dell'S_{2r+1} congiungente i punti

$$z, z_u, z_v, z_{u^2}, z_{v^2}, \cdots, z_{u^{r-1}}, z_{v^{r-1}}, z_{u^r}, z_{v^r}, z_{u^{r+1}};$$

analogamente sono complanari i punti x, y, b, d: quindi x, y sono precisamente i f u o c h i della retta xy nella congruenza da questa descritta al variare di z su F.

Posto

$$e = [z_u z_v z_{u^2} z_{v^2} \cdots z_{u^{r-1}} z_{v^r} z_{u^{r+1}}],$$

si ha

$$[x\, x_u\, x_v\, x_{uv}] = [x\, a\, c\, e],$$

dove ciascuno dei due membri denota un determinante del quarto ordine le cui righe si ottengono in corrispondenza dei valori 1, 2, 3, 4 attribuiti come apici. Ma i quattro punti x, a, c, e sono complanari, perché appartengono all'S_2 di cui sopra, quindi

$$[x\, x_u\, x_v\, x_{uv}] = 0.$$

Analogamente è $[y\, y_u\, y_v\, y_{uv}] = 0$.

Posto

$$a_1 = [z_u z_v z_{u^2} z_{v^2} \cdots z_{u^{r-2}} z_{v^{r-2}} z_{u^{r-1}} z_{v^{r-1}}],$$

$$b_1 = [z_u z_v z_{u^2} z_{v^2} \cdots z_{u^{r-2}} z_{v^{r-2}} z_{v^{r-1}} z_{v^r}],$$

$$c_1 = [z_u z_v z_{u^2} z_{v^2} \cdots z_{u^{r-2}} z_{v^{r-2}} z_{u^{r-1}} z_{u^r}],$$

dove ciascuno dei secondi membri è un determinante di ordine $2r-2$, le cui righe si ottengono attribuendo alle z gli apici $5, 6, \cdots, 2r+2$, e posto inoltre

$$H = [z_u z_v z_{u^2} z_{v^2} \cdots z_{u^r} z_{v^r} z_{u^{r+1}} z_{u^{r+2}}],$$

$$K = [z_u z_v z_{u^2} z_{v^2} \cdots z_{u^r} z_{v^r} z_{v^{r+1}} z_{v^{r+2}}],$$

$$N = [z_u z_v z_{u^2} z_{v^2} \cdots z_{u^r} z_{v^r} z_{u^{r+1}} z_{v^{r+1}}],$$

dove ciascuno dei secondi membri è un determinante di ordine $2r+2$ le cui righe si ottengono attribuendo alle z gli apici $1, 2, 3, \cdots, 2r+2$, si trova che

$$[x\, x_u\, x_v\, x_{uu}] = a_1^2 c_1 H \quad , \quad [y\, y_u\, y_v\, y_{vv}] = a_1^2 b_1 K ,$$

$$[x\, x_u\, x_v\, x_{vv}] = -a_1 c_1^2 N \quad , \quad [y\, y_u\, y_v\, y_{uu}] = a_1 b_1^2 N .$$

Supponendo, onde evitare casi banali, che si abbia

$$a_1 b_1 c_1 HKN \neq 0 \tag{2}$$

la congruenza sezione risulta W se e soltanto se:

$$ST - st = 0 \tag{3}$$

ove, per abbreviare, abbiamo posto

$$T = \frac{H}{N} \quad , \quad S = \frac{K}{N} \quad , \quad t = \frac{b_1}{a_1} \quad , \quad s = \frac{c_1}{a_1} .$$

Essendo i, j, h una qualsiasi combinazione dei numeri 1, 2, 3, 4, e posto

$$A_{ijh} = [z_u z_v z_{u^2} z_{v^2} \cdots z_{u^{r-1}} z_{v^{r-1}} z_{u^r} z_{v^r} z_{u^{r+1}}],$$

$$B_{ijh} = [z_u z_v z_{u^2} z_{v^2} \cdots z_{u^{r-1}} z_{v^{r-1}} z_{u^r} z_{v^r} z_{v^{r+1}}],$$

(dove ciascuno dei secondi membri è un determinante di ordine $2r+1$ le cui righe si ottengono attribuendo alle z gli apici $i, j, h, 5, 6, \cdots, 2r+2$), se non è identicamente nullo almeno uno dei quattro determinanti A_{ijh} (B_{ijh}) la falda focale x (y) è non degenere.

Quest'ultima proprietà, assieme alle relazioni (2) *e* (3), *esprime le condizioni necessarie e sufficienti perché* F *ammetta* S_3^{1234} *come* S_3 *di Blaschke.*

3. Posto

$$d_1 = [z_u z_v z_{u^2} z_{v^2} \cdots z_{u^{r-2}} z_{v^{r-2}} z_{u^{r-1}} z_{v^r}],$$

$$e_1 = [z_u z_v z_{u^2} z_{v^2} \cdots z_{u^{r-2}} z_{v^{r-2}} z_{u^r} z_{v^{r-1}}],$$

$$f_1 = [z_u z_v z_{u^2} z_{v^2} \cdots z_{u^{r-2}} z_{v^{r-2}} z_{v^r} z_{u^r}],$$

dove i secondi membri sono determinanti analoghi ad a_1, b_1, c_1, si ha

$$\{\log a_1\}_u = (r-1) P + \frac{e_1}{a_1} ,$$

e, derivando ambo i membri rispetto a v, abbiamo

$$\{\log a_1\}_{uv} = (r-1)(P_v + Q_u) + PQ - \frac{a_1 f_1 + d_1 e_1}{a_1^2} .$$

Giacché, per delle note proprietà sui determinanti, risulta

$$a_1 f_1 + d_1 e_1 + b_1 c_1 = 0 ,$$

vale l'identità

$$\{\log a_1\}_{uv} = (r-1)(P_v + Q_u) + PQ + st .$$

Per la quale, la (3) può anche scriversi nella forma

$$ST + (r-1)(P_v + Q_u) + PQ - \{\log a_1\}_{uv} = 0 . \tag{4}$$

Se invece dell'iperpiano $z^0 = 0$ si considera un qualunque iperpiano di equazione $s_0 + \Sigma s_i z^i = 0$ (il cui primo membro denoteremo per brevità con σ), ed invece di S_3^{1234} si considera l'S_3 di equazioni $\sigma = z^5 = z^6 = \cdots = z^{2r+2} = 0$, qualora si ponga

$$U = \begin{vmatrix} z^5 & z_u^5 & z_v^5 & \cdots & z_{u^{r-1}}^5 & z_{v^{r-1}}^5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z^{2r+2} & z_u^{2r+2} & z_v^{2r+2} & \cdots & z_{u^{r-1}}^{2r+2} & z_{v^{r-1}}^{2r+2} \\ \sigma & \sigma_u & \sigma_v & \cdots & \sigma_{u^{r-1}} & \sigma_{v^{r-1}} \end{vmatrix} ,$$

la (4) diviene

$$ST + (r-1)(P_v + Q_u) + PQ - \{\log U\}_{uv} = 0 . \tag{5}$$

Se, ancora più in generale, si considera l'S_3 di equazioni $\sigma = \alpha^1 = \alpha^2 = \cdots = \alpha^{2r-2} = 0$ dove $\alpha^i = \alpha_0^i + \Sigma \alpha_j^i z^j$ $(i = 1, 2, \cdots, 2r-2)$, e poniamo

$$V = \begin{vmatrix} \alpha^1 & \alpha_u^1 & \alpha_v^1 & \cdots & \alpha_{u^{r-1}}^1 & \alpha_{v^{r-1}}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha^{2r-2} & \alpha_u^{2r-2} & \alpha_v^{2r-2} & \cdots & \alpha_{u^{r-1}}^{2r-2} & \alpha_{v^{r-1}}^{2r-2} \\ \sigma & \sigma_u & \sigma_v & \cdots & \sigma_{u^{r-1}} & \sigma_{v^{r-1}} \end{vmatrix} ,$$

la (4) diviene

$$ST + (r-1)(P_v + Q_u) + PQ - \{\log V\}_{uv} = 0 . \tag{6}$$

4. Allo scopo di ottenere un'applicazione di quanto trovato sul § 2, e per generalizzare un risultato trovato in [5], consideriamo le superficie rappresentate parametricamente da equazioni della forma

$$z^i = (h_i + u)^\lambda (h_i + v)^\mu \qquad (i = 1, 2, \cdots, 2r+2), \tag{7}$$

dove le h_i denotano costanti arbitrarie distinte e λ, μ costanti opportunamente scelte. Tali superficie sono intanto di tipo Φ, in quanto soddisfano all'equazione di Eulero

$$E(-\lambda, -\mu) = 0 ,$$

ossia all'equazione di Laplace (1) dove si assuma $P=\lambda/(u-v)$, $Q=\mu/(v-u)$. Chiamando W il determinante di Vandermonde delle h_i, e ponendo

$$D_{\lambda j} = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-j+1),$$

si trova

$$N = (-1)^{\binom{r+2}{2}} (u-v)^{(r+1)^2} W \prod_i \frac{z^i}{(h_i+u)^{r+1}(h_i+v)^{r+1}} \prod_j D_{\lambda j} D_{\mu j},$$

dove il primo prodotto va esteso ai valori $1, 2, \cdots, 2r+2$ di i ed il secondo ai valori $1, 2, \cdots, r+1$ di j. Analoghe espressioni si ottengono per a_1, b_1, c_1, H, K, A_{ijh}, B_{ijh}. La (3) così diventa

$$\lambda + \mu = 2r. \tag{8}$$

Pertanto, se λ e μ sono diversi da $0, 1, 2, \cdots, r$ e soddisfano alla (8), risultano soddisfatte tutte le condizioni di cui alla fine del § 2 e quindi *le superficie* (7) *ammettono come* S_3 *di Blaschke uno qualunque degli* $S_3 : z^0 = z^i = z^h = \cdots z^k = 0$, dove $i, h, \cdots, k$ è una qualsiasi combinazione di classe $2r-2$ dei numeri $1, 2, \cdots, 2r+2$.

BIBLIOGRAFIA.

[1] C. SEGRE, *Su una classe di superficie degli iperspazi legate colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine*, « Atti Acc. Sc. Torino », *42*, 559–591 (1907).

[2] E. BOMPIANI, *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero*, « Atti Acc. Sc. Torino », *48*, 393–410 (1913).

[3] W. BLASCHKE, *Sulla geometria proiettivo-differenziale delle superficie* V_2 *dello spazio* P_4, « Rend. Circ. Mat. Palermo » (2), *3*, 193–197 (1954).

[4] B. SEGRE, *Intorno ad un problema di Wilhelm Blaschke*, « Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg », *20*, 1/2, 28–40 (1955).

[5] O. SORACE, *Sulle superficie di* S_4 *aventi cinque iperpiani di Blaschke indipendenti*, « Rend. Acc. Lincei », serie VIII, vol. XX, fasc. 4, 452–456 (1956).

Meccanica. — *Il teorema dell'energia nella magneto–idrodinamica dei fluidi viscosi comprimibili.* Nota di GIOVANNI CARINI, presentata (*) dal Socio BRUNO FINZI.

1. In alcuni problemi della magneto–idrodinamica, vari Autori (1), allo scopo di studiare gli effetti dissipativi della viscosità del mezzo hanno fondato le loro ricerche sul sistema costituito dalle equazioni di Navier–Stokes e da quelle di Maxwell.

Generalmente gli effetti dissipativi sono dovuti alla resistenza elettrica ed alla viscosità del mezzo. Sia ν il coefficiente cinematico di viscosità ed $\eta = (4\pi\mu\sigma)^{-1}$ (dove σ e μ sono rispettivamente la conducibilità e la permeabilità del mezzo) il coefficiente di resistenza, che ha le medesime dimensioni di ν. L'effetto dissipativo della resistenza elettrica è molto più notevole di quello della viscosità, solo se $\eta \gg \nu$; ciò si verifica ad esempio nel mercurio, considerato nelle condizioni di laboratorio, dove (2) è $\eta/\nu = 6 \cdot 10^6$. In tali casi è legittimo trascurare l'effetto dissipativo della viscosità di fronte a quello della resistenza elettrica.

Ma, nei problemi in cui non è $\eta \gg \nu$, come si presume che sia per la materia esistente nello spazio interstellare (perché ad esempio per la materia solare (2) η/ν è dell'ordine di 10^3) conviene tener conto anche della viscosità del mezzo, ai fini della determinazione degli effetti dissipativi ad essa conseguenti.

Ora, non mi sembra fin qui, che per il suddetto sistema, che sta a fondamento della magneto–idrodinamica dei fluidi viscosi comprimibili, sia stata stabilita l'equazione dell'energia.

Lo scopo della presente Nota è la deduzione di tale equazione. Da essa si può desumere:

a) che accanto alla pressione p, di natura idrodinamica, che si trasmette attraverso il contorno ω della generica porzione τ del mezzo in moto, interviene la pressione $-(\mu/8\pi)\,H^2$, creata dalla forza di natura elettromagnetica $\mathbf{I} \wedge \mu\mathbf{H}$;

b) che durante il moto c'è dissipazione d'energia per effetto della viscosità del mezzo e per effetto Joule;

c) che detta dissipazione viene a mancare nel caso di un mezzo fluido perfettamente conduttore che si muove rigidamente.

(*) Nella seduta del 13 dicembre 1958.

(1) S. CHANDRASEKHAR, « Proc. Roy. Soc. A. », 293–309 (1953); « Proc. Camb. Phil. Soc. », *51*, 162–178 (1955); R. HIDE, « Proc. Camb. Phil. Soc. », *51*, 179–201 (1955); « Proc. Roy. Soc. A. », *233*, 376–396 (1955); T. G. COWLING, *Magneto–hydrodynamics*, London, Interscience Publishers L.T.D. (1957); R. NARDINI, « Boll. Un. Mat. It. », n. 3, 349–362 (1955).

(2) T. G. COWLING, op. cit., p. 38.

L'estensione al caso in cui il fenomeno si considera retto dalle equazioni di Navier-Stokes e da quelle di Minkowski sarà fatta in un lavoro successivo.

2. Le equazioni della magneto-idrodinamica nel caso di un fluido comprimibile, viscoso, conduttore, mobile in un campo magnetico, come già abbiamo detto, sono le ordinarie equazioni di Maxwell (in cui, di solito, si trascura la corrente di spostamento) e le equazioni idrodinamiche di Navier-Stokes, modificate in modo da render conto dell'interazione fra moto e campo magnetico. Esse sono dunque:

$$(I)\qquad \begin{cases} \operatorname{rot}\mathbf{H} = 4\pi\mathbf{I} \qquad \operatorname{div}\mathbf{I} = 0 \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\mu\dfrac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} \qquad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0 \\ \mathbf{I} = \sigma(\mathbf{E} + \boldsymbol{v}\wedge\mu\mathbf{H}) \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}) = 0 \\ \rho\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \rho\mathbf{F} - \operatorname{grad}p + \dfrac{\mu_1}{3}\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \mu_1\Delta\boldsymbol{v} + \mathbf{I}\wedge\mu\mathbf{H}\,, \end{cases}$$

dove $\mathbf{H}$ è l'intensità magnetica del campo, $\mathbf{E}$ l'intensità elettrica, $\mathbf{I}$ la densità di corrente elettrica, σ la conducibilità, ρ la densità del fluido, μ la permeabilità magnetica, $\mathbf{F}$ la forza non elettromagnetica agente sul fluido, p la pressione, $\boldsymbol{v}$ la velocità della generica particella P, μ_1 il coefficiente di viscosità.

Per stabilire il teorema dell'energia, consideriamo una porzione τ del fluido nel generico istante t. Nel tempuscolo dt il punto P di τ avrà subìto, in generale, lo spostamento $d\mathrm{P} = \boldsymbol{v}\,dt$.

Moltiplichiamo scalarmente per $d\mathrm{P}$ ambo i membri dell'ultima delle (I) ed integriamo in τ. Si ottiene

$$(1)\qquad \int_\tau \rho\boldsymbol{a}\cdot d\mathrm{P}\,d\tau = \int_\tau \rho\mathbf{F}\cdot d\mathrm{P}\,d\tau + \int_\tau \boldsymbol{\varkappa}\cdot d\mathrm{P}\,d\tau + dt\int_\tau \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{I}\wedge\mu\mathbf{H}\,d\tau\,,$$

dove abbiamo posto

$$(2)\qquad \boldsymbol{\varkappa} = -\operatorname{grad}p + \frac{\mu_1}{3}\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \mu_1\Delta\boldsymbol{v} =$$

$$= -\operatorname{grad}p + \frac{4}{3}\mu_1\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{v} - \mu_1\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}\,.$$

3. Servendosi della formula che dà la derivata sostanziale di una grandezza (riportata a τ)

$$(3)\qquad \frac{d}{dt}\int_\tau f(\mathrm{P}\,,t)\,d\tau = \int_\tau \left(\frac{df}{dt} + f\operatorname{div}\boldsymbol{v}\right)d\tau\,,$$

e dell'equazione di continuità (I_6), si vede che il primo membro della (1) è il differenziale della forza viva $T = \frac{1}{2}\int_\tau \rho v^2 \, d\tau$ della porzione τ, cioè

$$(4) \qquad dT = \int_\tau \rho \boldsymbol{a} \cdot d\mathrm{P} \, d\tau .$$

Il primo termine del secondo membro della (1) è il lavoro elementare delle forze di massa

$$(5) \qquad d\mathcal{L}^{(m)} = \int_\tau \rho \mathbf{F} \cdot d\mathrm{P} \, d\tau .$$

Mentre, com'è noto [3], il secondo termine del secondo membro della (1) si può esprimere nella forma

$$(6) \qquad \int_\tau \boldsymbol{\varkappa} \cdot d\mathrm{P} \, d\tau = d\mathcal{L}^{(i)} + dt \int_\omega \left[\left(p + \frac{2}{3} \mu_1 \operatorname{div} \boldsymbol{v} \right) v_n + \mu_1 \left(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v} \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{v} - \frac{\partial v^2}{\partial n} \right) \right] d\omega$$

essendo

$$(7) \qquad d\mathcal{L}^{(i)} = \int_\tau \Sigma_{kl} \, \Phi_{kl} \, d\gamma_{kl} = dt \int_\tau \Big\{ p \operatorname{div} \boldsymbol{v} - \mu_1 \left[(\operatorname{rot} \boldsymbol{v})^2 + \frac{4}{3} (\operatorname{div} \boldsymbol{v})^2 \right] -$$

$$- 2 \, \mu_1 \operatorname{div} \left[(\boldsymbol{v} \operatorname{grad}) \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \operatorname{div} \boldsymbol{v} \right] \Big\} d\tau .$$

Nella (7), le Φ_{kl} sono le componenti del tensore degli sforzi, le γ_{kl} sono le componenti del tensore di deformazione.

4. Per interpretare l'ultimo termine del secondo membro della (1), notiamo che per le (I_1) e (I_5) si ha

$$\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{I} \wedge \mu \mathbf{H} = - \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{v} \wedge \mu \mathbf{H} = - \mathbf{I} \cdot \left(\frac{\mathbf{I}}{\sigma} - \mathbf{E} \right) = - \frac{\mathrm{I}^2}{\sigma} + \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} .$$

Tenendo presente l'espressione del vettore di Poynting $\mathbf{S} = (1/4\pi) \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}$, e la formula

$$\operatorname{div} (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B} ,$$

si può anche scrivere:

$$\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{I} \wedge \mu \mathbf{H} = - \frac{\mathrm{I}^2}{\sigma} - \operatorname{div} \mathbf{S} - \frac{\mu \mathbf{H}}{4\pi} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} .$$

Per integrazione di quest'ultima in τ si ottiene

$$\int_\tau \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{I} \wedge \mu \mathbf{H} \, d\tau = - \int_\tau \frac{\mathrm{I}^2}{\sigma} \, d\tau + \int_\omega \mathrm{S}_n \, d\omega - \frac{\mu}{4\pi} \int_\tau \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \, d\tau .$$

(3) H. Lamb, *Hydrodynamics*, 1932, Dover Publ., New York.

Essendo $W = \frac{\mu}{8}\int_\tau H^2 d\tau$ l'energia magnetica della porzione τ all'istante t, per la (3) si ha

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\mu}{8\pi}\int_\tau \left[\frac{dH^2}{dt} + H^2 \operatorname{div} \boldsymbol{v}\right] d\tau = \frac{\mu}{4\pi}\int_\tau \mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\, d\tau + \frac{\mu}{8\pi}\int_\tau \operatorname{div}(H^2\,\boldsymbol{v})\, d\tau ,$$

da cui segue

$$\frac{\mu}{4\pi}\int_\tau \mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\, d\tau = \frac{dW}{dt} + \frac{\mu}{8\pi}\int_\omega H^2 v_n\, d\omega .$$

In conseguenza si può scrivere:

$$(8)\qquad \int_\tau \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{I}\wedge\mu\mathbf{H}\, d\tau = -\int_\tau \frac{I^2}{\sigma}\, d\tau + \int_\omega S_n\, d\omega - \frac{dW}{dt} - \frac{\mu}{8\pi}\int_\omega H^2 v_n\, d\omega .$$

5. Se si indica con $dQ = dt\int_\tau \frac{I^2}{\sigma}\, d\tau$ l'energia elettromagnetica che si trasforma in calore Joule, la (1), per le (4), (5), (6) e (8), si può scrivere nella seguente forma

$$(9)\qquad d(T + W) = d\mathfrak{L}^{(m)} + d\mathfrak{L}^{(i)} +$$

$$+ dt\int_\omega \left[S_n + \left(p - \frac{\mu}{8\pi}H^2 + \frac{2}{3}\mu_1 \operatorname{div}\boldsymbol{v}\right) v_n + \mu_1\left(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\wedge\operatorname{rot}\boldsymbol{v} - \frac{\partial v^2}{\partial n}\right)\right] d\omega - dQ .$$

La (9) esprime, dal punto di vista lagrangiano o sostanziale, il teorema dell'energia nel caso più generale di un fluido viscoso, comprimibile, conduttore, mobile in un campo magnetico qualunque. Dalla (9) si deduce che, accanto alla pressone p di natura idrodinamica, che si trasmette attraverso ω, *interviene la pressione* $-(\mu/8\pi)H^2$, *creata dalla forza magneto-idrodinamica* $\mathbf{I}\wedge\mu\mathbf{H}$.

Inoltre, se si tiene presente l'espressione di $d\mathfrak{L}^{(i)}$, la (9) mostra ancora che durante il moto si ha dissipazione di energia per effetto della viscosità del mezzo (termini contenenti μ_1) e per effetto Joule (trasformazione di energia elettromagnetica in calore Joule).

Se le γ_{kl} sono nulle, il mezzo fluido si muove rigidamente; in tal caso c'è dissipazione d'energia (magneto-idrodinamica) soltanto per effetto Joule.

Concludiamo pertanto che la dissipazione d'energia viene a mancare solo nei mezzi fluidi perfettamente conduttori ($\sigma \to \infty$), che si muovono rigidamente.

Astronomia. — *Autres corrections appliquées à la loi de Hubble* (*). Nota II di VICTOR VÂLCOVICI, presentata (**) dal Socio B. FINZI.

En nous occupant dans une première Note (1) de la loi de Hubble concernant la récession des nébuleuses extragalactiques nous avons trouvé que la forme qu'elle acquiert en supposant que les vitesses se soumettent à la règle relativiste de composition dans un espace de Minkowski est susceptible d'enrayer la discordance d'avec les observations. C'est ce que nous avons appelé « la première correction » apportée à la loi de Hubble. Grâce à elle non seulement qu'on évite les vitesses dépassant celle de la lumière, qui autrement correspondraient aux nébuleuses lointaines en vertu de la loi de Hubble, mais on est aussi en état de rendre compte, en quelque sorte, de la non-linéarité signalée par Hubble quant à la relation (z, r).

En vertu de cette correction la formule connue

$$v = Hr \tag{1}$$

qui lie la vitesse de récession (radiale) v à la distance r de la nébuleuse, H signifiant la constante de Hubble, sera remplacée par la suivante

$$v(r) = c \operatorname{tgh} x, \tag{2}$$

où nous avons mis

$$x = r/r_0 \quad , \quad r_0 = c/H, \tag{3}$$

c représentant la vitesse de la lumière. La liaison correspondante entre la distance r et le redshift z,

$$z = \Delta\lambda/\lambda_0 \quad , \quad \Delta\lambda = \lambda - \lambda_0, \tag{4}$$

λ_0 étant la longueur d'onde propre de la source et λ la longueur d'onde de la vibration telle qu'elle est perçue sur la Terre, sera donnée par

$$z + 1 = e^x \tag{5}$$

ou bien

$$\sigma = e^x, \tag{6}$$

en notant

$$z + 1 = \sigma (= \lambda/\lambda_0). \tag{7}$$

(*) Lavoro eseguito nell'Institut de mathématiques de l'Académie roumaine.

(**) Nella seduta dell'8 novembre 1958.

(1) Voir « Rend. Acc. Lincei », s. VIII, vol. XXIV, pp. 294–300 (1958). On y trouvera aussi la Bibliographie correspondante.

UNE SECONDE CORRECTION (DE POSITION).

Dans la présente Note nous nous proposons de soumettre la loi de Hubble à une seconde correction, à savoir celle que l'on devrait lui apporter si l'on tenait compte du déplacement de la nébuleuse pendant l'intervalle de temps mis par l'émission pour atteindre l'observateur terrestre. Avec cette seconde correction la distance r, donnée par la formule (5), devra être remplacée par une autre, ρ, supérieure à r, représentant la distance à laquelle se trouve la nébuleuse au moment où l'on reçoit sur la Terre la radiation émise. La répartition spatiale des nébuleuses à un moment donné sera donc définie par les distances ρ; on aura de cette manière la vraie « carte du monde » (« world map »), tandis que les distances r ne peuvent donner qu'une apparente « image du monde » (« world picture »).

Nous nous proposons en premier lieu de déterminer la distance ρ qui correspond à un redshift z observé. A cet effet il suffira de trouver la relation entre les distances r et ρ des points P et $\bar{P}$ respectivement, appartenant à la droite $OP\bar{P}$,

$$r = \text{dist. OP} \quad , \quad \rho = \text{dist. O}\bar{\text{P}} \, ,$$

la distance $P\bar{P}$ étant parcourue par la nébuleuse pendant l'intervalle de temps t_1 que le rayon émis en P prend pour décrire le trajet PO, c'est-à-dire, pour arriver à l'observateur terrestre,

$$t_1 = r/c = x/\mathrm{H} \, . \tag{8}$$

Soit Q une position quelconque située entre P et $\bar{P}$, où la nébuleuse se trouverait au moment t, en supposant qu'elle passe par P au moment $t = 0$. La vitesse v_Q que la nébuleuse considérée aurait au point Q serait, conformément à la formule (2), donnée par

$$v_Q = c \operatorname{tgh} \frac{r + \bar{r}}{r_0} \quad , \quad \bar{r} = \text{dist. PQ} \, . \tag{9}$$

On aura donc

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = c \operatorname{tgh} \frac{r + \bar{r}}{r_0} \, , \tag{10}$$

d'où, moyennant une intégration, on obtiendra

$$\log \operatorname{sh} \frac{r + \bar{r}}{r_0} = \mathrm{H}t + \text{const.} \tag{11}$$

La constante qui apparait à droite par suite de cette intégration, se détermine en faisant correspondre la valeur $r = 0$ à $t = 0$. La relation trouvée devient ainsi

$$\log \operatorname{sh} \frac{r + \bar{r}}{r_0} = \mathrm{H}t + \log \operatorname{sh} x \, . \tag{12}$$

Appliquée au point $\bar{P}$, c'est-à-dire, en faisant ci-dessus $t = t_1$ $(= r/c)$ et $\bar{r} = \rho - r$, on obtient

$$\operatorname{sh} \xi = e^x \operatorname{sh} x \, , \tag{13}$$

ou bien

$$\text{sh}\,\xi = \tfrac{1}{2}(e^{2x} - 1), \tag{14}$$

avec la notation

$$\xi = \rho/r_0.$$

La liaison entre le redshift z reçu en O, d'une part, et la distance ρ de la nébuleuse au moment de l'arrivée de la radiation en O, d'autre part, sera obtenue en éliminant x entre (13) et (5); elle sera donc

$$\text{sh}\,\xi = \tfrac{1}{2}(\sigma^2 - 1) \quad , \quad \sigma = z + 1, \tag{15}$$

ce qui équivaut à

$$\rho = r_0 \log\left(\varkappa + \sqrt{\varkappa^2 + 1}\right) \tag{16}$$

si l'on note $\varkappa$ l'espression

$$\varkappa = \tfrac{1}{2}(\sigma^2 - 1). \tag{17}$$

On tire de (16) ayant égard à (6)

$$\rho - r = r_0 \log\left[\left(\varkappa + \sqrt{\varkappa^2 + 1}\right)/\sigma\right]. \tag{18}$$

La vitesse de récession v de la nébuleuse située au point $\overline{P}$ sera donnée, évidemment, par la même formule (2); on aura donc

$$v(\rho) = c\,\text{tgh}\,\xi \quad , \quad \xi = \rho/r_0. \tag{19}$$

On déduit de (18) que la différence $\rho - r$ est une fonction de σ positive et monotone croissante pour $\sigma \geq 1$.

Cette conclusion nous permet de dire que la répartition des nébuleuses dans la « carte du monde » déterminée par les distances ρ ainsi corrigées présente une *densité inférieure* à celle de l'« image du monde » déterminée par les distances r. E. Hubble et R. C. Tolman [2] ont établi d'autre part que les observations astronomiques dénotent une *augmentation* de la densité de répartition des nébuleuses avec la distance. Il s'agit donc ici de deux effets de sens contraire. Il est très peu probable que ces deux effets s'annulent réciproquement – ce qui conduirait à la conclusion que l'explication de l'effet signalé par E. Hubble et R. Tolman serait la « dilatation » $r \to \rho$ donnée par les formules (6) et (16) – néanmoins, le sens contraire de deux effets pourrait être une indication de la direction dans laquelle on devrait essayer une solution de la difficulté signalée par E. Hubble et R. Tolman.

Afin d'obtenir une idée plus concrète de la « dilatation » du monde des nébuleuses par suite de cette seconde correction nous avons calculé les valeurs numériques contenues dans le tableau suivant:

(2) E. Hubble et R.C. Tolman, « Ap. J. », *32*, 302 (1935); Edwin Hubble, *Obs. Approach to Cosmology*, Oxford 1937.

Tableau de valeurs numériques.

z	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,7	0,9	1	1,5	2	3,0
$x\,(=r/r_0)$ formule (5)	0,095	0,182	0,262	0,336	0,405	0,531	0,641	0,693	0,916	1,099	1,386
$\xi\,(=\rho/r_0)$ formule (16)	0,104	0,216	0,339	0,463	0,590	0,842	1,082	1,194	1,703	2,095	2,716
$\xi - x$	0,009	0,034	0,077	0,127	0,185	0,311	0,441	0,501	0,787	0,996	1,330

Les quantités x et ξ représentent les distances mesurées avec r_0 comme unité de mesure,

(20) $$r_0 = c/\mathrm{H}\,,$$

dont la valeur numérique est égale à

$$1{,}86 \times 10^9 \text{ a.l.} \qquad \text{ou} \quad \text{à} \quad 5{,}433 \times 10^9 \text{ a.l.}$$

suivant que l'on prend pour H la valeur

(21) $$\mathrm{H}' = \frac{526 \text{ Km/s}}{10^6\, pc} \qquad \text{ou} \quad \mathrm{H}'' = \frac{180 \text{ Km/s}}{10^6\, pc}\,.$$

On voit que cette seconde correction conduit à une augmentation de x, qui, presque insignifiante pour de petites valeurs de z (jusqu'à $z = 0{,}2$), devient très grande (presque) 100 %) pour des valeurs comme $z = 2$ ou $z = 3$. Il est vrai que l'on est encore très loin d'avoir réussi à faire des observations donnant des redshifts de l'ordre de grandeur de $z = 2$ ou $z = 3$: on est plutôt limité aux valeurs de z ne dépassant pas 0,2. Aussi a-t-on négligé, en général, dans les calculs cette seconde correction. Pourtant quelque petits que soient ses résultats dans le domaine exploré par l'Astronomie actuelle, elle pourrait avoir une influence sensible, comme on a vu, dans le calcul de la répartition spatiale des nébuleuses; elle serait en état aussi d'expliquer l'aglomération des galaxies à de grandes distances, phénomène trouvé comme déconcertant par quelques savants, notamment par E. Hubble.

EXAMEN CRITIQUE DES HYPOTHÈSES. TROISIÈME CORRECTION.

Revenons sur la question qui termine notre première Note: n'est-il pas exagéré que d'attribuer à la loi de Hubble le rôle d'une loi universelle qui puisse décider de la structure même du monde entier ?

La loi linéaire de Hubble est, sans aucun doute, une découverte d'une importance capitale. Sa validité dans une région très étendue du cosmos lui assure une place d'honneur parmi les conquêtes scientifiques des derniers temps. Néanmoins, on ne peut pas fermer les yeux devant ses défauts.

D'abord, cette loi, dans sa forme originelle, nous oblige à admettre des vitesses exorbitantes, dépassant même la vitesse de la lumière, pour le mouvement de récession des nébuleuses lointaines. Il est vrai que la correction relativiste en supprime les vitesses dépassant celle de la lumière; restent tout de même des vitesses approchant d'une manière inquiétante de cette limite superieure (300.000 km/s) pour les nébulesuses très lointaines.

Un autre défaut de cette loi est, évidemment, sa tendance de vider de matière l'espace de notre voisinage, en envoyant les galaxies aux confins du cosmos.

On est ainsi conduit à considerér la loi linéaire comme étant seulement l'expression approximative, locale, d'une loi bien plus générale, ayant un caractère global. Une pareille attitude impliquerait, bien entendu, l'abandon de quelques hypothèses, auxquelles on est habitué de soumettre les nouvelles conceptions globales – notamment aux trois hypothèses suivantes, qui dans les derniers temps avaient acquis l'importance des « principes »:

1° la loi linéaire de Hubble;

2° la répartition spatiale homogène des nébuleuses;

3° le principe cosmologique.

Ces « principes » ne sont guère invulnérables; aucun d'entre eux ne s'impose comme une nécessité. Etendus aux problèmes globaux d'espace–temps ils font plutôt l'effet d'entraves dans la voie du raisonnement vers la solution.

Délivré de ces hypothèses on pourrait substituer à la loi linéaire de Hubble une autre plus générale, $v = v(\rho, \theta, \varphi, t)$ en désignant par ρ, θ, φ les coordonnées polaires de la nébuleuse considérée. Quant à la *répartition* spatiale des nébuleuses, on pourrait la représenter au moyen d'une fonction $D(\rho, \theta, \varphi, t)$, la *densité*. Il est évident que de cette manière, le principe de la répartition uniforme ainsi que le principe cosmologique serainet enfreints. Mais rappelons–nous que ces deux principes doivent leur existence à la préoccupation d'éviter autant que possible une position cosmique privilégiée de notre galaxie – le repère de toute la cinématique du monde; or ce nouveau point de vue, global, bâti sur les fonctions générales $v(\rho, \theta, \varphi, t)$ et $D(\rho; \theta, \varphi, t)$, aurait comme conséquence de créer des situations analogues pour tous les points de l'espace considérés comme repères.

Cela constituerait une *troisième correction*, qui est bien plus radicale que les deux premières.

Nous avons admis l'hypothèse d'un espace–temps de Minkowski comme modèle d'univers. C'est un modèle statique [3], il est vrai, mais il n'est pas en contradiction avec le mouvement préconisé par la loi de Hubble, car on peut considérer les galaxies comme des *points* ayant des masses négligeables;

(3) Voir l'analyse faite par Mr. A. LICHNEROWICZ dans [16].

de sorte que leur présence n'influenceraient pas la métrique du modèle d'univers; d'ailleurs, la courbure qui en résulterait effectivement serait également négligeable, ayant égard à la modicité de la densité moyenne matérielle.

Quant à l'équation d'Enstein,

$$R_{ij} - \frac{1}{2}(R + \Lambda) g_{ij} = \chi T_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, 3, 4,$$

elle est, au niveau de cette approximation, identiquement satisfaite, étant donné que l'on peu prendre la constante cosmologique, Λ, égale à zéro, et que le tenseur T_{ij} d'impulsion–énergie est nul (densité nulle) ainsi que le tenseur de Ricci, R_{ij}, (courbure nulle), donc le scalaire $R\,(= R_i^i)$ aussi.

Il s'ensuit que l'espace–temps de Minkowski pourrait fournir une bonne description de la réalité, si l'on excluait les événements à très grande échelle.

Grâce à cette forme adoptée pour l'espace–temps on aura facilement les interprétations physiques en termes de temps et d'espace.

Repartition des nébuleuses dans l'espace.

Nous supposerons que chaque galaxie est représentée par un point (son centre des masses) et que toutes les galaxies constituent un ensemble discret de points dans l'univers, les points d'accumulation étant situés à l'infini. Nous pouvons donc supposer que les galaxies à distances finies sont situées sur les surfaces des sphères concentriques $(\rho_1), (\rho_2), (\rho_3), \cdots$ ayant les rayons $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \cdots$ respectivement et le centre commun au centre O de la Terre; nous ferons abstraction de la galaxie de l'origine O. Soit $N_i\,(\geq 1)$ le nombre fini des galaxies situées sur la surface de la sphère $(\rho_i)\,(i \in 1, 2, 3, \cdots)$. Le nombre N des galaxies situées à l'intérieur et sur la surface de la sphère (ρ) de rayon ρ et de centre O pourrait être représentée par la fonction $N(\rho)$,

$$N = N(\rho),$$

avec

$$(22) \qquad N(\rho) = \begin{cases} N_1 + N_2 + \cdots + N_n & \text{pour } \rho_1 \leq \rho < \rho_{n+1}, \\ 0 & \text{pour } 0 \leq \rho < \rho_1, \end{cases}$$

$$n \in 1, 2, \cdots,$$

les points de discontinuité étant déterminés pas $\rho = \rho_i\,(i \in 1, 2, \cdots, n)$. Cette fonction est évidemment sommable, même au sens de Riemann, dans chaque intervalle fini de $\rho\,(<\infty)$.

Définissons encore la densité $D(\tau)$ par la relation

$$(23) \qquad D(\tau) = \begin{cases} \dfrac{N(\rho_n) - N(\rho_{n-1})}{\tau_n - \tau_{n-1}} & \text{pour } \tau_{n-1} < \tau \leq \tau_n, \\ 0 & \text{pour } \tau = 0 \end{cases}$$

$$n \in 1, 2, \cdots, \quad \tau_0 = 0, \quad \rho_0 = 0,$$

en désignant par τ_i le volume de la sphère (ρ_i) $(i \in 0, 1, 2, \cdots)$ et par τ le volume de la sphère (ρ). La fonction $D(\tau)$ sera également discontinue et localement intégrable.

On aura en outre

$$N(\rho) = \int_0^{\tau_n} D(\tau)\, d\tau, \tag{24}$$

si l'on désigne par ρ_n le plus grand rayon qui satisfasse à la relation $\rho_n \leq \rho$; c'est ce que l'on voit immédiatement en décomposant l'intervalle d'intégration $[0, \tau_n]$ moyennant les points $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n$.

Les fonctions discontinues $N(\rho)$ et $D(\tau)$ sont régulières par morceaux et peuvent être représentées par des sommes d'un nombre fini de fonctions de Heaviside; donc elles peuvent être conçues comme des *distributions* (en particulier, des *mesures*) au sens de L. Schwartz [4]. Par conséquent, on pourra leur appliquer les opérations de dérivation et d'intégration comme si elles étaient des fonctions continues et dérivables. Moyennant une extension assez facile à faire [5] on pourra passer de la distribution $D(\tau)$ – ou $D(\rho)$ – à la distribution $D(\rho, \theta, \varphi, t)$ dans l'espace euclidien à trois dimensions, ρ, θ, φ désignant les coordonnées polaires du point considéré dans cet espace.

On pourrait, en effet, imaginer que les N galaxies: contenues à l'intérieur et sur la surface de la sphère (ρ) de rayon fini ρ sont distribuées d'une manière quelconque sur des plans azimutaux $\varphi = \text{const}$ ou bien sur des cônes $\theta = \text{const}$. En répétant le procédé employé pour la variable ρ on obtiendra des distributions analogues quant aux variables φ et θ, pour représenter le nombre N de galaxies.

Le temps t peut être regardé comme un paramètre à variation continue.

De cette manière nous aurons le droit de traiter la distribution $D(\rho, \theta, \varphi, t)$ comme une fonction dérivable dans toute la sphère (ρ). Cela signifie que la distribution D pourra être assimilée à la densité locale d'un fluide.

Nous nous proposons de poursuivre cette idée dans une troisième Note.

Bibliographie.

[16] A. Lichnerowicz, *Théories relativistes de la Gravitation et de l'Electro-magnétisme*, Masson, Paris 1955.
[17] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, I, II, Hermann (Paris 1950, 1951).
[18] I. Halperin, *Introduction to the theory of distributions*, Toronto 1952.
[19] J. Korevaar, « Indagationes Math. », XVII, pp. 368, 379, 483, 494, 663 (1955).
[20] T. Yamanaka, « Comentarii matematici Univers. S. Pauli », V, pp. 129–136 (1956).
[21] J. Mikusinski et R. Sikorski, « Rezprawy Mathematyczne », XII, Warsawa 1957.

(4) Voir [17], [18], [19], [21].
(5) Voir aussi [18] et [20].

Astrofisica. — *Una nuova asimmetria est–ovest dell'attività solare.* Nota di Giovanni Godoli, presentata (*) dal Corrisp. G. Righini.

1. Introduzione. – Alcuni fenomeni solari mostrano una asimmetria est–ovest: tutto avviene come se la metà est del disco solare fosse più attiva della metà ovest. Essendo questa divisione in due metà definita rispetto alla Terra, si pone la questione delle influenze terrestri nella produzione dell'asimmetria. Influenze che non dipendono da fattori puramente geometrici vanno considerate con la massima cautela.

L'asimmetria può essere determinata (1):

1° dal numero di apparizioni e sparizioni dei singoli fenomeni;

2° dal numero di fenomeni;

3° dalla durata dei fenomeni;

4° dalla area, intensità od altre grandezze caratteristiche dei fenomeni.

La prima asimmetria messa in evidenza è stata quella del numero di apparizioni delle macchie. Fu A. D. S. Maunder che nel 1907 mostrò come il numero di apparizioni delle macchie andava decrescendo da est ad ovest mentre quello delle sparizioni andava aumentando (2). Questo fenomeno, assai cospicuo, è stato confermato da tutte le ricerche ulteriori. Una seconda asimmetria, sempre relativa alle macchie, è la preponderanza ad est del numero di gruppi di macchie (3). L. Pajdušáková–Mrkosová ha mostrato (4) poi come le evoluzioni ascendenti siano più numerose nella metà est del disco e quelle discendenti nella metà ovest: come è noto si indica come evoluzione ascendente il passaggio da un tipo inferiore A , B , ··· ad un tipo superiore E , F, ··· ed evoluzione discendente il passaggio inverso.

Recentemente è stato messo in evidenza da F. Link e J. Kleczeck (5,6) l'asimmetria dei brillamenti.

Sulle altre asimmetrie (area delle macchie, numero ed area delle protuberanze e dei filamenti, radianza della corona, bursts nella regione metrica dello spettro) gli Autori sono meno concordi ed i risultati meno convincenti.

(*) Nella seduta del 13 dicembre 1958.

(1) F. Link, *Asymétrie Est–Ouest de l'activité solaire*, « Relations entre les phénomènes solaires et terrestres », *8*, 35 (1954).

(2) A. D. S. Maunder, *An apparent influence of the Earth on the numbers and areas of Sunspots in the cycle 1889–1901*, « MN », *67*, 451 (1907).

(3) G. H. A. Archenhold, *Some problems concerning the distribution of Sunspots over the Sun's disc*, « MN », *100*, 645 (1940).

(4) L. Pajdušáková–Mrkosová, *Distribution des types de taches sur le disque solaire*, « Bull. Astr. Inst. Czechoslov. », *4*, 176 (1953).

(5) F. Link, J. Kleczek, *L'asymétrie de distribution des éruptions chromosphériques*, « Comptes Rendus », Paris, *227*, 827 (1948).

(6) F. Link, J. Kleczek, *Influences planétaires sur le Soleil IV*, « Bull. Astr. Inst. Czecoslov. », *1*, 69 (1949).

Indicando con G_e e G_w i valori della grandezza studiata G relativi rispettivamente alla metà est ed ovest del disco solare, si definisce asimmetria relativa α il rapporto

$$\alpha = 100 \frac{G_e - G_w}{G_e + G_w}.$$

Nella presente Nota si espongono i risultati ottenuti nello studio dell'asimmetria del numero e dell'area dei flocculi in radiazione K, secondo le osservazioni eseguite alla torre solare di Arcetri nel 1957.

2. Realtà statistica di una asimmetria nel numero dei fenomeni. – Indichiamo con N_e ed N_w il numero dei fenomeni osservati rispettivamente nella metà est ed ovest del disco solare. Il rapporto

$$\chi = 2 \frac{N_e - N_w}{\sqrt{N_e + N_w}} = \alpha \frac{\sqrt{N_e + N_w}}{50}$$

dà con l'ausilio della seguente tabella

χ	1.645	1.960	2.676	3.290	3.891
p	10	5	1	0,1	0,01 %
p'	90	95	99	99,9	99,99

la probabilità p dell'ipotesi $N_e = N_w$ e la probabilità p' dell'ipotesi $N_e \neq N_w$ [7].

Se giudichiamo sufficiente una probabilità del 9999/10000 per accettare l'ipotesi $N_e \neq N_w$ si può calcolare l'asimmetria minima α_0 necessaria:

$$\alpha_0 = \frac{195}{\sqrt{N_e + N_w}}.$$

3. Dati sperimentali. – Dall'inizio del 1957 l'attività dei flocculi in radiazione K viene seguita all'osservatorio astrofisico di Arcetri non soltanto, come per il passato, attraverso la determinazione del numero caratteristico che permette di stimare giornalmente l'attività globale dei flocculi, ma anche rilevando area e posizione dei singoli fenomeni [8].

Il materiale spettroeliografico utilizzato viene raccolto alla torre solare di Arcetri come parte del programma di osservazione giornaliera della cromosfera solare. La descrizione completa dello spettroeliografo, del metodo seguito per l'esecuzione degli spettroeliogrammi e del programma giorna-

(7) F. Link, D. Mášková, *Asymétries solaires*, « Bull. Astr. Inst. Czechoslov. », *3*, 85 (1952).

(8) G. Godoli, M. P. Strocchi, *Attività dei flocculi d'idrogeno e di calcio e dei filamenti d'idrogeno per il periodo 1° luglio 1956–30 giugno 1957*, « Boll. di Geodesia e Scienze Affini », *16*, 622 (1957).

liero di osservazione della cromosfera solare è stata effettuata altrove [9]. Basti qui ricordare che la *banda passante* del monocromatore risulta essere di circa 0,3 A, per cui gli spettroeliogrammi in K eseguiti alla torre solare di Arcetri si riferiscono alla componente K_3 ed alle parti centrali delle componenti K_2.

Per quanto riguarda il metodo di riduzione degli spettroeliogrammi, ampiamente descritto in altra sede [10], ricordiamo qui che di ogni fenomeno osservato giornalmente viene determinata l'*area proiettata* A_p; l'*area vera* A_c, corretta dal raccorciamento prospettico secondo la relazione

$$A_c = A_p \sec h$$

ove h è l'angolo centro disco–centro Sole–baricentro geometrico del fenomeno; la latitudine eliografica e longitudine dal meridiano centrale del baricentro geometrico del fenomeno.

I dati così raccolti vengono riportati, per la elaborazione, su schede perforate I.B.M., una scheda per ogni fenomeno (schede/fenomeno).

Il materiale relativo al 1957 già raccolto, ridotto e schedato, ha permesso la ricerca di una eventuale asimmetria del numero e dell'area proiettata e corretta dei flocculi in $K_{2,3,2}$.

4. RISULTATI CONSEGUITI. – Nella seguente tabella sono riportati, separatamente per la metà est ed ovest del disco solare, il numero di flocculi osservati ad Arcetri durante il 1957; la media annuale dell'area proiettata $\bar{A}_p$ e corretta $\bar{A}_c$ coperta giornalmente e la media annuale dell'area proiettata $\bar{a}_p$ e corretta $\bar{a}_c$ dei singoli fenomeni. Le aree proiettate sono espresse in decimillesimi del disco solare; quelle corrette in decimillesimi dell'emisfero.

La considerazione dei parametri α, χ, α_o, relativi all'asimmetria est–ovest del numero dei flocculi mostra che l'ipotesi $N_e = N_w$ può essere accettata con una probabilità molto superiore al 9999/10000.

Si tratta quindi di una nuova asimmetria che, almeno in base al materiale a nostra disposizione, risulta essere fra le più cospicue.

	E	W	α	χ	α_o
N	1248	1124	5,2	5,1	4,0
$\bar{A}_p$	264	249	2,9		
$\bar{A}_c$	211	199	2,9		
$\bar{a}_p$	33	35	— 2,9		
$\bar{a}_c$	27	28	— 1,8		

(9) G. RIGHINI, G. GODOLI, *Riduzione del materiale spettroeliografico raccolto alla torre solare di Arcetri nel periodo 1932–1949*, «Mem. SAIt», *21*, 333 (1950).

(10) G. GODOLI, *Area e posizione dei flocculi di calcio durante il 1957 secondo le osservazioni eseguite alla torre solare di Arcetri*, «Mem. SAIt», *29* (1958).

L'area proiettata e corretta coperta giornalmente dai flocculi mostra una minor asimmetria in accordo con la piccola, opposta asimmetria dell'area dei singoli fenomeni.

Prima di riesaminare, alla luce del nuovo risultato, le teorie proposte per la spiegazione delle asimmetrie solari, crediamo opportuno attendere i dati di almeno un altro anno, soprattutto per poter avere sufficiente materiale per uno studio più dettagliato della variazione della nuova asimmetria trovata con la longitudine.

Astrofisica. — *L'ipotesi solare ed i risultati delle osservazioni effettuate mediante i tests chimici nell'ambito dell'Anno Geofisico Internazionale* (*). Nota di GIORGIO PICCARDI, presentata (**) dal Corrisp. G. RIGHINI.

L'ipotesi solare, di cui a varie Note precedenti (1), prevedeva una dissimmetria N–S nelle condizioni generali della Terra. Per comodità di chi legge ricorderò i fatti seguenti:

Durante il marzo, la Terra, percorrendo la sua orbita elicoidale nella Galassia, si muove nel piano equatoriale. Poiché anche il Sole si trova a marzo nel piano equatoriale, le condizioni dei due emisferi risultano perfettamente simmetriche.

Oltrepassato il breve tratto in cui questa simmetria si verifica, la Terra, continuando a percorrere la sua orbita elicoidale nella Galassia, si sposta col polo nord sempre più in avanti, fino a che, in settembre, l'angolo formato dalla velocità della Terra e dalla direzione del polo nord diventa minimo: 28° 30′, secondo i calcoli effettuati nell'Istituto di Meccanica razionale della nostra Università, dal dott. Quilghini (2). È questo il momento in cui le condizioni dei due emisferi appaiono le più dissimmetriche, nonostante che il Sole si trovi di nuovo nel piano equatoriale. Mentre l'emisfero nord va ad urtare contro tutto ciò che la Terra incontra nel suo cammino, e lo addensa su di sé (gas e polveri interstellari, meteoriti) l'emisfero sud resta al riparo nella scia della Terra. Può darsi peraltro che vi siano fatti molto più importanti da considerare (3).

Dal settembre al marzo successivo, la Terra, sempre continuando a percorrere la sua orbita elicoidale, si sposta col polo nord sempre meno in avanti, fino a che in marzo, ritorna a muoversi nel piano equatoriale.

Era assai importante da un punto di vista generale il verificare se i fatti ora accennati portavano effetti osservabili alla superficie terrestre. I tests chimici sarebbero stati molto adatti per una verifica del genere, dato le loro relazioni, da tempo statisticamente accertate, con fenomeni molto lontani quali quelli solari.

L'Anno Geofisico Internazionale mi offerse, nell'ambito dell'attività di alcuni Comitati esteri, l'occasione propizia. Debbo in particolare al *Service Météorologique de la Colonie, Congo belge et Ruanda Urundi*, alla *Météoro-*

(*) Lavoro effettuato nell'Istituto di Chimica fisica dell'Università di Firenze.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1958.

(1) G. PICCARDI, questi « Rendiconti », vol. XXI, pp. 84–86 (1956), vol. XXIII, pp. 419–421 (1957); vol. XXIV, pp. 427–429 (1958).

(2) D. QUILGHINI, Comunicazione privata.

(3) A. GIÃO, questi « Rendiconti », vol. XXV, pp. 1–6 (1958).

logie Nationale francese e quindi al *Service Météorologique du Gabon* (Africa equatoriale francese), al *Service Météorologique du Madagascar, des Comores et de la Réunion*, le ricerche chimiche effettuate all'equatore e nell'emisfero sud. Debbo all'*Institut d'Electrochimie et Métallurgie de l'Université Libre de Bruxelles* ed all'*Observatoire Royal de Belgique* le ricerche effettuate ad Uccle, presso Bruxelles. Debbo al *Astronomisches Institut der Universitaet Tuebingen* le ricerche effettuate a Tuebingen e sul Jungfraujoch. Purtroppo, queste ultime hanno subìto una interruzione proprio al momento in cui entrava in funzione la nostra stazione alle isole Kerguelen. I risultati precedentemente conseguiti non sono utilizzabili ai fini di cui alla presente Nota.

Le ricerche delle stazioni italiane: Trieste (Istituto Sperimentale Talassografico, Osservatorio Geofisico), Genova (Istituto di Geodesia e Geofisica dell'Università), Castellana Grotte (Bari) (Istituto di Fisica dell'Università di Bari) riguardano soltanto il test P e non possono pertanto essere collegate colle altre.

Per la presente indagine considererò soltanto i risultati raccolti dalle stazioni che hanno effettuato ininterrottamente, o quasi ininterrottamente, le ricerche chimiche coi tests F e D. Sono queste: Uccle–Bruxelles, Firenze, Libreville (Africa equatoriale francese), Leopoldville (Congo belga), Fort Dauphin (Madagascar) e Isole Kerguelen. La stazione delle Kerguelen è entrata in funzione con molto ritardo a causa di un grave incidente accaduto durante il trasporto dei materiali, cosicché io posso effettuare un confronto completo fra i risultati conseguiti nelle varie stazioni soltanto per 6 mesi: maggio, giugno, luglio, agosto, settembre ed ottobre 1958. Si tratta di un complesso di circa 1800 esperienze chimiche per ogni test e per ogni stazione.

Presento i risultati offerti dal test F, che più degli altri si presta ad essere ripetuto in condizioni sperimentali perfettamente identiche. Ma anche i risultati del test D presentano lo stesso comportamento generale, cosicché io dispongo di un'altra serie di 1800 esperienze a convalida della prima.

TABELLA I.

	Latitudine (arrotondata)	Media generale di sei mesi	Media del solo settembre
Bruxelles	51° N	54,4	55,0
Firenze	43° N	49,6	52,7
Libreville	0°	43,1	51,6
Leopoldville	4° S	48,3	49,3
Fort Dauphin	25° S	29,4	28,7
Kerguelen	50° S	15,2	10,4

La dissimmetria nella risposta dei test chimici appare evidentissima e non soltanto dai dati del settembre, al massimo della dissimmetria delle condizioni della Terra, ma anche dalla media generale sui dati di sei mesi.

La risposta del test F presenta all'equatore un valore medio; procedendo verso il polo nord aumenta di poco; procedendo verso il polo sud diminuisce fortemente toccando al 50° lat. sud valori bassissimi.

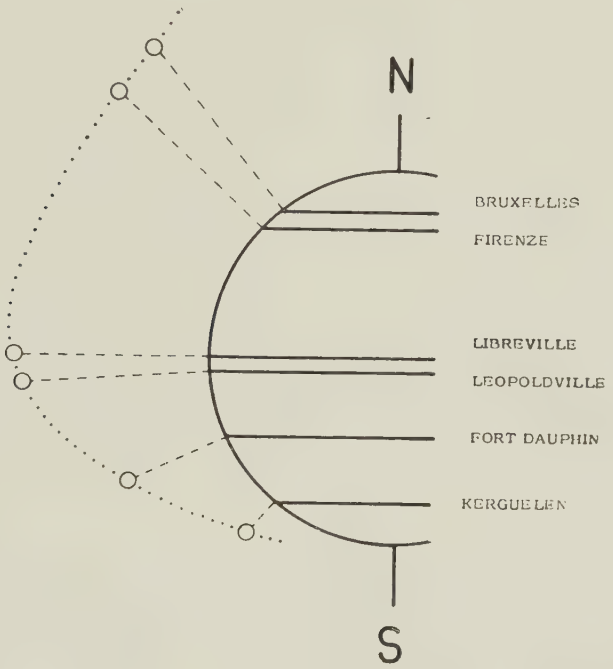


Fig. 1. – Risposta del test F a varie latitudini. Settembre 1958, medie mensili.
I valori delle medie sono riportati radialmente a partire dalla circonferenza che rappresenta la superfice terrestre.

L'ipotesi solare inquadra dunque molto bene, dopo averli previsti, i risultati sperimentali fin'ora registrati in occasione dell'AGI. La si può dunque considerare una buona ipotesi di lavoro.

Le ricerche coi tests chimici proseguiranno anche ad AGI ultimato in alcune delle attuali stazioni. Altre stazioni verranno impiantate. Una di queste funzionerà a Breid–Bay, a cura del *Centre National pour la Campagne Antarctique 1957–58–59–60* belga e dell'*Institut d'Electrochimie et Métallurgie de l'Université Libre de Bruxelles*, che ha offerto alla spedizione, insieme al mio Istituto, collaborazione ed aiuto per l'organizzazione delle ricerche chimiche.

Chimica. — *Alcune considerazioni sulla validità del modello elettrostatico nello studio dei complessi* (*). Nota di CLAUDIO FURLANI, presentata (**) dal Socio V. CAGLIOTI.

La teoria elettrostatica dei complessi [1], derivata dalla teoria del campo cristallino di Bethe [2], è ormai universalmente accettata quale strumento valido per l'interpretazione qualitativa della situazione elettronica degli ioni centrali, non solo dei complessi puramente elettrostatici, ma anche di quelli nei quali il legame di coordinazione ha una discreta percentuale di carattere omopolare; tra l'altro, essa ha al suo attivo l'interpretazione sistematica pressoché completa degli spettri di assorbimento dei complessi dei metalli di transizione del I periodo. Minor fiducia viene invece in genere accordata alla possibilità di ottenere da essa previsioni quantitative assolute (per esempio valori numerici dell'energia dei livelli elettronici, rispettivamente delle distanze tra i termini spettroscopici), benché la teoria elettrostatica nella sua veste attuale sia conformata in modo da poter fornire anche tali previsioni quantitative. Probabilmente la ragione prima di tale sfiducia sta nel fatto che le energie della perturbazione dovuta al campo dei leganti, se calcolate in base ad un modello elettrostatico semplificato, risultano di solito in accordo molto tenue con i dati sperimentali dedotti dagli spettri di assorbimento, e ciò è a sua volta dovuto al fatto che esse sono funzioni rapidamente variabili di certi parametri i cui valori sono spesso noti solo in modo assai approssimativo. Tale situazione ha portato a diverse conseguenze: in base ad essa taluni Autori [3] negano semplicemente la possibilità di ottenere previsioni assolute dalla teoria elettrostatica, altri [4], assumento una posizione nettamente diversa e forse contraddittoria, vedono nell'insufficienza delle previsioni ottenute in base al modello elettrostatico una prova che la vera natura del legame di coordinazione nei casi esaminati non è puramente elettrostatica, o in altre parole giudicano tale insufficienza come evidenza per la presenza di legami parzialmente covalenti; altri infine [5], senza pronunciarsi esplicitamente in merito alla questione, deducono il valore caratteristico dell'energia di perturbazione Δ dai dati sperimentali e se ne servono per trasformare la teoria elettrostatica in un metodo semiempirico. Del resto anche coloro che dichiaratamente tentano di ottenere da essa previsioni assolute [6] sono spesso costretti ad introdurre valori « effettivi » di alcuni parametri per poter ottenere risultati in buon accordo coi dati sperimentali.

Essendo dunque la situazione attuale a questo riguardo né chiara né soddisfacente, mi sembra opportuna una messa a punto sul reale significato

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale e Inorganica all'Università di Trieste.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1958.

e sulle possibilità della teoria elettrostatica dei complessi; in quanto segue cercherò di dimostrare come, lasciando impregiudicata la questione se la struttura reale dei complessi ai quali questa teoria si applica sia in realtà elettrostatica o no, almeno per quei complessi per i quali un modello elettrostatico rappresenta ancora una approssimazione ragionevole si possano sistematicamente ottenere previsioni quantitative assolute e soddisfacenti di valori di energia, solo che si migliori il modello consueto con qualche accorgimento e che si tenga presente qualche considerazione sulla sua validità.

Il modello elettrostatico generalmente adottato per descrivere un complesso di un metallo di transizione rappresenta lo ione metallico centrale come un nucleo puntiforme di carica effettiva $z = z_0 - \sigma$ (z_0 = numero atomico del metallo) circondato dai soli elettroni di valenza dello strato *nd*, ed i leganti come masse puntiformi dotate, se il legante è un anione, di una carica negativa eguale alla valenza stechiometrica, oppure, se il legante è una molecola neutra, di un momento dipolare μ. Allora tutte le interazioni pensabili tra ione centrale e leganti sono di natura elettrostatica, e, se consideriamo quale punto di partenza la situazione elettronica dello ione centrale supposto libero e non perturbato (situazione descrivibile in termini quantomeccanici), la struttura reale del complesso si potrà considerare come il risultato della sovrapposizione allo stato di partenza della perturbazione dovuta alle interazioni ione centrale–leganti il cui operatore è

$$\Sigma_{i,j} \cdot \frac{e_i e_j}{r_{ij}} .$$

La previsione quantitativa delle energie avviene quindi in base al normale calcolo di perturbazione; secondo il metodo di Hartmann [7] l'operatore $1/r_{ij}$ si sviluppa in serie di armoniche di superficie attorno alle distanze di equilibrio R, e l'energia di perturbazione risulta espressa da combinazioni lineari di certi integrali G (n) e H (n) $\left(\mathrm{G}(n) = \int_0^\infty \mathrm{R}^2(r)\, r_<^n\, r_>^{-n-1}\, r^2\, dr\,;\right.$ $\left.\mathrm{H}(n) = \frac{d}{d(f\,\mathrm{R})}\mathrm{G}(n)\right.$ [1]$\left.\right)$. Ora, i valori numerici di G (n), H (n) e delle loro combinazioni sono funzioni di tre parametri μ, R e $f = z/n$, i cui valori effettivi raramente sono noti con precisione. Il suggerimento originario di Hartmann era di prendere per μ il valore del momento dipolare permanente della molecola di legante libera (gassosa o in soluzione diluita), per R la distanza tra i nuclei dello ione centrale e del più vicino atomo legante (sempreché tale distanza sia in qualche modo nota), e per f il valore dello ione libero supposto gassoso (per esempio calcolato con la regola approssimata di Slater [8] o dedotto dai termini spettroscopici noti dagli spettri di emissione). Questi criteri di scelta costituiscono un ragionevole punto di partenza, ma non sono ancora del tutto soddisfacenti; è noto a chiunque si sia occupato di

(1) R (r) rappresenta la parte radiale degli orbitali *nd*.

calcoli secondo la teoria elettrostatica che seguendo rigorosamente questi criteri si ottengono valori di energie di perturbazione sistematicamente troppo bassi, ed è per ovviare a questo inconveniente che di solito si ricorre al palliativo di usare valori « effettivi » (in realtà più o meno arbitrari) di detti parametri. Più in generale i punti deboli o criticabili del modello elettrostatico ora descritto possono venir così riassunti:

1° artificiosità ed eccessiva semplificazione nella rappresentazione dei leganti come cariche o dipoli puntiformi; non solo si fa con ciò violenza alla realtà fisica supponendo concentrate in un punto solo delle masse e delle cariche che in realtà occupano un'estensione nello spazio tutt'altro che trascurabile, ma secondo Bostrup e Jørgensen [9] l'effetto della perturbazione dovuta ad un sistema di cariche estese nello spazio risulterebbe molto maggiore (addirittura di un ordine di grandezza superiore) dell'effetto della somma delle stesse cariche, concentrata nel loro baricentro; conclusione pessimistica, quest'ultima, che io non ho potuto però confermare;

2° la tendenza, già citata, a fornire valori di energia di perturbazione troppo bassi rispetto ai valori sperimentali, o addirittura di segno sbagliato [10];

3° impossibilità pratica o di principio di lasciar prevedere o interpretare certi effetti e certe regolarità riscontrate nelle caratteristiche degli spettri di assorbimento dei complessi; ciò vale soprattutto per la serie spettrochimica (leganti ordinati secondo valori crescenti di Δ) e per l'effetto nefelauxetico (diminuizione delle distanze tra i termini spettroscopici nei complessi), per spiegare la cui origine non sembra siano state finora proposte interpretazioni basate sul modello elettrostatico.

Per discutere insieme i punti 1° e 2° ho provato a calcolare, secondo il metodo di Hartmann [1], le energie di perturbazione elettrostatica per un ipotetico complesso MeX_4 (tetragonale piano; Me = ione di un metallo di transizione con un solo elettrone $3d$) considerando i leganti sia come cariche o dipoli puntiformi sia come sistemi di cariche più estesi nello spazio.

Nella Tabella I i vari metodi scelti di considerare ciascun legante sono i seguenti: *a*) carica puntiforme — 1 a distanza R = 3,80 u. at. = 2,01 Å; *b*) carica totale — 1 suddivisa in 6 cariche — 1/6 poste ai vertici dell'ottaedro iscritto in una sfera di raggio 0,8 u. at. = 0,42 Å e centro situato a R = 3,80 u. at.; *c*) carica totale — 1 suddivisa in 14 aliquote poste ai vertici di un triacisottaedro iscritto nella sfera di cui sopra; *d*) carica totale — 8 suddivisa in 14 aliquote poste ai vertici di un triacisottaedro come sopra, più un nucleo centrale di carica + 7 (questa rappresentazione vale per il caso in cui il legante sia un alogenione, nel quale caso le otto cariche negative rappresenterebbero gli otto elettroni $(ns)^2$ $(np)^6$ dello strato di valenza dell'alogeno); *e*) dipolo puntiforme con $\mu = 1$ u. at. posto a distanza 3,80 u. at. dal metallo; *f*) lo stesso dipolo, rappresentato da due cariche unitarie poste ad 1 u. at. di distanza tra di loro con centro a 3,80 u. at. dal metallo; *g*) ancora lo stesso dipolo, rappresentato da due cariche $\pm$ 1/2 e, poste a 2 u. at. l'una dall'altra. Nella tabella sono dati due valori calcolati di energia; il primo corrisponde alla sola attrazione tra le cariche dello ione metallico e dei

leganti, ed è un termine che di solito si trascura negli studi spettroscopici, in quanto causa uno spostamento di tutti i livelli energetici parallelamente a sè stessi; il secondo termine esprime la differenza di energia corrispondente alla più alta delle tre transizioni spettroscopiche nel visibile U. V. ($E_g \rightarrow B_{1g}$, D_{4h}) previste per un complesso tetragonale piano a struttura $3d^1$. Per la carica effettiva del nucleo dello ione metallico ho scelto il valore $f = 2{,}0$.

TABELLA I.

Valori calcolati di energie di perturbazione dovuta al campo dei leganti (MeX_4, $3d^1$) [2] *(energie in unità atomiche).*

	caso *a)*	*b)*	*c)*	*d)*	*e)*	*f)*	*g)*
$32/45\, f\, G(0)$	1,0519	1,0494	1,0489	1,0281	0,2753	0,2790	0,2915
$8/45\, f\left(\frac{8}{7} G(2) + \frac{10}{21} G(4)\right)$	0,08320	0,08760	0,08557	0,10216	0,06837	0,07141	0,08120

N. B. – Nel caso *e)* $G(n)$ si deve intendere sostituito con $-\mu f H(n)$.

Dai dati esposti nella tabella si può trarre la conclusione, certamente generalizzabile, che i valori di energia previsti considerando i leganti non come cariche o dipoli puntiformi, ma come sistemi di cariche estesi nello spazio, risultano sempre più alti, ovvero che i valori calcolati in base al modello dei leganti puntiformi devono considerarsi approssimati per difetto; ciò costituisce una spiegazione teorica delle discrepanze con i dati sperimentali. Alle stesse conclusioni si può arrivare tenendo presente che il potenziale generato da un sistema di cariche si può esprimere con uno sviluppo in serie di multipoli; nel modello più semplice dei leganti puntiformi noi ci limitiamo al primo termine significativo di tale sviluppo, ma basterebbe probabilmente aggiungere l'effetto dovuto al momento di quadrupolo dello ione o molecola legante (di cui un valore almeno approssimato dovrebbe essere calcolabile senza soverchia difficoltà) per avere una rappresentazione praticamente completa della situazione. Ad ogni modo la correzione per l'estensione spaziale delle cariche non è poi molto forte, come risulta anche dalla Tabella, e non credo possa mai giungere neppure a raddoppiare i valori calcolati in base al modello puntiforme. Noto infine che le energie corrette risultano eguali alle energie che si calcolerebbero in base al modello puntiforme se in tale calcolo si ammettesse per R un valore un po' inferiore alla distanza tra i nuclei del metallo e dell'atomo legante, o, per i leganti dipo-

(2) Per il calcolo delle espressioni analitiche delle energie di perturbazione vedi ad esempio H. HARTMMANN e H. FISCHER-WASELS, «Z. Phys. Chem.», N. F. *4*, 20 (1955).

lari, un valore di R più vicino alla distanza tra lo ione centrale e l'estremità negativa del dipolo che alla distanza tra ione centrale e centro del dipolo; si giustificherebbe così in certo modo anche l'uso di valori « effettivi » delle distanze interatomiche nei complessi.

Un discorso a parte richiederebbe l'argomento dei momenti dipolari indotti; i leganti, siano essi anioni o molecole neutre, possiedono in genere una discreta polarizzabilità, e quando essi sono coordinati allo ione centrale, e quindi sottoposti al suo campo elettrico, si genera in essi un momento dipolare indotto, che può contribuire notevolmente al campo dei leganti; io credo che il contributo del momento dipolare indotto all'energia della perturbazione elettrostatica sullo ione centrale possa giungere ad essere anche tale da raddoppiare, nel caso di leganti dipoli, l'effetto dovuto al momento permanente. Sfortunatamente la polarizzabilità di uno ione o di una molecola neutra in un campo non omogeneo non è né misurabile direttamente, né calcolabile con facilità; siamo dunque in presenza di un contributo che probabilmente è importante, ma che non sappiamo come calcolare esattamente. Tale fatto pregiudica certamente per ora la possibilità di ottenere previsioni quantitative esatte di energie dovute al campo dei leganti, ma la sua causa non è dovuta ad inadeguatezza della teoria elettrostatica dei complessi, bensì ad insufficienza delle nostre attuali cognizioni in un campo collaterale, e ripropone anzi la necessità di risolvere tale problema collaterale coi mezzi di ricerca ad esso pertinenti.

Il punto più importante di questa discussione riguarda la scelta del valore della carica effettiva f del nucleo dello ione metallico centrale; qui l'originario criterio proposto da Hartmann [7], cioè di prendere per f il valore caratteristico dello ione libero, calcolato con la regola di Slater o dedotto dagli spettri di emissione, è certamente inadeguato e bisognoso di revisione. È da ricordare che la regola di Slater (i cui risultati coincidono di solito discretamente coi valori di f dedotti tramite la spettroscopia di emissione) compendia i risultati della minimizzazione rispetto ad f dell'energia elettronica degli atomi o ioni metallici gassosi. Nel caso di accoppiamento Russell–Saunders, cioè trascurando le interazioni spin–orbita, l'operatore hamiltoniano degli elettroni si suole scindere in due parti: la prima, $-1/2\,\Sigma_i \nabla_i - -\Sigma_i (z-\sigma)/r_i$, è separabile e vi corrisponde l'energia $-\Sigma_i\, 1/2\, f^2$; la seconda, $-\Sigma_i (\sigma/r_i) + \Sigma_{i,j} (1/r_{ij})$, costituisce operatore di perturbazione e fornisce l'energia dei termini spettroscopici, espressa attraverso integrali I, F_k e G_k, che sono tutti funzioni lineari o quadratiche di f; il valore di f per l'atomo o ione esaminato è quello che rende minima la somma di tali energie, calcolata per lo stato base. Ora, se anziché di uno ione libero e gassoso si tratta di uno ione complessato, è logico che per f si abbia un nuovo valore, e precisamente ancora quello che rende minima l'energia dello stato base, ma tenendo conto ai fini del processo di minimizzazione anche dell'energia di perturbazione dovuta al campo dei leganti, la quale si esprime attraverso integrali $G(n)$ o $H(n)$, ed è quindi pur essa una funzione (sebbene di forma più complicata) di f.

Descrivo qui a titolo di esempio l'applicazione di questo nuovo criterio al caso di un complesso del Cr^{3+}. Per lo ione Cr^{3+} libero (stato fondamentale ^4F) l'energia elettronica è data (trascurando il contributo delle orbite sature) da $3F_0 - 15F_2 - 72F_4 - (3/2)f^2 - \sigma f = +0{,}7149f + (3/2)f^2 - z_0 f$; la condizione di minimo è data dall'equazione $0{,}7149 - z_0 + 3f = 0$, donde $f = 1{,}762$ (secondo la regola di Slater $f = 1{,}766$). Per un complesso $[Cr A_6]^{\equiv}$ (A = anione monovalente) l'energia elettronica totale diventa $-(3/2)f^2 - \sigma f + 3F_0 - 15F_2 - 72F_4 + (8/45)f[18G(0) - 2G(4)]$, e la condizione di minimo risulta quindi modificata in:

$$(1) \quad 3f - z_0 + 0{,}7149 + \frac{8}{45}[18G(0) - 2G(4)] - \frac{8}{45}fR[18H(0) - 2H(4)] = 0$$

che dà $f = 1{,}660$ assumendo $R = 3{,}60$ u. at. Ho ripetuto l'applicazione di questo procedimento a diversi altri complessi, anche di altri metalli; talvolta la determinazione del minimo di f si può fare risolvendo un'equazione del tipo della (1), talaltra è più comodo andare per tentativi o usare un procedimento di estrapolazione grafica, ma sempre ho ottenuto come risultato generale che il valore di f nei complessi elettrostatici è del 5–10 % minore che nei corrispondenti ioni metallici liberi e gassosi. Noto ancora che nei miei calcoli per la determinazione del minimo di f ho supposto R costante; in realtà R non è indipendente da f, ma è all'incirca inversamente proporzionale ad esso, e tenendo conto di questo fatto la diminuzione di f prevista risulterebbe percentualmente ancora maggiore.

Il fatto che il valore di f nei complessi sia sistematicamente inferiore al valore di f negli ioni liberi porta a due conseguenze: anzitutto, dato che i $G(n)$ e gli $H(n)$ sono funzioni decrescenti di f, le energie di perturbazione del campo dei leganti Δ risulteranno più grandi di quelle calcolate secondo il criterio primitivo di Hartmann, e quindi si avvicineranno ancora di più ai valori sperimentali deducibili dagli spettri di assorbimento dei complessi. In secondo luogo il valore degli integrali F_k e G_k, che sono funzioni lineari di f, risulterà diminuito, e di conseguenza anche le distanze tra i termini spettroscopici dello accoppiamento Russell–Saunders saranno minori nei complessi che non nei corrispondenti ioni liberi e gassosi; ora, questo non è altro che l'effetto nefelauxetico descritto dalla scuola danese [11]. Ne consegue dunque che, applicando il nuovo criterio per la determinazione di f, anche l'effetto nefelauxetico può venir almeno in parte spiegato in base ad un modello puramente elettrostatico. Vi sono naturalmente dei limiti a questa possibilità di interpretazione: così la diminuizione di f osservata sperimentalmente è spesso molto più grande di quel 5–10 % che ho prima menzionato, raggiungendo il 30, il 40 o finanche il 50 %; inoltre, dai miei calcoli risulterebbe che l'abbassamento percentuale di f è tanto maggiore, quanto più forte l'energia di perturbazione dovuta ai leganti; ossia la serie nefelauxetica dei leganti dovrebbe coincidere con la serie dei Δ crescenti. Ma per lo meno è solo al di fuori di queste limitazioni che io credo sia necessario invocare l'esistenza di legami coordinativi covalenti per spiegare l'effetto

nefelauxetico; negli altri casi tale effetto non è invece da ritenersi incompatibile con una struttura di tipo elettrostatico [3].

Confido che le considerazioni esposte in questa Nota possano contribuire a chiarire il significato e la validità della teoria elettrostatica nello studio dei complessi.

Bibliografia.

[1] H. Hartmann e coll., « Z. Phys. Chem. », *197*, 239 (1951); « Z. Naturf. », 6 *a*, 751 (1951); « Z. Phys. Chem. », N. F. *4*, 20 (1955); C. K. Jørgensen, C. J. Ballhausen e coll., « Kgl. Dansk. Videnskab. Selsk. Mat. Fys. Medd. », *29*, 8 (1955); « Acta Chem. Scand. », *8*, 175 (1954), *9*, 1362 (1955) e *10*, 887 (1956); J. H. Van Vleck, « J. Chem. Phys. », *3*, 803 (1935); L. E. Orgel, « J. Chem. Soc. », 4752 (1952); R. Schlapp e W. G. Penney, « Phys. Rev. », *42*, 666 (1932); Y. Tanabe e S. Sugano, « J. Phys. Soc. Japan », *9*, 753 (1954).

[2] H. Bethe, « Ann. Physik », *3*, 133 (1929).

[3] R. J. P. Williams, « J. Chem. Soc. », *8*, 1956; W. H. Kleiner, « J. Chem. Phys. », *20*, 1784 (1952).

[4] C. K. Jørgensen, « Acta Chem. Scand. », *11*, 53 (1957) e « Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. », *30*, 22 (1956).

[5] Vedi alcuni esempi di tale procedimento in C. K. Jørgensen, « Acta Chem. Scand. », *10*, 887 (1956).

[6] F. E. Ilse e H. Hartmann, « Z. Phys. Chem. », *197*, 239 (1951); H. Hartmann e H. H. Kruse, « Z. Phys. Chem. », N. F. *5*, 9 (1955); C. Furlani, ibid., *10*, 291 (1957).

[7] F. E. Ilse e H. Hartmann, loc. cit.; H. Hartmann e H. Fischer-Wasels, « Z. Phys. Chem. », N. F. *4*, 20 (1955).

[8] J. C. Slater, « Phys. Rev. », *36*, 57 (1930).

[9] O. Bostrup e C. K. Jørgensen, « Acta Chem. Scand. », *10*, 1501 (1956).

[10] W. H. Kleiner, « J. Chem. Phys. », *20*, 1784 (1952).

[11] C. E. Schäffer e C. K. Jørgensen, « Atti Conv. Int. Chim. Comp. Coord. », suppl. a « Ric. Sci. », *28*, 143 (1958).

(3) È comunque da notare che la distinzione tra legame elettrostatico e legame covalente è in questi casi alquanto artificiosa e più che corrispondere ad una realtà di fatto esprime una differenza nel linguaggio adoperato. In effetti non è possibile definire un limite netto tra i due tipi di legame: basti pensare che la diminuzione del valore di f negli ioni metallici complessati significa che la distanza media probabile degli elettroni d aumenta, quindi che la nube elettronica del metallo si avvicina di più ai leganti; si ha allora maggior probabilità di scambio coi sistemi elettronici dei leganti, e in definitiva una tendenza alla formazione di legami covalenti.

Chimica fisica. — *Cinetica d'adsorbimento di* O_2 *da parte di film monomolecolari di Co–disalicilaldeideetilendiimmina* (*). Nota di ENZO FERRONI e AUGUSTA FICALBI, presentata (**) dal Socio V. CAGLIOTI.

Com'è noto, Autori diversi (1) con differenti tecniche hanno studiato il meccanismo di adsorbimento reversibile dell'O_2 da parte di alcuni chelati del Co quale ad esempio Co–disalicilaldeideetilendiimmina (I). Tale meccanismo riveste singolare importanza sia per un maggiore contributo alla conoscenza di questi composti, sia per l'analogia col meccanismo presentato da altri noti chelati che soprassiedono alla respirazione nei processi vitali.

Visto che le diverse modificazioni cristalline di (I) presentano attività differenti nei confronti dell'adsorbimento dell'O_2 è verosimile pensare, come generalmente ritenuto, che per i differenti piani reticolari che definiscono tali modificazioni cristalline, sia da assegnarsi processi di attivazione differenti.

Anziché lavorare, come fin'ora fatto, su (I) allo stato cristallino, si è ritenuto opportuno studiare l'adsorbimento dell'O_2 da parte del chelato allo stato di film monomolecolare. I risultati di questa indagine sono già stati da noi riferiti (2). Qui riportiamo solo i risultati sperimentali utili a chiarimento di questa Nota:

(I), in atmosfera di N_2, dà luogo alla formazione di un film monomolecolare condensato (le molecole di (I) risultano coplanari alla superficie di supporto). Valore sperimentale dell'area per molecola: 86 Å^2; quello teorico: 87 Å^2.

2 (I)$\cdot$ IO_2, sempre in atmosfera di N_2, dà luogo a due tipi distinti di film monomolecolari condensati: ad uno compete un valore sperimentale dell'area per molecola di 138,5 Å^2, all'altro quello di 118,6 Å^2. Com'è noto, nella struttura di 2 (I)$\cdot$ IO_2, il legame O–O del O_2 è parallelo ai piani delle 2 molecole planari di (I). Se si pone l'origine di una terna cartesiana ortogonale nel baricentro della molecola O_2 e se x è la direzione O–O, è facile valutare le aree delle proiezioni sui piani xz e zy. Queste risultano rispettivamente 117,86 Å^2 e 138,06 Å^2.

Questi ed altri dati sperimentali resi noti, oltreché confermare la struttura dei chelati in esame, dimostrano esaurientemente l'adsorbimento dell'O_2 da parte di film di (I) nella sua completezza, a differenza di quanto si verifica nel processo a cui partecipa (I) in fase cristallina.

Si è ritenuto utile estendere la nostra ricerca e considerare la cinetica del processo di adsorbimento da parte di film di (I) in diverso stato di

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisica della Università di Firenze.

(**) Nella seduta dell'8 novembre 1958.

(1) A. E. MARTELL e M. CALVIN, *Chemistry of the metal chelate compounds*, pp. 226, 337, New York, Prentice–Hall Inc. (1952).

(2) Comunicazione presentata all'VIII Congresso Nazionale della Società chimica Italiana, Torino 1958.

aggregazione. Anche in questo caso si è usufruito dell'apparecchiatura già resa nota [3] per l'indagine sulla struttura dei film condensati e basata sulla registrazione ottica della diminuzione (operata da parte del film) dell'ampiezza dell'onda stazionaria generata in superficie da una lamina vibrante ad una opportuna frequenza. Com'è noto, l'ampiezza è minima quando il film monomolecolare è condensato.

Per quanto riguarda la preparazione della forma « attiva » di (1) si è usato il metodo cosidetto « diretto » [4]. I dati analitici relativi alla perdita in peso del piridinato e l'aumento in peso, in atmosfera di O_2, ci hanno di nuovo confermato l'idoneità di questo metodo.

Sia nelle soluzioni di spandimento (soluzioni benzeniche di (1)), sia nell'acqua distillata di supporto al film, è stato fatto gorgogliare N_2. Solo dopo l'evaporazione completa del solvente, a spandimento avvenuto, si è iniziato l'invio sul film di una corrente continua di O_2 a lento flusso e con appropriato angolo in modo da non modificare le caratteristiche formali dell'onda stazionaria. Il flusso di O_2 è mantenuto per tempi prestabiliti, quindi interrotto e sostituito con un flusso di N_2 sotto il quale si procede alla compressione del film e alla valutazione dell'area per molecola. Tutte le esperienze sono state condotte a 20° C.

Nella Tabella I si riportano i valori sperimentali dell'area per molecola in funzione del tempo di ossigenazione di film di (1) in diverso stato di aggregazione. L'area per molecola è riferita al composto iniziale (1). I valori riportati sono la media di 5 esperienze distinte e sono affetti da un errore massimo di $\pm$ 1 Å^2.

TABELLA I.

Valore iniziale dell'aerea per molecola	86 Å^2	113 Å^2	141 Å^2
Tempo di ossigenazione			
30''	78,2 Å^2	. . .	. . .
1'	69,8	85,8 Å^2	85,7 Å^2
2'	. . .	85,1	76,3
3'	69,4	74,3	73,4
4'	. . .	70,5	70,6
5'	69,4	69,6	69,5
8'	69,4	69,6	69,5

(3) E. FERRONI e J. DANTI, « Lo Sperimentale », *4*, 27 (1953).
(4) R. H. BAILES e M. CALVIN, « J. Am. Chem. Soc. », *69*, 1886 (1947).

Dai valori riportati si può rilevare:

Agendo su film di (1) a cui compete un'area iniziale di 113 Å² o di 141 Å², dopo 5' è raggiunta un'area (riferita a (1)) di 69,5 Å². Tale valore è inferiore all'area per molecola presentata da (1) allo stato di film condensato (86 Å² corrispondente ad una disposizione coplanare) ed è maggiore al valore di 53 Å² relativo all'area della sezione verticale maggiore (ipotetica disposizione verticale di (1)). D'altra parte l'esperienza ci dimostra che non è realizzabile un film monomolecolare condensato di (1) costituito da molecole disposte verticalmente alla superficie di supporto (com'è d'altra parte deducibile dalla idrofilia dei gruppi costituenti). La formazione di $2\,(1)\cdot 10_2$ è un fatto dimostrato. Se pertanto l'area per molecola, anziché riferita a (1) cioè al componente di partenza, si riferisce, più giustamente, a $2\,(1)\cdot 10_2$ cioè al prodotto finale, si trova, evidentemente, che al film monomolecolare condensato compete un'area per molecola di 139 Å². Tale valore è in ottimo accordo con quello di 138,5 Å² relativo all'area per molecola di $2\,(1)\cdot 10_2$ in film monomolecolare condensato.

Il soddisfacente accordo fra questi due valori ci suggerisce che in tali condizioni il processo di ossigenazione deve ritenersi completo.

Gli stessi motivi sono pur validi per quanto riguarda i valori relativi alla esperienza condotta agendo su un film a cui compete l'area per molecola di 86 Å², corrispondente, come si è visto, ad un film condensato di molecole di (1) coplanari alla superficie di supporto, però in questo caso l'area di 139 Å² (riferita a $2\,(1)\cdot 10_2$) è raggiunta solo dopo 1'.

Ci sembra utile sottolineare la differenza notevole che la cinetica di ossigenazione presenta, 1° a seconda che (1) sia in fase cristallina o allo stato di film, 2° a seconda dello stato di aggregazione del film. Più precisamente dai noti studi di M. Calvin e collaboratori [1], condotti sulla fase cristallina, emergono due fatti precisi: *a*) il processo non risulta completo, *b*) il massimo dell'ossigenazione è raggiunta almeno dopo 10'. Nel caso invece che (1) sia allo stato di film monomolecolare le nostre esperienze dimostrano: *a*) il processo risulta completo, *b*) tale completezza è raggiunta in soli 5' nel caso di film non condensati, e soltanto in 1' nel caso di film condensato.

La differenza nella cinetica di ossigenazione a seconda dello stato del film trova facile spiegazione in base al minore grado di libertà ed al più preciso ordinamento che le molecole di (1) hanno nel film condensato nonché all'inefficienza, ai fini del processo di ossigenazione, della partecipazione dell'acqua del supporto presente nei film non condensati.

Chimica fisica. — *Peso molecolare ed affinità d'interazione con solventi di frazioni di polipropilene atattico* (*). Nota di FERDINANDO DANUSSO, GIOVANNI MORAGLIO e VINCENZO GIANNELLA, presentata(**) dal Socio G. NATTA.

Lo studio chimico fisico di soluzioni diluite di un polimero ha particolare interesse, sia ai fini della conoscenza del suo comportamento termodinamico alla soluzione, sia perché è possibile, con una conveniente interpretazione teorica dei metodi, determinare proprietà configurazionali e strutturali delle sue macromolecole, dipendenti, ma in certi casi anche indipendenti, dallo stato di soluzione.

Tra i nuovi polimeri, resi disponibili da recenti scoperte nel campo della Chimica Macromolecolare (1), vi è il polipropilene atattico. È questo un alto polimero del propilene, con macromolecole a struttura lineare, testa–coda, non dotate di particolare ordinamento sterico degli atomi di carbonio terziari lungo la catena principale. Tale polimero si presenta in ogni caso amorfo, a differenza di polipropileni stereoisomerici, dotati di totale o parziale ordinamento sterico (isotattici ed a stereoblocchi (2)), che sono invece cristallini allo stato solido.

Dai frazionamenti di tre campioni di polipropilene atattico, descritti in particolare in altro lavoro (3), si era ottenuta una serie di frazioni, di peso molecolare ristretto, adatte ad uno studio di carattere quantitativo delle proprietà del polimero in soluzione.

In questa Nota riferiremo, con un certo dettaglio, sui risultati di misure osmotiche, effettuate con dette frazioni per la determinazione del loro peso molecolare e del valore del secondo coefficiente del viriale nei solventi impiegati, rappresentativo della deviazione delle soluzioni diluite dal comportamento ideale e quindi idoneo al calcolo dell'energia libera d'interazione polimero–solvente.

Tali determinazioni hanno notevole interesse in sé e sono indispensabili per indagini successive.

Le misure osmotiche sono state effettuate su soluzioni in benzolo o in toluolo, in parte con osmometri a doppia membrana del tipo Zimm–Myerson (4) ed in parte con osmometri del tipo semplificato di Breitenbach e Forster (5), da noi costruiti.

(*) Lavoro eseguito all'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta dell'8 novembre 1958.

(1) G. NATTA, « Atti Accad. Naz. Lincei », Mem. *8*, 4 (1955).

(2) G NATTA, F. DANUSSO, « Chimica e Industria », *40*, 743 (1958).

(3) F. DANUSSO, G. MORAGLIO, in corso di pubblicazione su « Istituto Lombardo (Rend. Sc.) » (1958).

(4) B. H. ZIMM, I. MYERSON, « J. Am. Chem. Soc. », *68*, 911 (1946).

(5) J. W. BREITENBACH, E. L. FORSTER, « Oesterr. Chem. Ztg. », *54*, 346 (1953).

Le membrane erano del tipo Ultracellafilter (della Membranfilter Gesell. Sartorius, Göttingen) con permeabilità « allerfeinst » per le frazioni M 82, M 83 ed M 922, « feinst » per la frazione M 62 e « fein » per le rimanenti. Le membrane venivano spesso cambiate, mediamente ogni tre misure, ed i risultati, per ogni frazione, erano ottenuti a concentrazioni diverse con almeno due osmometri diversi. Non si è mai osservata diffusione di polimero attraverso le membrane, neppure con le frazioni a peso molecolare più basso.

Le differenze di livello erano misurate con catetometro, con metodo statico. Gli osmometri, chiusi in provettoni col solvente, erano immersi, per le misure, in bagno termostatico a 30° C, con costanza di temperatura entro 0,01°.

Tabella I.

Pressioni osmotiche ridotte di soluzioni delle frazioni di polipropilene atattico a 30° C

(c in g/100 cm³; π/c in cm).

A – *Solvente: toluolo.*

M 422		M 62		M 82		M 922	
c	π/c	c	π/c	c	π/c	c	π/c
0,912	246	0,983	385	0,929	654	0,862	1244
0,589	177	0,619	301	0,693	606	0,751	1263
0,387	138	0,492	276	0,463	546	0,574	1201
0,216	108	0,244	224	0,203	493	0,341	1150
		0,238	220			0,216	1128

B – *Solvente: benzolo.*

N 3332		N 333		M 83	
c	π/c	c	π/c	c	π/c
0,851	183	0,865	182	0,851	653
0,574	155	0,437	139	0,660	628
0,438	140	0,211	118	0,429	597
0,278	124			0,200	565
0,217	115			0,200	563

I solventi sono stati preparati per rettifica, in colonna di Todd, di prodotti puri del commercio. Ad essi è stato aggiunto in ogni caso il 0,05 % di fenil–β–naftilammina, per proteggere il polimero da ogni eventuale causa di alterazione. Successive misure, tuttavia, hanno dimostrato che, qualora il polimero ed i solventi siano sufficientemente purificati, come era nel caso, tale precauzione non è indispensabile.

Nella Tabella I vi sono i dati sperimentali di pressione osmotica ridotta ottenuti con ognuna delle frazioni esaminate. Per ricavare con una certa precisione i dati che ci interessano (peso molecolare e secondo coefficiente

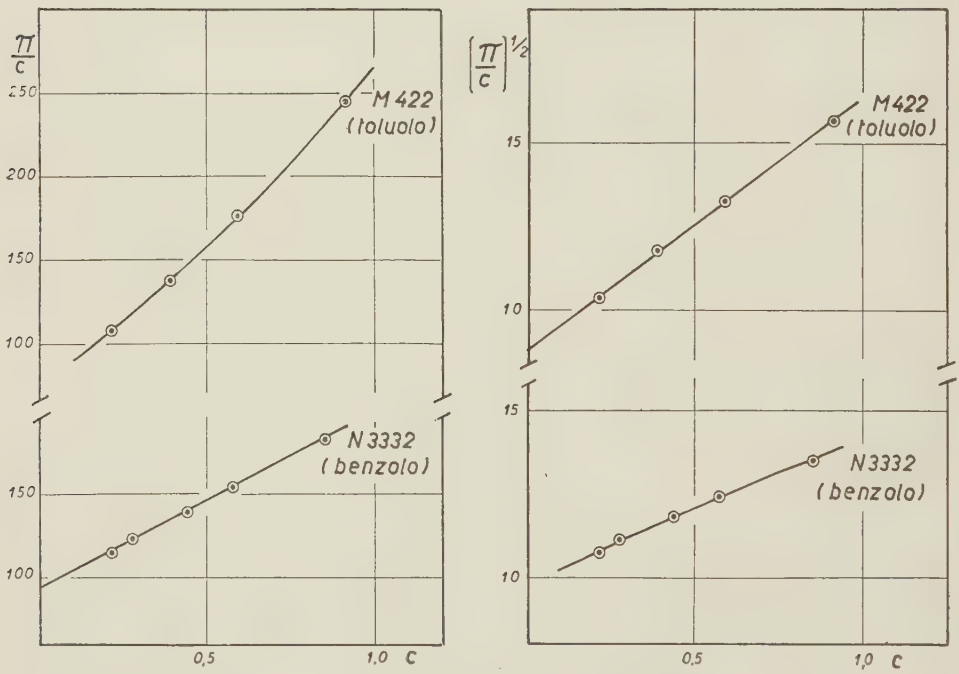


Fig. 1. – Analisi grafica dell'andamento della pressione osmotica ridotta (in cm) con la concentrazione (in g/100 cm³) per soluzioni di due frazioni di peso molecolare simile, rispettivamente in benzolo e in toluolo.

del viriale) è necessario individuare nel miglior modo possibile la legge di variazione della pressione osmotica ridotta π/c con la concentrazione c. Ciò almeno nel campo di concentrazioni da noi studiato, che è anche quello normalmente conveniente per le misure.

Per questo, si osservino nella fig. 1 i dati sperimentali relativi a due frazioni di peso molecolare simile, la M 422 in toluolo e la N 3332 in benzolo, riportati sia in diagramma (π/c)–c, sia in diagramma $(\pi/c)^{1/2}$–c. Risulta chiaro, e ciò si è dimostrato di validità generale per le nostre frazioni, che i dati delle soluzioni in toluolo (fraz. M 422) si dispongono secondo una retta sul diagramma $(\pi/c)^{1/2}$–c, mentre quelli delle soluzioni in benzolo (fraz. N. 3332) si allineano più distintamente secondo una retta nel diagramma (π/c)–c.

Nelle figg. 2 e 3 sono riportati tutti i dati della Tabella I sull'uno o sull'altro dei due tipi di diagrammi, nel primo quelli in toluolo e nel secondo quelli in benzolo.

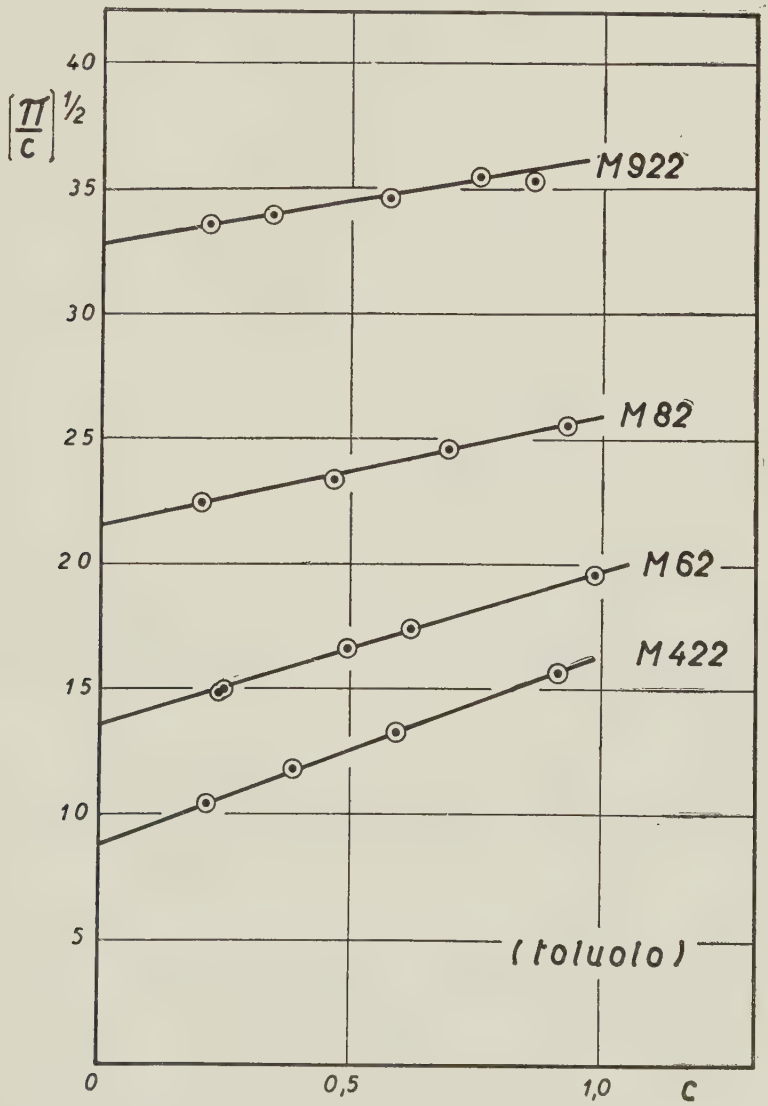


Fig. 2. – Relazione tra $(\pi/c)^{1/2}$ e concentrazione, per soluzioni di varie frazioni in toluolo (dati della Tabella I *A*).

La diagrammazione rettilinea, che così si ottiene per tutte le frazioni, permette, rispetto ad ogni altra, una migliore determinazione per via grafica delle grandezze che ci interessano, legate l'una all'intercetta con l'asse delle ordinate e l'altra alla pendenza della retta.

Sui fatti sperimentali ora osservati si possono fare le seguenti considerazioni teoriche.

La legge di variazione di π/c con c viene normalmente espressa con uno dei seguenti sviluppi in serie:

$$\frac{\pi}{c} = \frac{RT}{M} + Bc + Cc^2 + \cdots \tag{1}$$

$$\frac{\pi}{c} = RT\left(\frac{1}{M} + A_2 c + A_3 c^2 + \cdots\right) \tag{2}$$

$$\frac{\pi}{c} = \frac{RT}{M}(1 + \Gamma_2 c + \Gamma_3 c^2 + \cdots). \tag{3}$$

Tutte queste espressioni hanno naturalmente in comune il seguente valore limite, che indicheremo, come d'uso, con $(\pi/c)_0$:

$$\left(\frac{\pi}{c}\right)_0 = \lim_{c \to 0} \frac{\pi}{c} = \frac{RT}{M} \tag{4}$$

e che, così scritto, rappresenta la legge dei gas perfetti, applicabile a soluzioni reali solo a diluizione infinita.

I coefficienti B, A_2 e Γ_2, legati dalle relazioni:

$$B = RT\,A_2 = \frac{RT}{M}\Gamma_2 \tag{5}$$

anche se diversamente definiti, sono rappresentativi del primo termine di deviazione dal comportamento ideale e vengono indifferentemente chiamati, in pratica, « 2° coefficiente del viriale ». Analogamente C, A_3 e Γ_3 sono chiamati « 3° coefficiente del viriale » e così via per i coefficienti, non indicati, di ordine superiore.

Per misure su soluzioni diluite (come nel nostro caso), i termini dello sviluppo superiori al terzo possono essere in pratica senz'altro trascurati. Il terzo termine è invece spesso sensibile, ma di assai imprecisa determinazione. La sua considerazione è però utile per una più precisa determinazione dei due primi termini.

Ora, seguendo una recente impostazione per polimeri con macromolecole a configurazione statistica [6], la (3) può essere così scritta:

$$\frac{\pi}{c} = \left(\frac{\pi}{c}\right)_0 (1 + \Gamma_2 c + g\Gamma_2^2 c^2). \tag{6}$$

In questa relazione g è un coefficiente che può essere riguardato agli effetti pratici come una costante in un discreto intervallo di poteri solventi. In buoni solventi il suo valore approssimato è 0,25 ed in tal caso la (6) diventa:

$$\left(\frac{\pi}{c}\right)^{1/2} = \left(\frac{\pi}{c}\right)_0^{1/2} (1 + 0{,}5\,\Gamma_2 c) \tag{7}$$

mentre in cattivi solventi il valore di g è più basso.

(6) *a*) W. R. Krigbaum, P. J. Flory, « J. Am. Chem. Soc. », *75*, 1775 (1953); *b*) W. H. Stockmayer, E. F. Casassa, « J. Chem. Phys. », *20*, 1560 (1952).

La relazione (7) spiega l'andamento rettilineo nella fig. 2 dei dati in toluolo, il quale in realtà si rivela un buon solvente del polipropilene, ciò che risulta anche, come vedremo, da altre indicazioni.

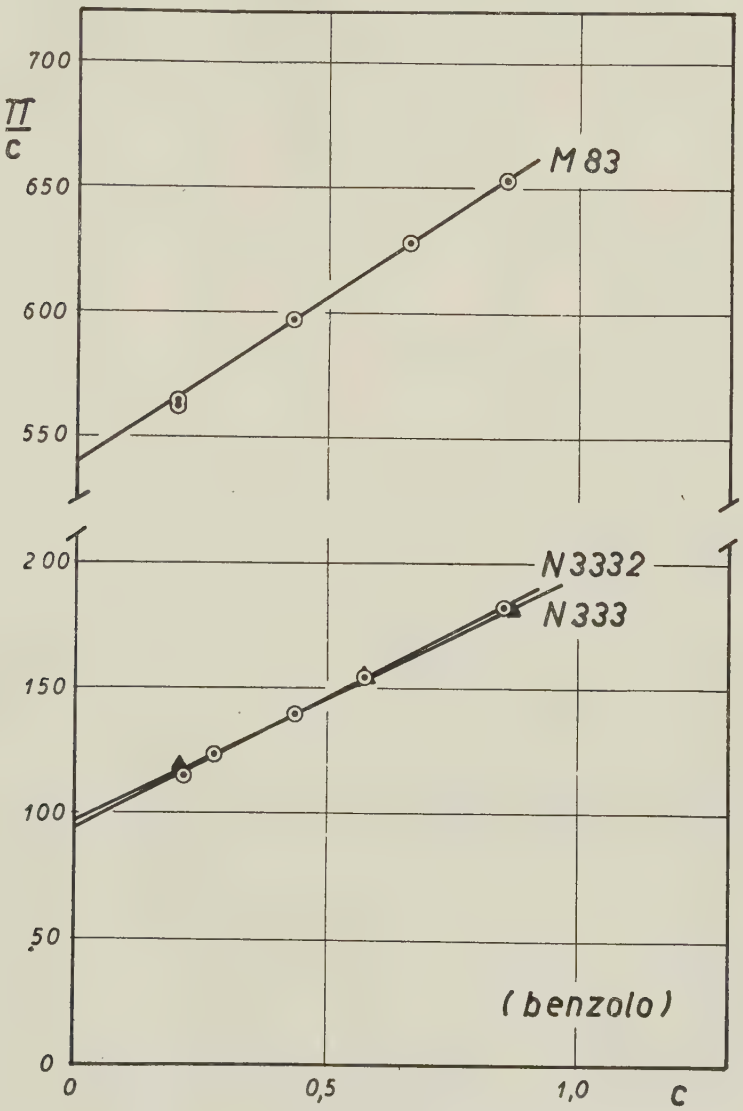


Fig. 3. – Relazione tra π/c e concentrazione, per soluzioni di tre frazioni in benzolo (dati della Tabella I *B*).

I nostri dati in benzolo non seguono invece la (7) e infatti esso si è dimostrato, come vedremo, un solvente meno buono del toluolo. Per il benzolo è prevedibile un basso valore di g, e quindi un basso valore dell'ultimo termine della (6), e i dati sperimentali dimostrano che in pratica tale termine è nel nostro caso trascurabile, per cui sono sufficienti gli sviluppi (1–3) limitati al secondo termine.

TABELLA II.

Dati osmometrici delle frazioni di polipropilene atattico, a 30° C.

Frazioni	$\left(\frac{\pi}{c}\right)_0$ (cm)	$\overline{M}_n$	$\overline{x}_n$	$B \times 10^{-4}$ ($cm^4\,g^{-1}$) in toluolo	$B \times 10^{-7}$ ($cm^5\,g^{-1}\,sec^{-2}$) in toluolo	$B \times 10^{-4}$ ($cm^4\,g^{-1}$) in benzolo	$B \times 10^{-7}$ ($cm^5\,g^{-1}\,sec^{-2}$) in benzolo
M 422 .	76,6	335.000	7.960	1,35	1,32		
N 3332 .	94	273.000	6.490			1,05	1,03
N 333 .	96	268.000	6.370			1,00	0,98
M 62 . .	184	140.000	3.325	1,65	1,62		
M 82 . .	451	57.000	1.355	2,00	1,96		
M 83 . .	540	47.500	1.130			1,35	1,32
M 922 .	1070	24.000	570	2,30	2,26		

Nella Tabella II vi sono i risultati delle estrapolazioni dei dati della Tabella I, in base ai diagrammi delle figg. 2 e 3. I valori di $(\pi/c)_0$ sono stati ricavati come intercette dei diagrammi ed i pesi molecolari M_n (ed i gradi di polimerizzazione $\overline{x}_n$) calcolati con la (4). I valori del secondo coefficiente del viriale B sono stati calcolati dalle pendenze delle rette, applicando la (1) (limitata al secondo termine) per i dati in benzolo e la (7) e le (5) per i dati in toluolo. I valori di B sono espressi in unità del sistema [g (peso), cm, sec], comodo in vari casi, ed in unità C.G.S.

I pesi molecolari, anche se hanno un limite superiore che può apparire relativamente basso, coprono in realtà un campo esteso, con un normale limite superiore di grado di polimerizzazione. Trattandosi, infatti, di polipropilene, cioè di un polimero con relativamente piccola unità monomerica, a pesi molecolari da 24.000 a 335.000 corrispondono gradi di polimerizzazione da 570 a 7.960.

Quest'ultimo valore corrisponderebbe, ad esempio, per il polistirolo ad un peso molecolare considerevole, di circa 830.000. Le frazioni da noi esaminate sono quindi adatte ad ulteriori ricerche, di cui riferiremo in prossime Note.

Per quanto riguarda i valori del secondo coefficiente del viriale si possono fare interessanti considerazioni.

Nella fig. 4 sono riportati, in convenzionale diagramma logaritmico, i valori di B in funzione di $\overline{M}_n$. Essi sono approssimativamente allineati sulle rette indicate, di normale andamento, con pendenza negativa.

Sullo stesso diagramma sono stati riportati, per semplice confronto, anche i punti relativi a frazioni con alta polidispersità residua, ottenute nel precedente lavoro [3], i cui dati osmometrici sono riassunti nella Tabella III.

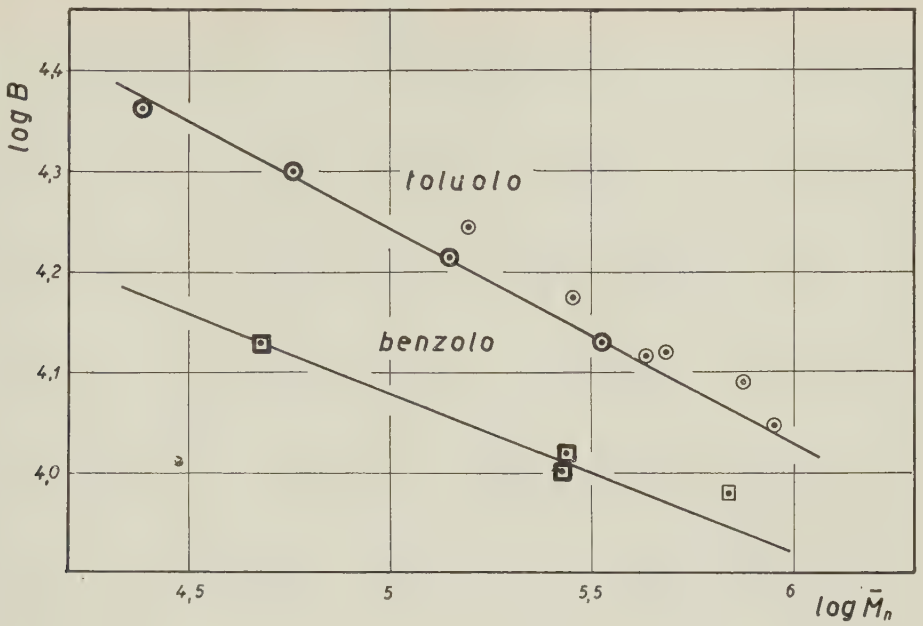


Fig. 4. – Relazione tra secondo coefficiente del viriale, in toluolo e in benzolo, e peso molecolare. Punti grossi: dati della Tabella II; punti piccoli: dati della Tabella III.

Si nota che i valori di B, ad esse relativi, si accordano entro i dovuti limiti ai valori delle buone frazioni, mantenendosi un pò più alti per effetto della alta polidispersità residua, in completo accordo con possibili previsioni [6 a].

Tabella III.

Dati osmometrici di frazioni di polipropilene atattico ad alta polidispersità residua, a 30° C.

Frazioni	$\left(\frac{\pi}{c}\right)_0$ (cm)	$\overline{M}_n$	$B \times 10^{-4}$ (in $cm^4 g^{-1}$) in toluolo	$B \times 10^{-7}$ ($cm^5 g^{-1} sec^{-2}$) in toluolo
M 13	28,6	900.000	1,11	1,09
M 22	34,2	751.000	1,23	1,21
N 1222	37,5	685.000	0,96 (*)	0,94 (*)
N 232	53,3	482.000	1,32	1,29
L 12	59,3	433.000	1,31	1,28
M 42	91	283.000	1,49	1,46
L 2	166	155.000	1,76	1,73

(*) Valore da soluzione in benzolo.

I valori di B in toluolo sono più alti, a parità di peso molecolare, di quelli in benzolo. Ciò significa che vi è una più forte interazione tra polipropilene e toluolo, cioè che il toluolo è un miglior solvente del benzolo. Conferme qualitative di questo vengono anche: *a*) dalle considerazioni, già fatte in questo lavoro, sulla legge di dipendenza di π/c da c, cioè sulla validità o meno della (7); *b*) da una più alta viscosità intrinseca del polipropilene in toluolo che in benzolo (ved. ad esempio [7] ed una prossima Nota); *c*) da nostre osservazioni sulle concentrazioni critiche di metanolo, aggiunto a soluzioni di polipropilene nei due solventi, maggiori per il toluolo che non per il benzolo.

Ma, indipendentemente da ogni altra valutazione, la bontà di un solvente trova la sua migliore espressione quantitativa nel calcolo della variazione di energia libera connessa con la pura interazione polimero–solvente. Per tale calcolo, come da noi messo in evidenza in un precedente lavoro [8], è sufficiente prendere in considerazione il passaggio da un ipotetico stato di soluzione ideale (le cui proprietà termodinamiche sono indipendenti dalla natura del polimero e del solvente) a quello di soluzione reale e, per rendersi indipendenti da questioni di concentrazione, calcolare l'energia libera del passaggio di cui sopra a diluizione infinita. Questa, cambiata di segno e riferita per convenzione ad una mole di unità strutturale, è stata da noi denominata « affinità limite d'interazione » φ_E e può essere facilmente calcolata, conoscendo il 2° coefficiente del viriale, mediante le relazioni:

$$\varphi_E = B \frac{M_u}{(\bar{v}_2)_0} = RT A_2 \frac{M_u}{(\bar{v}_2)_0} = \frac{RT \Gamma_2}{x (\bar{v}_2)_0} \tag{8}$$

in cui M_u è il peso dell'unità strutturale (o unità monomerica) e $(\bar{v}_2)_0$ è il volume parziale specifico del polimero a diluizione infinita (valore che può essere confuso in genere, senza gravi errori, col volume specifico del polimero puro allo stato amorfo non vetroso).

Nella Tabella IV abbiamo riportato i valori di φ_E del polipropilene atattico in benzolo e toluolo per un certo campo di pesi molecolari. Il calcolo è stato fatto, per ogni peso molecolare, dal valore di B interpolato in base all'andamento rettilineo della fig. 4 e ponendo per $(\bar{v}_2)_0$ il valore del volume specifico da noi misurato su polipropilene amorfo alla stessa temperatura [9].

Un aspetto ancor più interessante delle interazioni tra polipropilene e benzolo e toluolo è illustrato nella Tabella V, in cui si sono calcolati anche, per confronto, i valori di φ_E per poliisobutilene in benzolo e polistirolo atattico in benzolo e toluolo, ad uno stesso grado di polimerizzazione. Per il poliisobutilene e il polistirolo si sono utilizzati i dati di 2° coefficiente del viriale di precedenti lavori [6 *a*] [8].

(7) G. Moraglio, F. Danusso: Comunicazione all'VIII Congresso Nazionale di Chimica, Torino, maggio 1958; in pubblicazione su « Annali di Chimica ».

(8) F. Danusso, G. Moraglio, « J. Polymer Sci. », *24*, 161 (1957).

(9) F. Danusso, G. Moraglio, G. Natta, « Ind. Plastiques Mod. », *10*, 40 (1958); « Angew. Chemie », *69*, 686 (1957).

Tabella IV.

Affinità limite di interazione φ_E del polipropilene atattico a 30° C.

(in cal/unità strutturale).

Peso molecolare	φ_E in toluolo	φ_E in benzolo
50.000	17,5	11
100.000	14,5	10
150.000	13,5	9,5
200,000	12,5	9
250.000	12	8,5
300.000	11,5	8,5

Tabella V.

Confronto tra i valori dell'affinità limite d'interazione φ_E (in cal/unità strutturale) di vari polimeri in benzolo e in toluolo, a 30° C, *per* $x = 5.000$ (*polipropilene e polistirolo: atattici*).

Unità strutturale	Solvente	φ_E	Unità strutturale	Solvente	φ_E
—CH(C$_6$H$_5$)—CH$_2$—	benzene	~ 27	—CH(C$_6$H$_5$)—CH$_2$—	toluene	22,3
—CH(CH$_3$)—CH$_2$—	benzene	9	—CH(CH$_3$)—CH$_2$—	toluene	12,5
—C(CH$_3$)$_2$—CH$_2$—	benzene	~ 2,7			

Dai dati della Tabella V non è naturalmente possibile dedurre regole di carattere generale sulle relazioni tra struttura e solubilità termodinamica. Si può però osservare che l'affinità d'interazione sembra qui aumentare con l'aumento di similitudine tra struttura del solvente e struttura del sostituente della catena polimerica principale. Si vede così crescere il valore di φ_E in benzolo passando da poliisobutilene a polipropilene ed a polistirolo. Passando dal benzolo al toluolo esso invece aumenta per il polipropilene, ma diminuisce per il polistirolo, pur mantenendosi sempre più elevato per il polistirolo.

Dai dati su polipropilene e poliisobutilene appare inoltre non favorevole l'interazione tra gruppi $—CH_3$ e nuclei aromatici. La maggior bontà del toluolo rispetto al benzolo, nei confronti del polipropilene, sarebbe così dovuta al passaggio ad una struttura del solvente dotata di minor carattere aromatico.

Conclusioni.

Si sono misurate le pressioni osmotiche in benzolo od in toluolo di frazioni di polipropilene atattico ottenute in un precedente frazionamento. La legge di variazione della pressione osmotica ridotta con la concentrazione è risultata diversa nei due solventi, ma essa è in ogni caso giustificabile con considerazioni teoriche. L'individuazione di tale legge ha consentito un calcolo accurato del peso molecolare delle frazioni e del valore del secondo coefficiente del viriale nei due solventi, in funzione del peso molecolare. Il campo dei pesi molecolari coperto dalle frazioni esaminate è risultato così compreso tra 24.000 e 335.000, corrispondente ad un campo di gradi di polimerizzazione da 570 a 7.960. Dai valori del secondo coefficiente del viriale si sono calcolate le affinità d'interazione (a diluizione infinita) tra polipropilene e toluolo e benzolo. Il primo solvente è migliore del secondo e ciò appare legato, in base anche a confronti del potere solvente nei riguardi di altri polimeri, al minor carattere aromatico del toluolo rispetto al benzolo.

Chimica fisica. — *Relazione tra viscosità intrinseca e peso molecolare del polipropilene atattico in vari solventi* (*). Nota di FERDINANDO DANUSSO e GIOVANNI MORAGLIO, presentata (**) dal Socio G. NATTA.

La determinazione della viscosità di soluzioni diluite di frazioni a peso molecolare noto di un polimero nuovo è interessante sopratutto da due punti di vista. In primo luogo la conoscenza della relazione tra viscosità intrinseca e peso molecolare permette, attraverso semplici misure di viscosità, la rapida determinazione del peso molecolare (o di un valore medio di esso) di qualunque campione del polimero, senza che si debba ogni volta ricorrere a metodi diretti, di più delicata realizzazione. In secondo luogo lo studio del comportamento viscosimetrico di un polimero in vari solventi consente di risalire, attraverso l'interpretazione teorica, a proprietà configurazionali, e di riflesso strutturali, delle sue macromolecole, sia allo stato di soluzione reale, sotto l'azione di particolari interazioni col solvente, sia allo stato di soluzione ideale in un ambiente con completa uniformità d'interazioni.

È così possibile, attraverso la viscosimetria, calcolare le dimensioni statistiche medie delle macromolecole nei vari ambienti e, con opportuna sperimentazione, il valore di parametri d'interazione termodinamica del polimero con singoli solventi.

In questa Nota, riporteremo i risultati di un primo studio viscosimetrico con frazioni di polipropilene atattico, cioè con frazioni di alti polimeri lineari testa–coda del propilene, non dotati di particolare ordine sterico delle unità monomeriche lungo la catena macromolecolare.

Più precisamente, in questa Nota sarà determinata la relazione tra viscosità intrinseca e peso molecolare del polipropilene atattico in cicloesano, toluolo, benzolo ed acetato di isoamile, e saranno calcolate alcune grandezze statistiche medie riguardanti la configurazione macromolecolare del polimero nei vari solventi.

Sull'ottenimento delle frazioni usate in questo lavoro, per precipitazione frazionata di polimeri polidispersi direttamente ottenuti da polimerizzazione, e sulla determinazione del loro peso molecolare, effettuata con metodo osmometrico, si è riferito in due precedenti Note (1), a cui rinviamo per ogni dettaglio.

(*) Lavoro eseguito all'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta dell'8 novembre 1958.

(1) F. DANUSSO, G. MORAGLIO: in corso di pubblicazione su «Istituto Lombardo (Rend. Sc.)» (1958); F. DANUSSO, G. MORAGLIO e V. GIANNELLA, «Rend. Accad. Naz. Lincei», questo fascicolo, pp. 498–508 (1958).

Le misure viscosimetriche sono state effettuate con viscosimetri fondamentalmente del tipo Desreux–Bischoff [2], da noi modificati mediante applicazione di un capillare più lungo e tre bolle di misura a varie altezze, allo scopo di avere, per una stessa soluzione, misure a tre gradienti diversi [3]. La temperatura era di 30° con cicloesano, toluolo e benzolo e 34° con acetato di isoamile.

I solventi sono stati ottenuti per rettifica di prodotti puri del commercio. In particolare si è controllata la purezza del cicloesano, che, com'è noto, può essere compromessa dalla presenza di sostanze di volatilità molto simile. Dopo trattamento con acido solforico e rettifica esso aveva $n_D^{20} = 1{,}425$ e all'infrarosso risultavano assenti bande da nucleo benzenico e da gruppi metilici.

Nelle misure di viscosità, per la diluizione si sono usate pipette tarate. I valori della viscosità relativa sono stati corretti per l'effetto dell'energia cinetica, secondo la formula di Wagner [4]. Come già si è visto e discusso in un precedente lavoro [3], l'effetto di gradiente non è rilevante, col polipropilene, fino a valori notevoli del peso molecolare. Per la serie di frazioni da noi esaminate e con i gradienti dei nostri viscosimetri (ad esempio fino a 1.100 sec^{-1}, in toluolo), le misure hanno confermato che tale effetto risulta senz'altro trascurabile. Come viscosità relative si sono quindi assunti i valori medi per le tre bolle di misura.

Dalle viscosità relative corrette, si sono calcolate le viscosità specifiche η_{sp} e da queste le viscosità ridotte η_{sp}/c i cui valori sono riportati in tabella I per ogni solvente e ad ogni concentrazione.

I diagrammi η_{sp}/c–c risultano rettilinei e perciò si è presentata semplice l'estrapolazione delle η_{sp}/c a concentrazione nulla, per la determinazione delle viscosità intrinseche $[\eta]$. I valori di queste sono riportati, per ogni frazione e per ogni solvente, nella Tabella II, insieme al peso molecolare osmotico di ogni frazione ed al valore della costante k' della relazione di Huggins:

$$\eta_{sp}/c = [\eta] + k' [\eta]^2 c \,. \tag{1}$$

Dalla Tabella II si osserva che i valori di k' sono assai diversi nei vari solventi e denotano, per questi, un ampio campo di poteri solventi. In acetato di isoamile essi sono assai variabili col peso molecolare, mentre negli altri solventi hanno valori notevolmente costanti e ristretti.

Dalla Tabella II è ricavabile la relazione tra $[\eta]$ ed M [5] in ognuno dei solventi. Nella fig. 1 sono riportati i valori di $\log [\eta]$, in funzione di $\log$ M.

(2) V. Desreux, J. Bischoff, « Bull. soc. chim. Belg. », *59*, 93 (1950).

(3) G. Moraglio, F. Danusso, Comunicazione all'VIII Congresso Nazionale di Chimica, Torino, 21 maggio 1958: in corso di pubblicazione su « Annali di Chimica ».

(4) R. H. Wagner, « Ind. Eng. Chem. Anal. Ed. », *20*, 155 (1948).

(5) Indichiamo per maggior semplicità il peso molecolare delle frazioni con M. Esso dovrebbe essere più precisamente indicato con $\overline{M}_n$, poiché in realtà esso è pur sempre un valore medio numerale, in quanto ottenuto con l'osmometria e con frazioni, che, per quanto buone, non sono unitarie in senso rigoroso.

TABELLA I.

Viscosità ridotte e concentrazioni di frazioni di polipropilene atattico in soluzione, in diversi solventi.

(η_{sp}/c in $cm^3\ g^{-1} \times 100$; c in $g/100\ cm^3$).

a) cicloesano a 30°

M 422		N 3332		M 62		M 82		M 83		M 922	
η_{sp}/c	c	η_{sp}/c	c	η_{sp}/c	c	η_{sp}/c	c	η_{sp}/c	c	η_{sp}/c	c
4,025	0,232	3,380	0,246	2,035	0,393	0,982	0,644	0,843	0,658	0,508	1,158
3,685	0,116	3,110	0,123	1,870	0,196	0,920	0,322	0,799	0,329	0,477	0,579
3,545	0,077	3,035	0,082	1,815	0,131	0,895	0,215	0,780	0,219	0,466	0,386
3,505	0,058	2,975	0,061	1,785	0,098	0,886	0,161	0,775	0,165	0,460	0,289

b) toluolo a 30°

M 422		N 3332		N 333		M 62		M 82		M 83		M 922	
η_{sp}/c	c	η_{sp}/c	c	η_{sp}/c	c	η_{sp}/c	c	η_{sp}/c	c	η_{sp}/c	c	η_{sp}/c	c
2,600	0,216	2,245	0,231	2,205	0,214	1,387	0,474	0,740	1,002	0,663	1,189	0,400	1,840
2,410	0,108	2,080	0,115	2,040	,0107	1,276	0,237	0,674	0,501	0,600	0,595	0,363	0,920
2,340	0,072	2,025	0,077	1,990	0,071	1,233	0,158	0,653	0,334	0,581	0,396	0,357	0,613
2,305	0,054	1,955	0,058	1,960	0,053	1,214	0,118	0,645	0,251	0,564	0,297	0,347	0,460

c) benzolo a 30°

M 422		N 3332		M 62		M 82		M 83		M 922	
η_{sp}/c	c	η_{sp}/c	c	η_{sp}/c	c	η_{sp}/c	c	η_{sp}/c	c	η_{sp}/c	c
2,035	0,274	1,814	0,335	1,196	0,664	0,689	1,526	0,598	1,580	0,388	2,504
1,870	0,137	1,658	0,167	1,065	0,332	0,597	0,763	0,528	0,790	0,340	1,252
1,810	0,091	1,608	0,111	1,028	0,221	0,569	0,509	0,503	0,527	0,331	0,835
1,785	0,069	1,591	0,084	1,006	0,166	0,556	0,382	0,492	0,395	0,319	0,626

d) acetato di isoamile a 34°

1,339	0,450	1,281	0,468	0,834	0,701	0,474	0,962	0,428	1,005	0,314	2,010
1,153	0,225	1,107	0,239	0,739	0,350	0,434	0,481	0,398	0,502	0,283	1,005
1,089	0,150	1,055	0,159	0,708	0,233	0,422	0,321	0,383	0,335	0,274	0,670
1,074	0,113	1,024	0,119	0,697	0,175	0,411	0,241	0,379	0,250	0,269	0,502

Si vede che i punti sperimentali sono allineati, per ogni solvente, su di una retta e cioè per essi vale la nota relazione:

$$[\eta] = K' M^a \tag{2}$$

in cui K' ed a sono costanti empiriche caratteristiche di ogni coppia polimero–solvente.

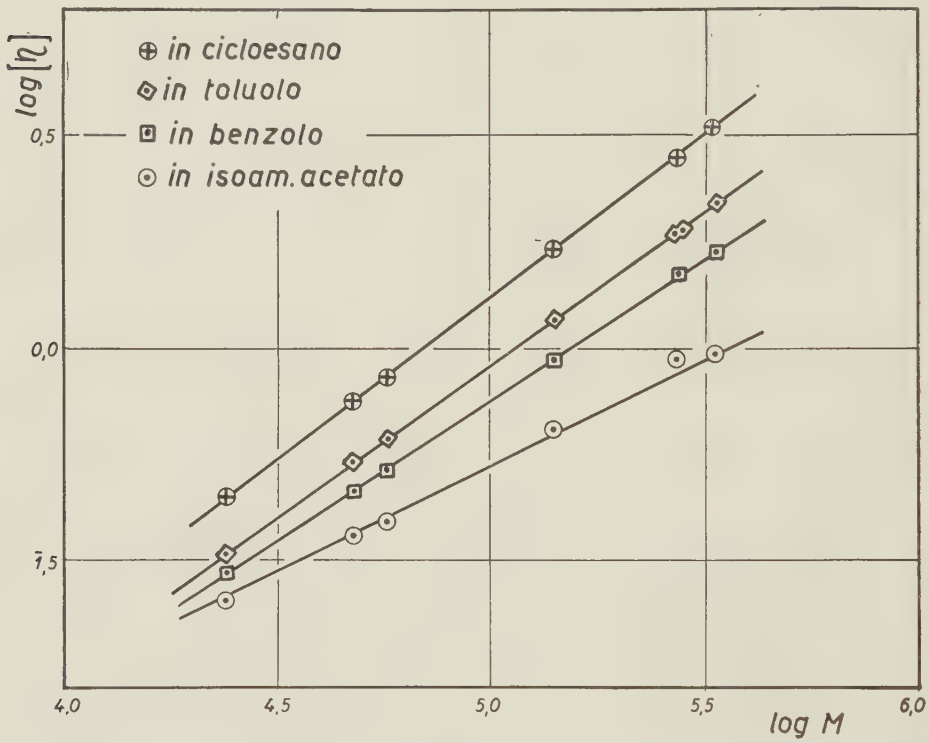


Fig. 1.

Nella Tabella III sono elencati i valori più probabili di K' e di a del polipropilene atattico in ognuno dei solventi esaminati, calcolati dai dati sperimentali col metodo dei minimi quadrati.

In base alle relazioni trovate tra $[\eta]$ ed M nei vari solventi, si possono fare alcune prime interessanti considerazioni, assumendo valida la nota teoria di Fox e Flory [6,7] per soluzioni di macromolecole a configurazione statistica.

(6) P. J. Flory, T. G. Fox, « J. Am. Chem. Soc. », *73*, 1904 (1951).

(7) P. J. Flory, « Principles of Polymer Chemistry », Cornell University Press, Ithaca, New York, 1953, Cap. XIV.

TABELLA II.

Viscosità intrinseca e costante k' di Huggins di frazioni di polipropilene atattico in vari solventi.

Frazioni	M	Isoamilacetato (34°)		Benzolo (30°)		Toluolo (30°)		Cicloesano (30°)	
		$[\eta]$	k'	$[\eta]$	k'	$[\eta]$	k'	$[\eta]$	k'
M 422	335.000	0,980	0,83	1,690	0,40	2,210	0,37	3,330	0,27
N 3332	273.000	0,940	0,82	1,500	0,42	1,910	0,40	2,840	0,27
N 333	268.000	—	—	—	—	1,880	0,43	—	—
M 62	140.000	0,645	0,65	0,945	0,42	1,164	0,35	1,705	0,29
M 82	57.000	0,393	0,54	0,510	0,45	0,613	0,34	0,856	0,27
M 83	47.500	0,365	0,47	0,460	0,41	0,538	0,36	0,752	0,24
M 922	24.000	0,255	0,45	0,295	0,43	0,327	0,37	0,446	0,27

Per questa, la viscosità intrinseca può essere così espressa:

$$[\eta] = \Phi \left(\frac{\bar{r}^2}{M}\right)^{3/2} M^{1/2} \tag{3}$$

essendo Φ una costante universale ed $\bar{r}^2$ la distanza quadratica media tra i due gruppi terminali della macromolecola nella sua configurazione in soluzione.

TABELLA III.

Parametri della relazione (2) tra $[\eta]$ ed M per frazioni di polipropilene atattico.

($[\eta]$ in 100 $cm^3\ g^{-1}$).

Solvente	t (°C)	$K' \cdot 10^4$	a
Cicloesano	30°	2,09	0,76
Toluolo	30°	2,18	0,725
Benzolo	30°	3,38	0,67
Acetato Isoamile	34°	16,85	0,50

In buoni solventi il polimero interagisce col solvente e la macromolecola rigonfia, tanto più quanto più alta è l'interazione termodinamica. In solventi di scarsa efficienza essa rigonfia poco, e, al limite, in un solvente con cui si ha soluzione ideale, essa assume una configurazione caratteristica di uno stato con completa uniformità d'interazioni.

In soluzione ideale $\bar{r}^2$ assume così in ogni caso il valore normalmente indicato con $\bar{r}_0^2$, caratteristico unicamente del polimero esaminato, ed il fattore $\frac{\bar{r}^2}{M} \equiv \frac{\bar{r}_0^2}{M}$ diviene indipendente dal peso molecolare.

Ora, è da notare che le soluzioni in acetato di isoamile, da noi esaminate in questo lavoro, alla temperatura a cui si sono effettuate le misure (34°) assumono le proprietà di soluzioni ideali per il polipropilene atattico. In altre parole, l'acetato di isoamile è, a 34°, un solvente Θ [7] del polipropilene atattico. Tale fatto è stato da noi individuato con sperimentazioni particolari, di cui riferiremo in una prossima Nota, ed è qui confermato dal valore 0,5 dell'esponente a nella Tabella III.

Per un solvente Θ, infatti, la (3) diventa:

$$[\eta]_\Theta = \Phi \left(\frac{\bar{r}_0^2}{M}\right)^{3/2} M^{1/2} = K' M^{0,5}. \tag{4}$$

Scegliendo allora per Φ il valore medio [8] $2{,}1 \cdot 10^{21}$ [9], essendo per l'acetato di isoamile $K' = 1{,}69 \cdot 10^{-3}$ si ottiene:

$$\left(\frac{\bar{r}^2}{M}\right)^{1/2} = \left(\frac{K'}{\Phi}\right)^{1/3} = 930 \cdot 10^{-11} \text{ (a 34°)} \tag{5}$$

oppure, riferendoci al grado di polimerizzazione x, anziché al peso molecolare:

$$\left(\frac{\bar{r}_0^2}{x}\right)^{1/2} = 603 \cdot 10^{-10} \text{ (a 34°)}. \tag{6}$$

Il valore della grandezza specifica (5) o (6), indipendente dal peso molecolare, costituisce uno dei dati statistici medi più importanti per l'individuazione delle caratteristiche della configurazione macromolecolare.

Il valore di $\left(\frac{\bar{r}_0^2}{M}\right)^{1/2}$ ora trovato per il polipropilene atattico può apparire piuttosto elevato se confrontato con quello di altri polimeri di tipo vinilico noti [10]. Per il polistirolo esso è infatti $735 \cdot 10^{-11}$, per il poliisobutilene (a 24°) $795 \cdot 10^{-11}$ e per il polimetacrilato di metile $680 \cdot 10^{-11}$. Il valore di $\left(\frac{\bar{r}_0^2}{x}\right)^{1/2}$ è però relativamente più basso: per il polistirolo, infatti, esso è $750 \cdot 10^{-10}$, per poliisobutilene (a 24°) $596 \cdot 10^{-10}$ e per polimetacrilato di metile $680 \cdot 10^{-10}$.

(8) Loc. cit. (6), p. 616.

(9) Le unità usate in questo lavoro saranno sempre quelle derivanti dall'esprimere c in g/100 cm³, M in g/mole ed $\bar{r}^2$ in cm².

(10) Loc. cit. (6), p. 618.

Considerando il valore di $\left(\frac{\bar{r}_0^2}{x}\right)^{1/2}$ come più significativo nei confronti delle relazioni tra struttura e configurazione, si deve concludere che il polipropilene atattico ha comportamento configurazionale assai simile a quello di altri polimeri di tipo vinilico noti.

Il più alto valore di $\left(\frac{\bar{r}_0^2}{M}\right)^{1/2}$ del polipropilene, dovuto ad un più basso valore del peso dell'unità monomerica, è però ugualmente un elemento interessante per giudicare alcuni aspetti del comportamento del polipropilene in soluzione. Esso, ad esempio, permette di più chiaramente rendersi conto del fatto che il polipropilene ha viscosità intrinseche in genere piuttosto elevate, a parità di peso molecolare e di condizioni d'interazione, rispetto a quelle di altri polimeri più comuni.

La relazione (5) esprime anche la dipendenza della dimensione media $(\bar{r}_0^2)^{1/2}$ della macromolecola dal peso molecolare nel caso di soluzione ideale. Una relazione generale, per ogni tipo di solvente, si può ottenere uguagliando i secondi membri della (2) e della (3):

$$(\bar{r}^2)^{1/2} = \left[\frac{K'}{\Phi} M^{1+a}\right]^{1/3} \tag{7}$$

con la quale può essere calcolata la dimensione statistica media del polipropilene atattico, in tutti i solventi da noi esaminati, mediante i dati della Tabella III.

Per dare un'idea più concreta dei valori di tale dimensione media, nella Tabella IV si è calcolata $(\bar{r}^2)^{1/2}$ per un certo intervallo di pesi molecolari e per ognuno dei solventi da noi usati in questo lavoro, i cui poteri solventi, come vedremo anche in seguito, sono distribuiti in un campo notevolmente vasto.

TABELLA IV.

Dimensione statistica media $(\bar{r}^2)^{1/2}$ *in* Å *delle macromolecole del polipropilene atattico in vari solventi.*

Solvente	M = 25.000	50.000	100.000	200.000	400.000
Cicloesano	176	264	397	596	896
Toluolo	159	237	352	525	782
Benzolo	153	224	330	485	714
Acetato Isoamile	147	208	294	416	588

Conclusioni.

Si sono effettuate misure viscosimetriche su soluzioni diluite di frazioni di polipropilene atattico, a peso molecolare noto, in cicloesano, toluolo e benzolo a 30° ed in acetato di isoamile a 34°. Le relazioni tra viscosità intrinseca e peso molecolare, che si sono così determinate per ognuno dei quattro solventi dotati di assai diverso potere solvente, sono risultate conformi alla nota legge di tipo esponenziale omogeneo. In particolare nell'acetato di isoamile tale relazione assume l'espressione tipica delle soluzioni in solvente Θ, in accordo con altre sperimentazioni, che indicano lo stato ideale per le soluzioni di polipropilene atattico in acetato di isoamile a 34°.

Esaminando i dati in base alla teoria di Fox e Flory, si sono calcolate le dimensioni statistiche medie delle macromolecole del polipropilene nei vari solventi ed a vari pesi molecolari. Dal confronto con dati statistici medi di altri polimeri, si è dedotto che il comportamento configurazionale del polipropilene atattico in soluzione si manifesta assai simile a quello di altri polimeri di tipo vinilico noti, quali il polistirolo, il poliisobutilene ed il polimetacrilato di metile.

Chimica fisica. — *Energia di risonanza del poliacetilene* (*). Nota di PAOLO CORRADINI (**), presentata dal Socio G. NATTA.

In una Nota precedente sono state fornite le evidenze che permettono di stabilire la struttura lineare del poliacetilene preparato con catalizzatori a base di alcoolati di titanio e alluminio trietile [1].

Tale polimero infatti, infusibile e pressoché intrattabile con reagenti chimici, a differenza dei corrispondenti polimeri dell'esino e del propino, solubili e facilmente idrogenabili, fornisce, sottoposto ad analisi coi raggi X, riflessioni nette attribuibili a piani reticolari paralleli agli assi di catene lineari, impacchettate, a causa di un ingombro pressoché cilindrico, in un reticolo pseudoesagonale con $a = 4{,}2$ Å.

In mancanza di dati roentgenografici concernenti il periodo di identità lungo la catena, era stato utilizzato il valore sperimentale della densità per dedurre che i legami dovevano essere prevalentemente a configurazione trans. Questi risultati erano confermati dall'esame dello spettro infrarosso del polimero, la cui banda più intensa a 9,56 μ è in accordo con la presenza di sequenze di doppi legami trans alternati con legami semplici, così lunghe che una distinzione tra i due tipi di legami non è possibile.

Lunghe sequenze di doppi legami coniugati sono state pure trovate nei polimeri a peso molecolare basso dell'acetilene, solubili in acetone, che si ottengono in piccola quantità accanto al polimero insolubile [2]. La insolubilità del polimero dell'acetilene da noi esaminato va probabilmente collegata col fatto che, per risonanza, la sua catena diventa estremamente rigida. Se infatti dipendesse da reticolazione del prodotto, che è peraltro sostanzialmente lineare, esso risulterebbe ancora rigonfiabile da solventi.

Abbiamo ritenuto pertanto opportuno calcolare l'energia di risonanza del poliacetilene, per poter collegare questo dato con le più caratteristiche proprietà del polimero, che si differenziano nettamente, e vedremo di chiarire il perché, da quelle dei corrispondenti polimeri del butino e dell'esino.

Consideriamo una molecola polienica contenente $2n$ atomi ($C_{2n}H_{2n+2}$).

Nella descrizione col metodo degli orbitali molecolari, trattata teoricamente da C. A. Coulson per alcuni polieni a basso peso molecolare [3], l'ener-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1958.

(1) G. NATTA, G. MAZZANTI, P. CORRADINI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (8), *25*, 3 (1958).

(2) E. LOMBARDI e L. GIUFFRÈ, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (8), *25*, 70 (1958).

(3) C. A. COULSON, « Proc. Roy. Soc. », A, *169*, 413 (1939); C. A. COULSON, « Proc. Roy. Soc. », A, *191*, 39 (1947).

gia dei livelli elettronici degli orbitali π è fornita dalle soluzioni dell'equazione secolare (di ordine $2n$)

$$(1) \qquad \Delta \equiv \begin{vmatrix} \varepsilon & \beta_1 & 0 & 0 \cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\ \beta_1 & \varepsilon & \beta_2 & 0 \cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\ 0 & \beta_2 & \varepsilon & \beta_3 \cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \beta_{2n-2} & \varepsilon \quad \beta_{2n-1} \\ 0 \cdots\cdots\cdots 0 & & \beta_{2n-1} & \varepsilon \end{vmatrix} = 0 .$$

Se il numero di atomi di carbonio è molto grande, come nel caso del poliacetilene, è possibile porre tutti gli integrali di scambio $\beta_r = \beta_0$ e le $2n$ soluzioni del determinante risultano

$$(2) \qquad \varepsilon^{(j)} = 2\,\beta_0 \cos\theta_j$$

dove

$$(3) \qquad \theta_j = \frac{j\pi}{2n+1}, \qquad j = 1, 2, \cdots, 2n .$$

Si ottengono quindi $2n$ livelli energetici dei quali gli n livelli più bassi, in corrispondenza ai valori di $j = 2n, 2n-1, \cdots, n+1$ saranno occupati ciascuno da due elettroni.

L'energia elettronica totale degli elettroni mobili è:

$$(4) \qquad E = -2 \sum_{j=n+1}^{2n} \varepsilon^{(j)} = -2 \sum_{j=n+1}^{2n} 2\,\beta_0 \cos\frac{j\pi}{2n+1} .$$

Riteniamo una sufficiente approssimazione calcolare l'energia totale media per ogni legame E_0 facendo tendere n all'infinito: si ha allora

$$(5) \qquad E_0 = -\frac{4}{\pi}\beta_0 \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x\, dx = \frac{4}{\pi}\beta_0 = 1{,}274\,\beta_0 .$$

Nel caso del benzolo è $E_0 = 1{,}333\,\beta_0$, con $\beta_0 = -20$ Kcal/mole. L'energia di risonanza per legare è la differenza tra β_0 e E_0. Essa risulta pertanto eguale per il poliacetilene a $-0{,}274\,\beta_0 = 5{,}5$ Kcal, valore appena leggermente inferiore a quello del benzolo, calcolato con la stessa approssimazione.

Anche l'ordine di legame (dato, secondo Coulson, da $1 + (E_0/2\,\beta_0)$) risulta praticamente eguale (1,637 contro 1,667).

La lunghezza dei legami C—C lungo la catena è da attendersi quindi di 1,40 Å, e il periodo di ripetizione per unità monomerica lungo la catena di 2,43 Å.

Questo dato permette di confermare i dati roentgenografici sul poliacetilene con quelli ottenibili da misure di densità: assumendo la distanza tra le catene trovata a partire dai dati di diffrazione coi raggi X in 4,2 Å, e il periodo medio di ripetizione per unità monomerica in 2,43 Å, si ottiene una densità teorica di 1,15 g/cm³, in buon accordo con la sperimentale (1,10 g/cm³) che

per i polimeri, a causa della presenza di parte amorfa meno densa, risulta sempre generalmente un po' più bassa.

Alcune osservazioni finali possono risultare interessanti. I livelli $\varepsilon^{(j)}$ si infittiscono per $n \to \infty$, dando luogo ad una banda occupata solo per metà. Questo può spiegare il colore nero e la lucentezza metallica del polimero. Se non intervenissero legami trasversali a pregiudicare una risonanza completa, esso dovrebbe presentare una conducibilità elettrica lungo le catene. Inoltre la rigidità della catena, dovuta a risonanza, fa sì che il poliacetilene sia infusibile e insolubile in tutti i solventi.

A differenza del poliacetilene, il poliesino ha un aspetto gommoso, è solubile nei solventi organici e ai raggi X, si presenta amorfo, dando luogo ad uno spettro che somiglia a quello del poliesene amorfo, preparato con catalizzatori stereospecifici che forniscono polimeri completamente lineari a successione isotattica testa-coda.

Non vi è quindi risonanza nel poliesino tra legami semplici e doppi, che conservano la loro identità, per la non planarità della catena. Questo è dovuto verosimilmente al fatto che accostamenti a 2,43 Å dei sostituenti laterali lungo la catena, necessari perché quest'ultimo assuma una conformazione planare, richiedono una energia superiore alle 11 Kcal di risonanza che ha il poliacetilene ogni due legami C—C. L'entità di tali impedimenti sterici può essere messa in relazione con la non planarità della catena di altri polimeri, come il polipropilene. Come è noto, la conformazione della catena di tale polimero è elicoidale [4], ed esistono allo stato cristallino sia eliche destre che eliche sinistre. Noi riteniamo, in base alle strutture che si possono postulare per il poliacetilene e per il poliesino, che, analogamente, uno svolgimento completo dell'elica del polipropilene per passare dalla conformazione destra alla sinistra, sia, da un punto di vista energetico, molto sfavorito a tutte le temperature di impiego.

Ringrazio il prof. Natta che mi ha incoraggiato a eseguire questo lavoro.

(4) G. NATTA, P. CORRADINI, M. CESARI, «Rend. Acc. Naz. Lincei» (8), *21*, 365 (1956).

Chimica fisica. — *Entalpia ed entropia di fusione del polipropilene isotattico* (*). Nota di Ferdinando Danusso, Giovanni Moraglio e Eduardo Flores, presentata (**) dal Socio G. Natta.

La trattazione termodinamico–statistica dell'abbassamento della temperatura di fusione di alti polimeri cristallini, per effetto di diluenti, ha reso possibile, in tempi recenti [1], mediante una sperimentazione relativamente semplice, la misura dell'entalpia di fusione che compete ad un'unità strutturale del polimero nel passaggio dallo stato completamente cristallino allo stato fuso. Con la determinazione della temperatura di fusione del polimero altamente cristallino è poi possibile il calcolo dell'entropia di fusione, anch'essa riferita ad un'unità strutturale. Determinazioni di questo tipo sono già state fatte per alcuni polimeri di natura chimica differente ed alcuni studi sono stati sviluppati [2] tendenti ad interpretare la relazione che intercorre tra entalpia od entropia di fusione e struttura o configurazione delle macromolecole del polimero.

Il comportamento alla fusione di polimeri di monomeri vinilici α–sostituiti non era tuttavia ancora conosciuto, essendo impossibile, fino a pochi anni or sono, ottenere questi polimeri con regolarità di struttura tale da permettere il raggiungimento di alti gradi di cristallizzazione.

In questa Nota si riportano i risultati di determinazioni su polipropilene isotattico, polimero altamente cristallino, ottenuto per la prima volta in questo Istituto, mediante processi di polimerizzazione stereospecifica [3].

La struttura cristallina del polipropilene isotattico, con configurazione elicoidale delle macromolecole costitutive, è stata oggetto di uno studio approfondito ed è già stata descritta in altre pubblicazioni [4].

Per le misure si è impiegato un campione di polipropilene proveniente da polimerizzazione del monomero, alla pressione di 3 at. circa, in soluzione eptanica, a 75° C, con un catalizzatore di alta stereospecificità da $Be(C_2H_5)_2$ e $TiCl_3$ [13]. Il prodotto della polimerizzazione, accuratamente purificato dai residui catalitici mediante lavaggi acidi, è stato estratto con *n*–ottano bollente. Il residuo, ridotto in polvere finissima, lavato con metanolo ed essiccato sotto alto vuoto, aveva viscosità intrinseca in tetralina a 135° di circa $3\ cm^3 g^{-1} \times 100$. Esso è stato usato come campione per le misure.

Come diluenti si sono impiegati α–cloronaftalina, decalina (miscela cis e trans) e propionato di 2–etilesile, purificati per distillazione sotto vuoto e raccolta di una frazione centrale.

Di ciascuno dei diluenti si sono determinati i volumi specifici a varie temperature tra 30° e 200°, per mezzo di dilatometri a capillare.

(*) Lavoro eseguito all'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1958.

I volumi specifici del polimero fuso, ottenuti in altro lavoro con misure dilatometriche a varie temperature, sopra 175° C, sono stati estrapolati linearmente alle temperature inferiori di fusione delle miscele: tali valori sono praticamente coincidenti con quelli del normale polipropilene atattico [5].

Tabella I.

Temperature di fusione e frazioni in peso di polipropilene delle miscele esaminate.

(Diluenti: C = α–cloronaftalina; D = decalina; E = estere propionico dell'alcool 2–etilesilico).

Miscela	t_m (°C)	w_2
C_1	164,5	0,783
C_2	160,5	0,682
C_3	155,5	0,592
C_4	150,5	0,500
D_1	167	0,839
D_2	159	0,712
D_3	159	0,653
D_4	156	0,645
D_5	154	0,597
D_6	150	0,538
D_7	144	0,449
E_1	160,5	0,569
E_2	157	0,484
E_3	154	0,387
E_4	150,5	0,308
polipropilene	174,5	1,000

Le miscele polimero–diluente sono state preparate pesando le quantità volute di componenti in fiale di vetro, che venivano poi raffreddate in miscela frigorifera, saldate sotto vuoto e poste in bagno termostatico per alcuni giorni alla temperatura di 180 ÷ 190° C. Ogni tanto veniva variata la posizione delle fiale in modo da far scorrere la miscela altamente viscosa e favo-

rire la formazione di una massa fusa il più possibile omogenea. Le miscele, raffreddate lentamente ed estratte dalle fiale, erano poi introdotte nei bulbi di dilatometri a capillare, con riempimento a mercurio. I dilatometri erano dello stesso tipo di quelli usati in altri nostri lavori ed i particolari delle operazioni ad essi relative sono descritti altrove [6]: si aveva, come unica variante, che il vuoto spinto prima dell'introduzione del mercurio distillato veniva fatto dopo aver raffreddato la miscela in metanolo e CO_2 onde evitare il più possibile l'evaporazione del diluente.

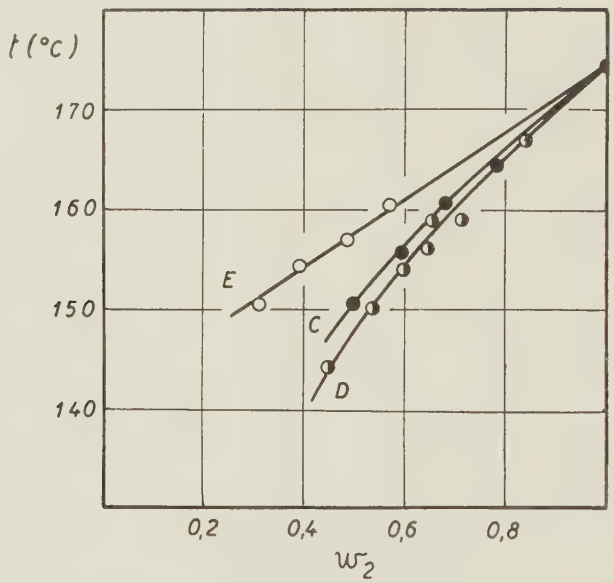


Fig. 1. – Temperatura di fusione delle miscele di polipropilene in vari solventi in funzione della frazione in peso di polimero.

(C = α-cloronaftalina; D = decalina; E = propionato di 2-etilesile).

Le miscele erano quindi lasciate cristallizzare in bagni termostatici ad opportune temperature. Questa operazione, che richiedeva un tempo di parecchi giorni, era seguita con l'osservazione del livello del mercurio nei capillari.

I dilatometri così preparati risultavano pronti per le misure, le quali venivano iniziate a 60° ÷ 70° al disotto del presunto punto di fusione. Non si è eseguita una taratura dei dilatometri allo scopo di ottenere i valori del volume specifico a varie temperature: per ottenere i punti di fusione si sono semplicemente portate in diagramma le altezze del menisco di mercurio nel capillare, lette con catetometro, in funzione della temperatura. I bagni risultavano termostatati entro 0,1 ÷ 0,2°C e la loro temperatura veniva aumentata, nelle vicinanze della temperatura di fusione, di 1 ÷ 2°C ogni 24 ore: solo dopo questo periodo di tempo, infatti, il livello del mercurio era costante e si potevano eseguire misure attendibili.

In modo analogo si è operato per determinare il punto di fusione del campione di polipropilene puro (residuo ottanico). Questo è risultato essere 174°,5, lievemente inferiore a quello massimo finora osservato su polipropileni isotattici, di 176° C.

Tabella II

Calcolo dei valori delle funzioni utili alla valutazione di ΔH_u *e* B.

(Densità del polipropilene d_2 e dei solventi d_1 alla temperatura T_m, interpolata da dati sperimentali; $\frac{1}{T_m^\circ} \cdot 10^3 = 2{,}235$).

Miscela	$\frac{1}{T_m} \cdot 10^3$	d_1	d_2	$\left(\frac{1}{T_m} - \frac{1}{T_m^\circ}\right) \cdot \frac{10^3}{v_1}$	$\frac{v_1}{T_m} \cdot 10^3$
C_1	2,286	1,072	0,773	0,307	0,379
C_2	2,307	1,075	0,775	0,287	0,579
C_3	2,334	1,080	0,778	0,298	0,775
C_4	2,361	1,084	0,780	0,301	0,989
D_1	2,273	0,774	0,772	0,237	0,363
D_2	2,315	0,780	0,776	0,282	0,664
D_3	2,315	0,780	0,776	0,234	0,801
D_4	2,331	0,782	0,778	0,271	0,825
D_5	2,342	0,784	0,778	0,267	0,939
D_6	2,364	0,787	0,781	0,280	1,087
D_7	2,398	0,791	0,784	0,297	1,316
E_1	2,307	0,744	0,774	0,163	1,017
E_2	2,325	0,747	0,777	0,171	1,223
E_3	2,342	0,750	0,778	0,172	1,454
E_4	2,361	0,753	0,780	0,180	1,650

Nella Tabella I sono indicati i punti di fusione e le frazioni in peso di polimero per tutte le miscele coi tre diluenti. Tali valori, riportati in diagramma nella fig. 1, costituiscono i diagrammi di fase dei tre sistemi binari ed offrono un pratico confronto della solubilità del polipropilene, ad alta temperatura, nei tre solventi esaminati. I dati della Tabella I, insieme a quelli delle densità dei diluenti e del polipropilene amorfo o fuso, a varie temperature, sono stati usati per il calcolo dei valori delle funzioni $\left(\frac{1}{T_m} - \frac{1}{T_m^\circ}\right) \Big/ v_1$

e $\frac{v_1}{T_m}$, come si vede dalla Tabella II. Questi valori, riportati in diagramma nella fig. 2, permettono, con estrapolazione grafica, di risolvere l'equazione [1]:

$$\frac{1}{T_m} - \frac{1}{T_m^\circ} = \frac{R}{\Delta H_u} \frac{V_u}{V_1} \left(1 - \frac{BV_1}{R} \frac{v_1}{T_m}\right) v_1$$

in cui T_m° e T_m sono le temperature assolute di fusione rispettivamente del polimero puro e in miscela; v_1 è la frazione in volume del diluente, avente volume molare V_1; ΔH_u è l'entalpia di fusione del polimero riferita all'unità strutturale, avente, allo stato fuso, volume molare V_u, e B è un coefficiente d'interazione energetica del polimero col solvente.

Dal diagramma di fig. 2 si vede che i dati, come accade spesso in misure del genere, risultano relativamente dispersi e non è facile assegnare valori

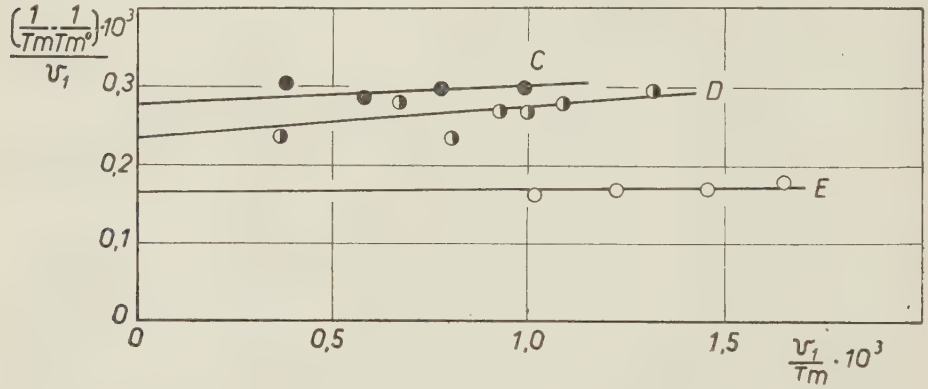


Fig. 2. – Diagramma per la determinazione grafica dell'entalpia di fusione del polipropilene. Punti sperimentali per le miscele in α–cloronaftalina (C), decalina (D) e propionato di 2–etilesile (E). Le rette tracciate attraverso i punti corrispondono al valore più probabile $\Delta H_u = 2.600$ cal mole^{-1}.

di precisione alle intercette con le ordinate, in base ai quali si deve effettuare il calcolo di ΔH_u. Più prudente appare assegnare, per ogni diluente, un campo di valori, a cui corrisponde un campo di ΔH_u.

Nella fig. 3 si sono indicati graficamente i possibili intervalli di esistenza. Tralasciando considerazioni dettagliate sull'andamento di essi per i singoli diluenti, deducibili in base alle incertezze dei punti sperimentali di fig. 2, si rileva che il valore più probabile è:

$$\Delta H_u = 2.600 \text{ cal/unità}$$

valore che si può considerare affetto da un'incertezza dell'ordine di ± 100 cal/unità. In base a tale valore più probabile si sono tracciate le rette sul diagramma di fig. 2: si vede che esse sono senz'altro compatibili con i dati sperimentali relativi ai tre diversi diluenti.

Si sono anche calcolati, come dati puramente indicativi, i valori del coefficiente B d'interazione in cal cm^{-3}. Si ha B = — 2 per la decalina, —1,2 per l'α–cloronaftalina e — 0,2 per il propionato di 2–etilesile. Tenendo pre-

sente che un solvente è tanto « migliore » quanto più alto è il valore, negativo, di B, risulterebbe che tra i diluenti esaminati, la decalina è il miglior solvente e l'estere il peggiore, mentre l'α–cloronaftalina ha proprietà intermedie.

Tale andamento dei poteri solventi è in accordo con quanto si è riscontrato a bassa temperatura da dati di viscosità con polipropilene atattico [7], dai quali risultava che il propionato di 2–etilesile era tra i solventi peggiori, la decalina il migliore trovato ed i composti aromatici clorurati di potere solvente intermedio.

Dal valore di ΔH_u, tenendo presente la temperatura di fusione cristallina del polipropilene isotattico puro, si calcola immediatamente l'entropia di fusione:

$$\Delta S_u = \frac{\Delta H_u}{T^\circ_m} = 5{,}8 \quad \text{cal/unità °K}$$

con un'incertezza dell'ordine di $\pm$ 0,2.

Nella Tabella III i valori di ΔH_u e ΔS_u e le temperature di fusione del polipropilene sono confrontati con quelli di altri polimeri lineari noti, con struttura non molto dissimile da quella del polipropilene.

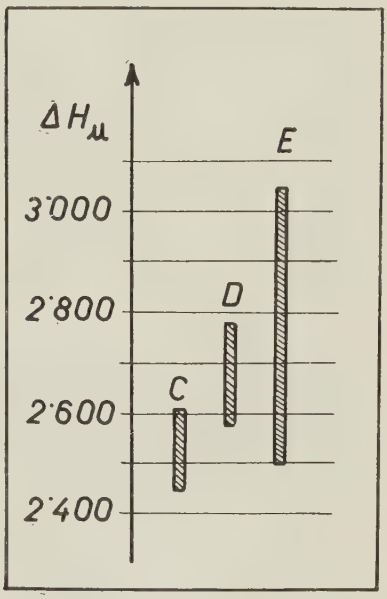


Fig. 3. – Campi di valori di ΔH_u compatibili con i dati sperimentali nei tre solventi:
α–cloronaftalina (C), decalina (D) e propionato di 2–etilesile (E).

Tabella III.

Entalpie, entropie e temperature di fusione di alcuni polimeri

Polimero	ΔH_u (cal/unità)	ΔS_u (cal/unità °K)	t°_m(°C)	Riferimenti
Polietilene	1.820 (a)	4,4 (a)	138	[9]
Polipropilene	2.600	5,8	176	
Poliossietilene	1.980	5,85	66	[10]
Policloroprene (b)	2.000	5,7	80	[11]
Gutta Percha	3.040	8,75	74	[8]
Policlorotrifluoroetilene . .	1.200	2,5	210	[12]

(a) Valori riferiti all'unità $—CH_2—CH_2—$.
(b) Valori estrapolati per un ipotetico polimero interamente transtattico.

Particolarmente interessante risulta il confronto con il polietilene. Il più alto valore di ΔH_u del polipropilene può essere unicamente attribuito alla maggior complessità strutturale dell'unità monomerica di esso, poiché il calore di fusione, riferito al grammo, è di 65 cal per il polietilene e di 62 ($\pm$ 2) cal per il polipropilene.

La più alta temperatura di fusione del polipropilene può essere giustificata in base al diverso tipo di ordinamento cristallino, a configurazione elicoidale nel polipropilene ed a zig–zag planare nel polietilene.

Di più difficile interpretazione è, al momento, l'elevato valore dell'entropia riferito ad un legame di catena principale. Infatti ΔS_u, risulta di valore molto simile a quello di altri polimeri, come il poliossietilene e il policloroprene, nei quali è possibile ammettere, in seguito a fusione, maggiori possibilità configurazionali dell'unità strutturale che non per il polipropilene.

Una discussione in termini definitivi sul significato configurazionale di ΔS_u potrà però essere effettuata solo quando siano conosciuti, per i vari polimeri, i contributi all'entropia dovuti alla variazione di volume conseguente al processo di fusione [8].

Conclusioni.

L'entalpia di fusione ΔH_u del polipropilene isotattico, determinata col metodo dell'abbassamento della temperatura di fusione per aggiunta di diluenti e con l'applicazione di una relazione derivata dalla teoria termodinamico–statistica delle soluzioni di polimeri, risulta di 2.600 cal/unità ($\pm$ 100). In base alla temperatura di funzione del polimero puro, da tale valore si è calcolata un'entropia di fusione ΔS_u di 5,8 cal/unità °K ($\pm$ 0,2).

Il calore di fusione del polipropilene risulta identico a quello del polietilene, se riferito al peso di sostanza, mentre la temperatura di fusione del primo è più elevata di quella del secondo, verosimilmente per la diversa struttura cristallina dei due polimeri. Il valore di ΔS_u si uniforma invece a quello di altri polimeri lineari, come il poliomietilene ed il policloroprene, la cui unità strutturale è composta da tre gruppi atomici snodati e appare avere maggiori possibilità configurazionali.

Bibliografia.

[1] Ved. ad esempio: P. J. Flory, *Principles of Polymer Chemistry*, Cornell University Press, Ithaca, New York (1953).

[2] Ved. ad esempio: L. Mandelkern, «Chem. Reviews», *56*, 903 (1956).

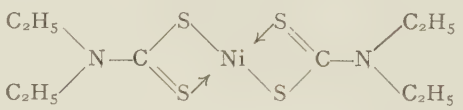
[3] G. Natta, «Atti Accad. Naz. Lincei», Mem., *8*, 4 (1955); G. Natta ed altri, «J. Am. Chem. Soc.», *77*, 1708 (1955).

[4] Ved. ad esempio: G. Natta, P. Corradini, M. Cesari, «Rend. Accad. Naz. Lincei», *31*, 256 (1956).

[5] F. Danusso, G. Moraglio, G. Natta, « Ind. Plastiques Mod. », *10*, 40 (1958); « Angew. Chemie », *69*, 686 (1957).
[6] F. Danusso ed altri, « Chimica e Industria »: in corso di pubblicazione.
[7] G. Moraglio, F. Danusso, Comunicazione all'VIII Congresso Nazionale di Chimica, Torino, maggio 1958: in pubblicazione su « Annali di Chimica ».
[8] L. Mandelkern, F. A. Quinn, D. E. Roberts, « J. Am. Chem. Soc. », *78*, 926 (1956).
[9] F. A. Quinn, L. Mandelkern, « J. Am. Chem. Soc. », *80*, 3178 (1958).
[10] L. Mandelkern, « J. Appl. Phys. », *26*, 443 (1955).
[11] W. E. Mochel, J. T. Maynard, « J. Polymer Sci. », *13*, 235 (1954).
[12] A. M. Bueche, « J. Am. Chem. Soc. », *74*, 65 (1952).
[13] G. Natta, G. Mazzanti, P. Longi, Dom. Brev. It. 4035/57.

Chimica fisica. — *Struttura cristallina e polimorfismo del bis(N,N-Dietilditiocarbammato)-Nichel(II).* Nota di Alessandro Vaciago e Adriana Fasana (*), presentata (**) dal Socio L. Cambi.

Nel quadro delle ricerche di L. Cambi e della sua scuola sui complessi dell'acido ditiocarbammico, abbiamo iniziato la determinazione della struttura cristallina e molecolare del bis(N,N–Dietilditiocarbammato)–Nichel(II):



La conoscenza di questa struttura è di una certa qual importanza per lo studio dei complessi di Ni^{II} e in particolare per lo studio della coordinazione del nichel con lo zolfo. È nota la struttura del bis(N,N–Di–*n*–propilditiocarbammato)–Nichel(II) [1, 2] ma, tenuto conto delle osservazioni che sono state avanzate al riguardo [3], abbiamo ritenuto opportuno riprendere in esame un composto di questa serie.

In questa Nota sono presentati i dati cristallografici da noi misurati e le prime considerazioni strutturali che ne seguono.

Le determinazioni effettuate con il metodo del cristallo rotante e con il metodo di Weissenberg hanno dato i risultati raccolti in Tabella I.

Come si può notare, il bis(N,N,–Dietilditiocarbammato)–Nichel(II) cristallizza in tre forme: α, β e γ molto simili tra di loro.

La forma monoclina, come era da attendersi, rappresenta la fase stabile a temperatura ambiente. Essa è tanto simile alle forme tetragonali che $b^* = c^*$ entro i limiti sperimentali.

I cristalli tetragonali sono molto rari: possono essere trovati ai bordi del cristallizzatore, dove le particolari condizioni per il formarsi di una fase metastabile sono più facilmente verificate.

Della forma monoclina è stato effettuato lo studio ottico: essa si presenta prevalentemente in cristalli prismatici {011} e più raramente in cristalli con forte sviluppo del pinacoide {100}. Piuttosto frequenti sono i germinati.

I caratteri ottici osservati, quantunque tali da non poter permetttere una completa caratterizzazione del cristallo da questo punto di vista, sono sufficienti tuttavia per confermare pienamente i risultati roentgenografici: l'estinzione è obbliqua sulle facce di {011} e avviene secondo le diagonali

(*) Centro Studi di Chimica Metallurgica del C.N.R., Università degli Studi di Milano. Uno di noi (A. F.) è ora presso l'Istituto di Fisica Sperimentale del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1958.

su {100}; le figure di interferenza, assai poco nitide su {011} sono invece molto nette su {100} e si avvicinano notevolmente a quelle fornite da un cristallo uniassico tagliato normalmente all'asse ottico, il che conferma la forte somiglianza della nostra fase con le corrispondenti tetragonali. Per quanto riguarda il pleocroismo e gli indici di rifrazione, abbiamo che sulle facce di {100} l'indice di rifrazione corrispondente alla vibrazione parallela all'asse y è molto alto ($> 1{,}79$) e il raggio è colorato in verde scuro. L'altro indice è più basso ($n \cong 1{,}72$) e il colore del raggio è bruno chiaro. Invece sulle facce di {011} abbiamo estinzione obliqua con angolo di estinzione $\cong 32°$. Il pleocroismo in questo caso è molto intenso. A uno dei raggi, colorato in verde scuro, corrisponde anche qui un indice molto alto ($> 1{,}79$), mentre all'altro, colorato in bruno rossastro, corrisponde un indice $n \cong 1{,}67$.

TABELLA I.

Radiazione: CuK_α. *Il valore di* D_m *è stato determinato con il metodo dei liquidi pesanti* (*potassio iodomercurato*).

$[(C_2H_5)_2NCS_2]_2Ni$	α	β	γ
a	6,179 ± 0,006 Å	16,18 ± 0,02 Å	16,35 ± 0,04 Å
b	11,48 ± 0,04 Å	16,18 ± 0,02 Å	16,35 ± 0,04 Å
c	11,54 ± 0,03 Å	6,35 ± 0,01 Å	6,351 ± 0,003 Å
β	95,55°	—	—
U	814,5 $Å^3$	1662,4 $Å^3$	1697,5 $Å^3$
Z	2	4	4
F. W.	355,21	355,21	355,21
Simm. di Buerger			
equatore	C_{2l}	C_4	C_{4l}
I strato	C_l	C_4	C_{4l}
Simmetria di Laue	C_{2h} — 2/*m*	C_{4h} — 4/*m*	D_{4h} — 4/*nmm*
Riflessi	*hkl*: tutti i gen.	*hkl*: tutti i gen.	*hkl*: tutti i gen.
	*h*o*l*: *l* = 2 *n*	*hk*o: *k* + *k* = 2 *n*	*hk*o : *h* + *k* = 2 *n*
	o*k*o: *k* = 2 *n*		
Gruppo spaziale	C^5_{2h} — $P2_1/c$	C^3_{4h} — P4/*n*	D^7_{4h} — P4/*nmm*
F (ɔɔo)	332	664	664
μCuK_α	62,66 cm^{-1}	61,38 cm^{-1}	60,11 cm^{-1}
D_m	1,437 g cm^{-3}	—	—
D_x	1,448 g cm^{-3}	1,419 g cm^{-3}	1,390 g cm^{-3}

La determinazione della struttura molecolare del bis(N,N–Dietilditiocarbammato)–Nichel(II) è in corso per opera di uno di noi (A. V.), ma dal numero di molecole per cella elementare, dalle proprietà dei gruppi spaziali univocamente determinati per le tre forme e dalle sintesi di Patterson (001) calcolate per le due forme tetragonali, è possibile affermare che, come era da attendersi in base a quanto sinora noto sui composti di coordinazione del Ni^{II} e in accordo con quanto già trovato per il bis(N,N–Di–*n*–propilditiocarbammato)–Nichel(II) [1, 2], la coordinazione del nichel è planare in tutte e tre le forme del composto in esame.

Infatti per il gruppo $P\,2_1/c$ le posizioni 2 hanno simmetria $\bar{1}$ e quindi il nichel non può coordinare tetraedricamente. Per i gruppi $P\,4/n$ e $P\,4/nmm$ sarebbero possibili ambedue i tipi di coordinazione per quanto si può dedurre dalle proprietà di simmetria dei gruppi spaziali, poiché abbiamo posizioni 4 sia con simmetria $\bar{1}$ sia con simmetria 2 (per il $P4/n$) o *mm* (per il $P4/nmm$), ma l'interpretazione dei massimi principali delle rispettive sintesi di Patterson (distanze Ni–Ni) è possibile solo disponendo gli atomi di Ni in posizione $\bar{1}$, il che comporta la scelta della coordinazione planare.

Il polimorfismo non è dunque legato a profonde differenze di struttura molecolare, come infatti era da attendersi per la stretta analogia delle tre forme cristalline.

Ringraziamo il laureando sig. Carlo Maria Gramaccioli per il valido aiuto prestatoci nelle misure ottiche.

Bibliografia.

[1] G. Peyronel, « Z. Krist. », *103*, 139 (1940).
[2] G. Pyronel, ibid., *103*, 157 (1940).
[3] « Structure Reports », *8*, 326 (1940–41).

Chimica inorganica. — *Sulla struttura del* Co^{III}*–esacianuro di* Co^{II}. Nota di ALESSANDRO VACIAGO e ANGELO MUGNOLI (*), presentata (**) dal Socio L. CAMBI.

Poche ricerche cristallografiche sono state sino ad ora effettuate sulla struttura dei sali del cobalticianuro: ricordiamo il $K_3Co(CN)_6$ [1, 2] e il $Cu_3[Co(CN)_6]_2$ [3].

Sono invece ben note le analoghe ricerche sui ferro e ferri–cianuri di cationi bi– e tri–valenti, sia puri sia in presenza di cationi monovalenti [4–11].

Essi sono isomorfi tra di loro, monometrici con reticolo F, gruppo spaziale O_h^5–Fm 3 m e lato della cella elementare di circa 10 Å. Gli atomi di Fe^{II} o Fe^{III} che dovrebbero formare gli anioni coordinando ottaedricamente sei radicali CN^- si alternano con i cationi bi–, o tri–valenti, occupando rispettivamente le posizioni 4 (*a*) e 4 (*b*) del gruppo spaziale. Quando sono presenti cationi in numero maggiore, cioè in tutti i casi all'infuori dei ferricianuri di metallo trivalente, i cationi che non trovano posto nella posizione 4 (*b*) sono in posizione 8 (*c*), eventualmente con distribuzione statistica se in numero minore di 8.

I 24 radicali CN^- che entrano nella cella elementare sono in posizione 24 (*e*): la loro localizzazione è naturalmente difficile in presenza degli atomi di metallo, anche perché si hanno a disposizione solo spettri di polveri, data la impossibilità di ottenere questi composti in forma di cristallo singolo, ma i ricercatori citati concordano nel disporre i radicali CN^- con il baricentro equidistante dall'atomo di Fe^{II} o Fe^{III} in posizione 4 (*a*) e dall'atomo di metallo in posizione 4 (*b*). La struttura che ne risulta è altamente simmetrica, di tipo polinucleare, tale da suggerire l'idea di un polimero inorganico o supercomplesso. Per alcune di queste sostanze, e precisamente per i cianuri blu ferroso–ferrici, l'ipotesi di una struttura polinucleare era già stata avanzata per via diversa dalla cristallografica da L. Cambi, H. Reihlen e coll. [12–16].

Discussa è invece la localizzazione delle molecole dell'acqua sempre associata a questi composti, ma sembra stabilito [17] che i ferro– e i ferri–cianuri non formano idrati definiti e quindi che non si può parlare di localizzazione cristallografica dell'acqua.

Nel corso di una ricerca sistematica da noi eseguita [18] si è osservato che anche i cobalticianuri di manganese, ferro, cobalto, nichel, rame [3] e zinco bivalenti rientrano in questo schema: gli spettri di polveri (non è possibile ottenere cristalli singoli) sono infatti del tutto analoghi, anche come distribuzione di intensità, a quelli dei ferro– e ferri–cianuri sopra men-

(*) Centro Studi di Chimica Metallurgica del CNR, Università degli Studi di Milano.
(**) Nella seduta del 13 dicembre 1958.

zionati. Invece il $K_3Co(CN)_6$ ha, come era da attendersi, struttura diversa e precisamente con cella elementare monoclina [1, 2].

In particolare, per il $Co_3[Co(CN)_6]_2$ considerato in questa Nota, i risultati cristallografici sono riassunti in Tabella I.

TABELLA I.

$Co_3[Co(CN)_6]_2$	Radiazione: FeK_α

reticolo cubico a facce centrate [1]

gruppo spaziale: O_h^5–Fm 3 m [2]

$a_o = 10{,}20$ Å

$V = 1061{,}21 \cdot 10^{-24}$ cm^3

peso molecolare: 606,916

molecole per cella: 2

$d_{calc.} = 1{,}90$ g cm^{-3}

$d_{oss.} = 1{,}80$ g cm^{-3} [3]

F (000) = 582

$\mu_{FeK_\alpha} = 87{,}36$ cm^{-1}

(1) Le righe osservate sono 24 ($\sin \vartheta_{max} = 0{,}9655$), indicizzate tutte senza ambiguità. Il valore di a_o è mediato sui riflessi a indici più elevati.

(2) Dalle estinzioni e da considerazioni sulle posizioni equivalenti necessarie per distribuire gli atomi pesanti in accordo con le intensità osservate, si deduce che sono possibili i gruppi spaziali: O_h^5–Fm3m e T_h^3–Fm3. La nostra struttura ha comunque la più alta di queste due simmetrie.

(3) Determinata su campione disidratato, con il metodo di Tschapek [19], usando xilene come liquido picnometrico. La misura è critica e poco precisa, ma sufficiente a fissare il numero di molecole per cella unitaria.

In Tabella II sono riportate le 24 righe osservate, corrispondenti a 32 riflessi indipendenti. Non è riportato l'andamento generale qualitativo delle intensità, ma esso è del tipo osservato da Weiser e coll. [10] e corrisponde appunto alla disposizione degli atomi pesanti: 4 Co in 4 (*a*), 4 Co in 4 (*b*), 2 Co (con distribuzione statistica) in 8 (*c*).

I radicali CN^- sono in posizione 24 (*e*): la sola variabile è il parametro x. La struttura è illustrata in fig. 1. Sono stati calcolati e riportati in Tabella II i fattori di struttura e le intensità [1] (seguendo così la consuetudine di

(1) I valori di $I_{calc.}$ sono stati calcolati con l'espressione

$$I = j \frac{1 + \cos^2 2\vartheta}{2} \cdot \frac{1}{2 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta} F^2 \cdot A(\vartheta)$$

cioè tenendo conto di tutti i fattori in gioco, escluso quello di temperatura.

confrontare le intensità anziché i fattori di struttura, nel caso del metodo delle polveri) per una struttura « simmetrica » analoga a quella accettata per i cianuri con struttura isomorfa alla nostra $\left(x_C = \frac{7}{36} a_o \ , \ x_N = \frac{11}{36} a_o \ [10]\right)$.

Osserviamo:

a) Pur rispettando l'andamento qualitativo generale delle intensità osservate, le intensità calcolate variano da 1 a 40.000 con esagerata esaltazione dei riflessi a indici pari: ciò deriva dall'alta simmetria della struttura considerata, poiché i riflessi a indici dispari dipendono solo dai contri-

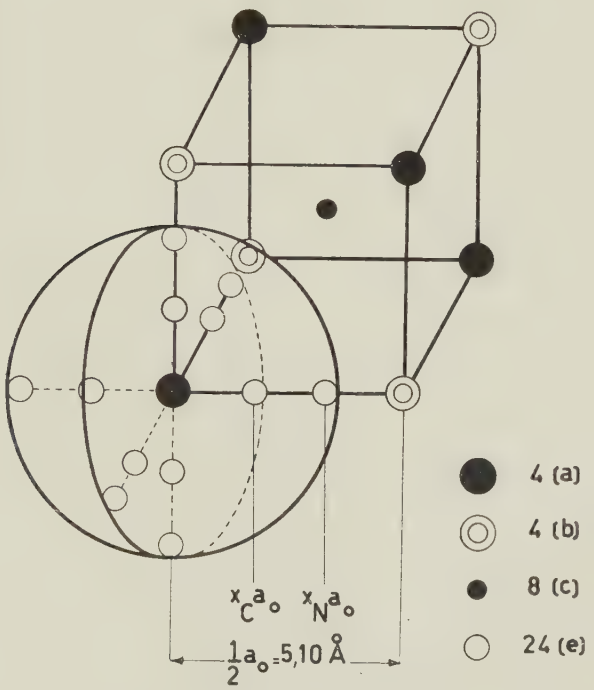


Fig. 1.

buti del carbonio e dell'azoto, i quali sono relativamente piccoli, prossimi in valore assoluto e, per questa particolare ipotesi di struttura, di segno contrario.

I valori sperimentali dell'intensità dei riflessi a indici dispari sono invece relativamente più elevati, per esempio $I_{311} > I_{222}$, e spiegabili solo spostando il radicale CN^- dalla posizione di alta simmetria ipotetizzata. L'esatta valutazione dell'intensità di questi riflessi (problema di non facile soluzione sperimentale) è della massima importanza al fine della localizzazione del radicale CN^-.

b) Questa struttura porta alle poco attendibili distanze: Co—C = 1,98 Å, C—N = 1,14 Å, N—Co = 1,98 Å.

TABELLA II.

h k l	$I_{oss.}$	$F_{calc.}$		$I_{calc.}$	
		struttura « ionica »	struttura « simmetrica »	struttura « ionica »	struttura « simmetrica »
111	268	48,78	— 9,43	63	103
200	6607	254,36	249,85	950	40215
220	3889	190,96	184,46	543	22228
311	194	8,15	1,85	1+	3
222	141	— 12,72	— 20,61	1	115
400	2910	326,33	323,36	354	15227
420	1426	140,76	135,70	208	8467
422	458	121,46	114,89	125	4907
511	—	2,34	— 13,64	2	111
333		— 27,40	21,31		
440	711	234,02	229,36	173	7274
442	494	86,64	80,91	90	4276
600		182,90	206,29		
620	561	171,08	191,62	154	8491
622	—	36,48	54,36	6	636
444	—	175,10	171,06	46	1934
640	—	132,93	151,40	76	4359
642	—	126,71	142,76	131	7394
644	—	93,47	110,19	78	2793
820		102,14	58,77		
660	—	168,97	201,32	104	4399
822		99,04	54,42		
662	—	58,87	88,14	17	1671
840	—	176,25	137,75	165	4423
753	—	9,76	1,16	2	1
911		— 14,97	— 1,49		
664	—	133,40	163,21	110	7230
755	—	10,46	— 2,13	47	6
771		52,46	1,46		
933		— 40,89	2,83		
862	—	111,12	86,69	507	23209
1020		112,82	155,11		

Le intensità sia osservate sia calcolate sono su tre diverse scale relative arbitrarie. Delle intensità osservate sono riportati solo i valori determinati quantitativamente: dell'andamento qualitativo è detto nel testo.

c) Il comportamento chimico e le proprietà magnetiche del cobalticianuro cobaltoso dimostrano che esso ha inequivocabilmente struttura « ionica » con un rapporto $3\,Co^{II}/2\,Co^{III}$ [20].

Facciamo notare che almeno le osservazioni *a*) e *b*) valgono anche per le citate ricerche sulla struttura dei ferri– e ferro–cianuri, rendendo così discutibile non l'ipotesi del complesso polinucleare, che si regge per alcuni di essi su altre considerazioni, ma la sua presunta conferma cristallografica.

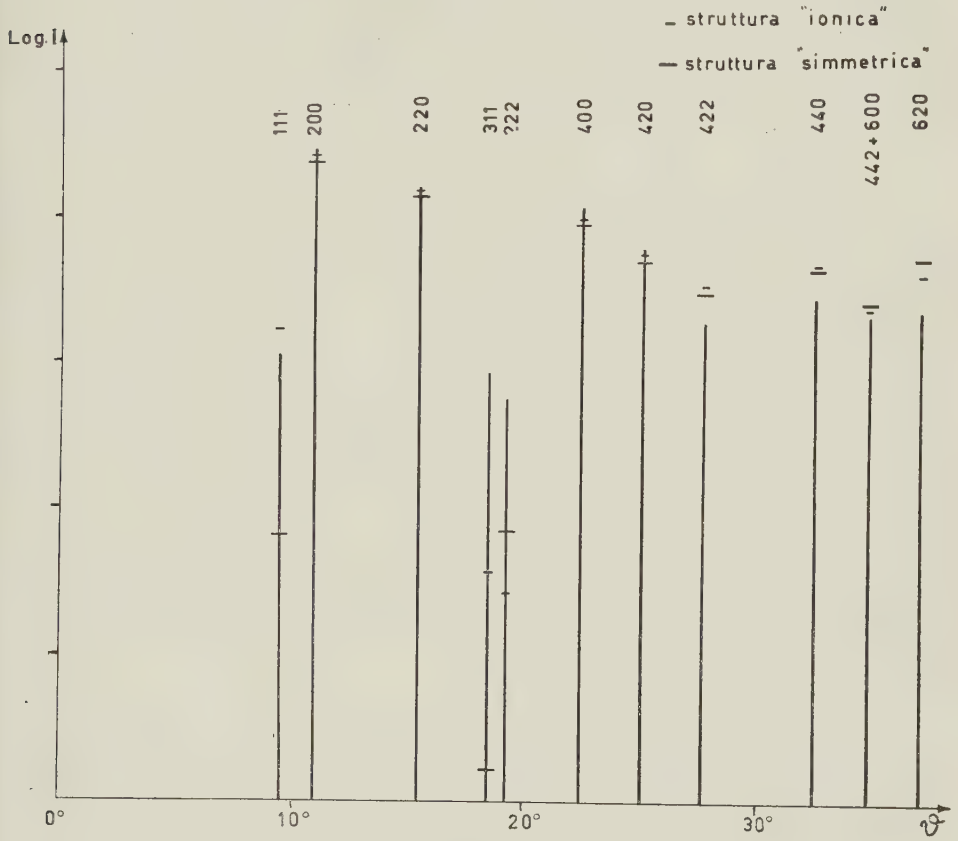


Fig. 2.

La presente Nota ha appunto lo scopo non di risolvere con esattezza la struttura del $Co_3[Co(CN)_6]_2$, *ma di mostrare che una struttura « ionica », anche con distanze di legame molto approssimative, è più attendibile della struttura « simmetrica » sin qui accettata per tutti i composti di questo tipo.*

Abbiamo a questo scopo valutato con alta precisione (conteggio al diffrattometro) il rapporto I_{311}/I_{222} e trovato che, fissata una distanza di legame C—N di 1,16 Å come media dei migliori valori sperimentali [21–24], questo rapporto corrisponde a una distanza di legame Co—C di 1,59 Å. In Tabella II sono riportati i valori dell'intensità di 11 righe, corrispondenti a 12 riflessi (determinati con metodi diversi, come microdensitometria dei fotogrammi,

registrazione al diffrattometro e conteggio, ma corretti e rapportati alla stessa scala arbitraria), nonché i fattori di struttura e le intensità calcolate per la struttura « ionica » corrispondente alle distanze di legame menzionate, e quindi con parametri $x_C = 0{,}156$, $x_N = 0{,}270$.

In questa struttura sono ben differenziati gli ioni $[Co(CN)_6]^{3-}$ e Co^{2+}.

In fig. 2 è rappresentato l'andamento delle intensità osservate e calcolate. Si nota che, rispetto alla struttura « simmetrica », la struttura da noi proposta comporta un miglioramento in ben 9 righe su 11. Per le righe deboli la struttura « ionica » rispetta, a differenza di quella « simmetrica », i rapporti tra le intensità, e migliora la corrispondenza tra valori calcolati e valori sperimentali, anche se essa è ancora poco buona. Inoltre le intensità calcolate variano da 1 a 950, avvicinandosi all'intervallo di variazione osservato sperimentalmente.

Concludendo, i risultati presentati in questa Nota sono:

a) È stata indicata la via per determinare in una seconda fase della ricerca la struttura del Co^{III}–esacianuro di Co^{II} nei suoi dettagli: essa è certamente di tipo « ionico », ma le distanze di legame devono essere rideterminate con maggior precisione, tenendo conto di tutte le intensità osservate (la loro esatta valutazione presenta una certa difficoltà sperimentale), nonché di altri effetti, come l'eventuale presenza di molecole di H_2O in posizione cristallograficamente definita e il diverso potere di diffusione dei raggi X per il Co^{2+} e per il cobalto coordinante i radicali CN^-. La distanza di legame Co—C dovrà così presumibilmente risultare più lunga del valore di 1,59 Å da noi dato in questa Nota.

b) Sono state presentate considerazioni che inficiano la completa validità della struttura sinora accettata per gli altri cianuri complessi isomorfi con il $Co_3[Co(CN)_6]_2$, ma nello stesso tempo indicata la via per una nuova, più accurata determinazione.

Ringraziamo il prof. L. Cambi per averci suggerito questa ricerca. I campioni da noi esaminati ci vennero favoriti dalla sig.na dott.ssa E. Paglia cui siamo grati, e corrispondono alle preparazioni già rese note da E. Paglia e C. Sironi [20].

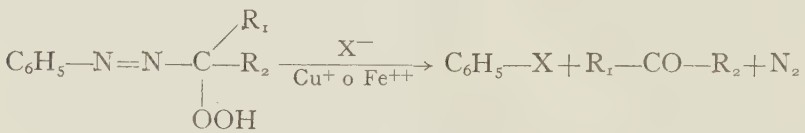
Bibliografia.

[1] V. Barkhatov e H. Zhdanov, « Acta Physicochim. U.R.S.S. », *16*, 43 (1942).
[2] V. Barkhatov, ibid., *16*, 123 (1942).
[3] M. A. Rollier e E. Arreghini, « Gazz. chim. ital. », *69*, 499 (1939).
[4] J. F. Keggin e F. D. Miles, « Nature », *137*, 577 (1936).
[5] R. Rigamonti, « Gazz. chim. ital. », *67*, 137 (1937).
[6] R. Rigamonti, ibid., *67*, 146 (1937).
[7] R. Rigamonti, ibid., *68*, 803 (1938).
[8] R. Rigamonti, ibid., *68*, 809 (1938).
[9] A. K. Van Bever, « Rec. Trav. chim. Pays-Bas », *57*, 1259 (1948).
[10] H. B. Weiser, W. O. Milligan e J. B. Bates, « J. Phys. Chem. », *46*, 99 (1942).
[11] G. B. Barton, J. L. Hepworth, E. D. McClanahan jr., R. L. Moore e H. H. Van Tuyl, « Ind. Eng. Chem. », *68*, 212 (1958).

[12] L. CAMBI e A. CLERICI, « Rend. Acc. Lincei », *6*, 79 (1927).
[13] H. REIHLEN e W. ZIMMERMANN, « Ann. », *451*, 75 (1927).
[14] L. CAMBI e A. CLERICI, « Gazz. chim. ital. », *58*, 57 (1928).
[15] L. CAMBI, ibid., *77*, 575 (1947).
[16] L. CAMBI, E. BERTORELLE e C. MARZORATI, ibid., *78*, 448 (1948).
[17] H. B. WEISER, W. O. MILLIGAN e J. B. BATES, « J. Phys. Chem. », *45*, 701 (1941).
[18] A. VACIAGO e A. MUGNOLI, lavoro in corso di stampa.
[19] M. W. TSCHAPEK, « Kolloid. Z. », *63*, 343 (1933).
[20] E. PAGLIA e C. SIRONI, « Gazz. chim. ital. », *88*, 541 (1958).
[21] C. H. TOWNES, A. N. HOLDEN e E. F. R. MERRITT, « Phys. Rev. », *74*, 113 (1948).
[22] W. GORDY, « Rev. Mod. Phys. », *20*, 668 (1948).
[23] H. M. POWELL e G. W. R. BARTINDALE, « J. Chem. Soc. », 799 (1945).
[24] R. HULME e H. M. POWELL, « J. Chem. Soc. », 719 (1957).

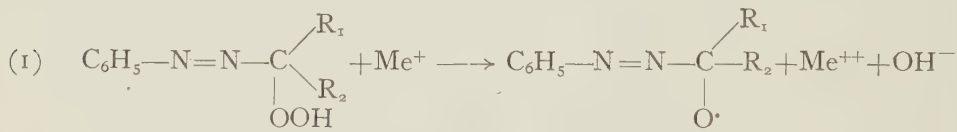
Chimica organica. — *Perossidi e sali di diazonio: Reazione di Meerwein. Alo-arilazioni e arilazioni con perossidi di fenilidrazoni* (*). Nota di Francesco Minisci, presentata (**) dal Socio A. Quilico.

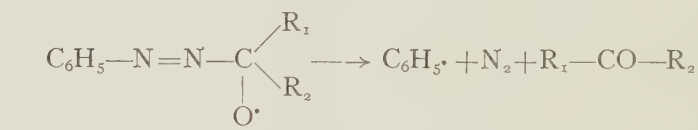
In un recente lavoro [1] ho mostrato come la reazione Sandmeyer dei sali di diazonio trovi corrispondenza pressoché perfetta nei perossidi di fenilidrazoni

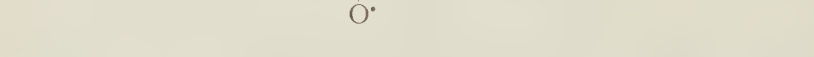


$$X = Cl, Br, I, SCN, N_3 \text{ etc.}$$

Responsabile di questo comportamento è, a mio avviso, la formazione di radicali fenilici determinata dal trasferimento di un elettrone ad opera del sale rameoso o ferroso







Questi risultati costituiscono l'elemento più probante e forse decisivo a favore di un meccanismo radicalico della reazione di Sandmeyer. L'obiezione principale a tale meccanismo è costituita dal fatto che la reazione di Sandmeyer non può, almeno normalmente, essere utilizzata per iniziare polimerizzazioni radicaliche; è questa la caratteristica più saliente di una sorgente di radicali liberi.

Decomponendo un sale di diazonio in condizioni analoghe a quelle della reazione di Sandmeyer in presenza di una olefina coniugata si ottengono i prodotti di alo-arilazione e non si ha polimerizzazione dell'olefina. Meerween [2] infatti, riallacciandosi alla reazione di Quilico [3] dei sali di diazonio con composti propenilici, trovò che l'azione dei sali di diazonio su

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale del Politecnico di Milano.
(**) Nella seduta del 13 dicembre 1958.

olefine coniugate in presenza di cloruro rameico si risolve in una cloro-arilazione dell'olefina

$$ArN_2Cl + CH_2{=}CH{-}R \xrightarrow{CuCl_2} Ar{-}CH_2{-}CHCl{-}R\,.$$

Ora ho trovato che, decomponendo un perossido di fenilidrazone con sali rameosi o ferrosi in presenza di una olefina coniugata e acido cloridrico, si ottengono i corrispondenti prodotti di cloro-fenilazione

$$C_6H_5{-}N{=}N{-}C(R_1)(R_2)(OOH) + CH_2{=}CH{-}R \xrightarrow[Cu^{+} \text{ o } Fe^{++}]{Cl^{-}} C_6H_5{-}CH_2{-}CHCl{-}R +$$

$$+ R_1{-}CO{-}R_2 + N_2$$

$$R = CN\,,\ COOR^1\,,\ C_6H_5 \text{ etc.}$$

Le due reazioni, quella di Meerwein e questa da me trovata, procedono in maniera perfettamente analoga anche se in apparenza l'azione catalitica è diversa, nell'un caso dovuta a sale rameico nell'altro a sale rameoso o ferroso. Il carattere radicalico della reazione di Meerwein, contrariamente alla reazione di Sandmeyer, risultava con buona evidenza dal modo in cui avveniva l'addizione al doppio legame dell'olefina, che escludeva in molti casi il meccanismo ionico suggerito primieramente da Meerwein. Così ad esempio per derivati acrilici un'addizione ionica dovrebbe portare a β-cloro-derivati $C{=}C{-}C{=}O$, mentre si ottengono gli α-cloro-β-fenilderivati [4]. Recenti studi [5] hanno chiarito per la reazione di Meerwein sia l'azione del sale rameico che la specificità del solvente di reazione, l'acetone; è stato mostrato che l'azione catalitica è da imputare al sale rameoso che si origina da acetone e cloruro rameico.

$$2\,CuCl_2 + CH_3{-}CO{-}CH_3 \longrightarrow 2\,CuCl + ClCH_2{-}CO{-}CH_3 + HCl$$

il cloroacetone infatti si ritrova normalmente tra i prodotti di reazione. Il cloruro rameoso a sua volta agirebbe sul sale di diazonio secondo quanto suggerito da Waters per la reazione di Sandmeyer

$$ArN_2^{+} + Cu^{+} \longrightarrow Ar\cdot + N_2 + Cu^{++}$$

e successivamente il radicale arilico per interazione con l'olefina originerebbe un radicale aralchilico

$$Ar\cdot + CH_2{=}CH{-}R \longrightarrow Ar{-}CH_2{-}\dot{C}H{-}R$$

che col cloruro rameico darebbe luogo al prodotto di cloro-arilazione ripristinando il sale rameoso

$$Ar{-}CH_2{-}\dot{C}H{-}R + CuCl_2 \longrightarrow Ar{-}CH_2{-}CHCl{-}R + CuCl\,.$$

Secondo questa interpretazione il radicale aralchilico preferirebbe interagire con il sale rameico anziché con un'altra molecola di olefina per iniziare la polimerizzazione

$$Ar—CH_2—\dot{C}H—R + CH_2=CH—R \longrightarrow Ar—CH_2—\underset{\displaystyle R}{CH}—CH_2—\dot{C}H—R.$$

È proprio su questo punto che furono sollevati dei dubbi sull'andamento della reazione. L'esame dei risultati da me ottenuti con perossidi di fenilidrazoni contribuisce a fugare tali dubbi sopratutto in virtù del fatto che si possono indifferentemente usare come catalizzatori sali ferrosi oltre che rameosi. Così decomponendo il perossido di fenilidrazone con solfato ferroso in assenza di sostanze capaci di interagire per via radicalica ho ottenuto difenile proveniente evidentemente da una dimerizzazione del radicale fenile originatosi secondo (1) e (2)

$$2\ C_6H_5\cdot \longrightarrow C_6H_5—C_6H_5.$$

È questo un indice altamente indicativo sulla reale formazione di radicali fenilici; caratteristica questa comune alla reazione di Sandmeyer, di Meerwein e in genere alle sorgenti di radicali fenilici. Decomponendo il perossido nelle stesse condizioni in presenza di una olefina polimerizzabile, ad esempio acrilonitrile, ho ottenuto la rapida polimerizzazione di questo ultimo; ulteriore prova questa che si ha formazione di radicali liberi

(4) $$C_6H_5\cdot + CH_2=CH—CN \longrightarrow C_6H_5—CH_2—\dot{C}H—CN$$

(5) $$C_6H_5—CH_2—\dot{C}H—CN + CH_2=CH—CN \longrightarrow$$

$$\longrightarrow C_6H_5—CH_2—\underset{\displaystyle CN}{CH}—CH_2—\dot{C}H—CN \text{ etc.}$$

Operando invece in presenza di acido cloridrico e restando immutate le altre condizioni di reazione ho trovato che non si verifica polimerizzazione ma si ottiene il prodotto di cloro-fenilazione; evidentemente in queste condizioni il radicale aralchilico originatosi secondo (4) non è più in grado di interagire secondo (5) ed iniziare la polimerizzazione, ma viene bloccato dal cloruro ferrico.

$$C_6H_5—CH_2—\dot{C}H—CN + FeCl_3 \longrightarrow C_6H_5—CH_2—CHCl—CN + FeCl_2.$$

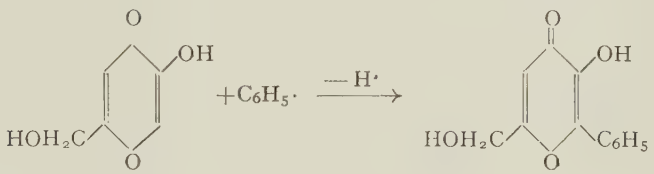
In questo modo la reazione di Meerwein dei sali di diazonio e la reazione dei perossidi di fenilidrazoni da me trovata procederebbero secondo uno stesso meccanismo che comporta un trasferimento di un elettrone con conseguente formazione di un radicale arilico, una interazione di quest'ul-

timo con l'olefina per dar luogo ad un radicale aralchilico ed infine formazione del cloroderivato per azione del cloruro di rame o di ferro.

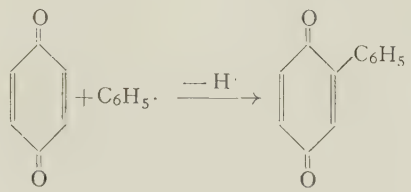
La differenza fondamentale sta nel fatto che mentre con i sali di diazonio il trasferimento di un elettrone avviene esclusivamente ad opera di sali rameosi, con i perossidi di fenilidrazoni può essere realizzato con sali rameosi e ferrosi, ciò può dipendere dai rispettivi potenziali di ossido–riduzione e forse anche dal fatto che con i sali di diazonio il trasferimento di un elettrone avviene previa formazione di un complesso con il sale di rame

$$ArN_2^+ + CuCl_2^- \longrightarrow [ArN_2CuCl_2] \longrightarrow Ar\cdot + N_2 + CuCl_2 .$$

Ulteriore conferma di questo comportamento dei perossidi di fenilidrazoni l'ho avuta usandoli come agenti di fenilazione di sostanze già arilate con sali di diazonio. Così A. Quilico [6] in particolari condizioni ha ottenuto aril–derivati dell'acido kojco per azione di sali di diazonio sull'acido; io ho trovato che decomponendo con sale ferroso un perossido di fenilidrazone in presenza di acido kojco si ottiene il fenil derivato



Risultati analoghi ho ottenuto con altre sostanze già fenilate con sali di diazonio, come ad esempio i chinoni [7], che reagiscono facilmente con radicali liberi come risulta dalla loro azione inibitrice nelle polimerizzazioni radicaliche [8]; la decomposizione con sale ferroso di un perossido di fenilidrazone in presenza di benzochinone porta al fenilderivato



In definitiva i risultati da me raggiunti con i perossidi di fenilidrazoni chiariscono alcuni aspetti del meccanismo della reazione di Meerwein, confermano il carattere radicalico della reazione di Sandmeyer e indicano come questi idroperossidi, facilmente preparabili per autossidazione di fenilidrazoni, costituiscano una nuova sorgente di radicali fenilici, che presenta rispetto ad altre sorgenti di radicali arilici il vantaggio di poter operare a temperature relativamente basse (— 20°–0°).

Bibliografia.

[1] Comunicazione al Congresso Nazionale di Chimica, Torino 28 maggio–2 giugno (1958).
[2] « J. prakt. chem. », *152*, 237 (1939).
[3] « Gazz. Chim. Ital. », *58*, I, 380 (1928); *59*, II, 600 (1929); *59*, I, 39 (1929).
[4] C. F. Koelsch e V. Boekelheide, « J. Am. Chem. Soc. », *66*, 412 (1944).
[5] J. K. Kochi, « J. Chem. Soc. », *77*, 5090, 5274 (1955); *78*, 1228, 4815 (1956); *79*, 2942 (1957); S. C. Dickerman, K. Weiss e A. K. Ingberman, « J. Org. Chem. », *21*, 380 (1956); *22*, 1070 (1957); « J. Am. Chem. Soc. », *80*, 1904 (1958).
[6] « Gazz. Chim. Ital. », *74*, 26 (1942).
[7] G. B. Marini Bettolo, « Gazz. Chim. Ital. », *71*, 627 (1941); *72*, 208 (1942).
[8] C. Walling, *Free Radicals in Solution*, New York, John Wiley sons, inc., pp. 75, 165 (1957).

Chimica biologica. — *Ricerche sulle adenilato chinasi* (*). Nota di Paolo Cerletti, Clara Fronticelli ed Enrico Bucci, presentata (**) dal Corrisp. A. Rossi-Fanelli.

L'enzima che catalizza la reazione 2 ADP $\rightleftharpoons$ AMP + ATP (1), adenilato chinasi, ha una notevole importanza per la regolazione dell'equilibrio tra ADP e ATP e perché permette di utilizzare il legame ricco di energia dell'ADP.

L'adenilato chinasi del muscolo (miochinasi) è stata recentemente cristallizzata da Noda e Kuby [1] e ne sono state studiate le proprietà. Si trovano in letteratura segnalazioni sporadiche sulla presenza di questo enzima in altri tessuti, ma mancano dati sicuri sulla sua distribuzione e sulle sue caratteristiche tanto che Colowick [2] scrive: «A systematic investigation of distribution and stability of the enzyme would be desirable».

Questa scarsezza di dati è attribuibile alla difficoltà pratica di determinare ATP, AMP ed ADP in presenza l'uno dell'altro. Recentemente abbiamo descritto un metodo [3] che permette la separazione dei nucleotidi adenosinici da miscugli e la loro determinazione quantitativa anche in quantità di microgrammi. Ci è stato così possibile intraprendere uno studio sistematico delle adenilato chinasi.

In questa prima Nota riportiamo i risultati ottenuti sul fegato e sul sangue.

Parte sperimentale.

L'ADP commerciale è purificato mediante cromatografia su Dowex X 2 secondo Cohn e Carter [4]. Il prodotto cromatograficamente puro è liberato dai sali minerali per adsorbimento su Norite ed eluzione con acqua, alcool, NH_3 (54 : 45 : 1) come descritto in precedenza [5].

Il miscuglio di incubazione contiene 1 μM ADP 0,1 ml $MgCl_2$ 0,014 M, 0,25 ml tampone dietilbarbiturato 0,0356 M al pH voluto, un volume della preparazione enzimatica pari a 0,2 mg di proteine, determinate con la reazione del biureto. Il volume finale è portato a 0,7 ml con H_2O. Per gli esperimenti sul sangue di omette l'$MgCl_2$ ed il preparato enzimatico usato corrisponde ad una quantità di materiale iniziale che contenga 5 mg emoglobina.

L'incubazione è eseguita a 37° C per 8′ con agitazione costante e la reazione arrestata riscaldando a b. m. bollente per 2′. Il pH è controllato prima e dopo l'incubazione. Il miscuglio di reazione viene centrifugato: 0,01 ml

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Biologica dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1958.

(1) Nel presente articolo vengono utilizzate le seguenti abbreviazioni: ATP = adenosintrifosfato, ADP = adenosindifosfato, AMP = adenosin 5′ monofosfato.

del sopranatante sono analizzati mediante cromatografia discendente su carta e i composti separati sono determinati con la reazione dell'orcinolo dopo eluzione, come descritto in un lavoro precedente [3]. In prove di controllo eseguite senza l'aggiunta del preparato enzimatico non si è riscontrata idrolisi del substrato.

TABELLA I.

Attività adenilato chinasica di emolisati di emazie lavate privi di stromi.

0,3 ml tampone dietilbarbiturato 0,0356 M pH 8,9, 2 μM ADP, 0,1 ml emolisato contenente il 10 % di emoglobina; volume finale 1 ml. Incubazione per 8' a 37°

	μM recuperate		
	ATP	ADP	AMP
Uomo	0,41	0,77	0,87
Cavallo	0,54	0,74	0,71
Bue	0,50	1,02	0,57
Maiale	0,50	0,69	0,86

L'attività adenilato chinasica del fegato di ratto è stata studiata separatamente nei vari costituenti cellulari: i nuclei, isolati secondo il procedimento di Hogeboom e coll. [6] i mitocondri preparati secondo Hogeboom [7] e la frazione non sedimentabile a 5.100 × g residua alla centrifugazione dei mitocondri (« sopranatante »). Le preparazioni così ottenute sono diluite con H_2O bidistillata fino a 2,5 mg proteine per ml. Nuclei e mitocondri sono poi congelati 2 volte a —20° C e sgelati in modo da disorganizzare le strutture.

Dalla fig. 1 si vede che l'attività adenilato chinasica è presente in tutte tre le frazioni cellulari sopra descritte: nei mitocondri essa è più intensa che nei nuclei e nel « sopranatante ».

L'adenilato chinasi dei mitocondri è attivata da Mg^{++} ed è inibita da F^-.

La stabilità al calore è stata studiata riscaldando i preparati enzimatici a 50° ed a 80° C con agitazione continua. Ad intervalli di tempo variabili da 0 a 45', si preleva un'aliquota che, raffreddata rapidamente, viene incubata nelle condizioni descritte. I risultati sono riportati in fig. 1.

L'attività adenilato chinasica del sangue è stata studiata inizialmente in sangue umano reso incoagulabile per diluzione in soluzione fisiologica. L'optimum di pH è stato trovato a 8,5–9. Si sono poi studiati separatamente i vari costituenti del sangue: piastrine, leucociti, emazie, isolati per centrifugazione differenziale, siero, stromi delle emazie, isolati, dopo emolisi ed allontanamento dei leucociti, secondo il metodo di Prankard ed Altman [8]. Non si è trovata attività in piastrine, leucociti, siero e stromi delle emazie, mentre adenilato chinasi è presente nelle emazie e nell'emolisato di emazie lavate, privo degli stromi. La curva attività/pH ripetuta con questo ultimo

preparato ha confermato la cuspide a pH 9, ma ha evidenziato un optimun ben piu marcato a pH 7,4 (fig. 1). Citrato ed ossalato 0,13 N, che all'inizio sono stati impiegati per rendere incoagulabile il sangue, hanno dimostrato effetto inibitore. La stabilità termica è stata studiata a 50° C, ed i risultati sono riportati in fig. 1.

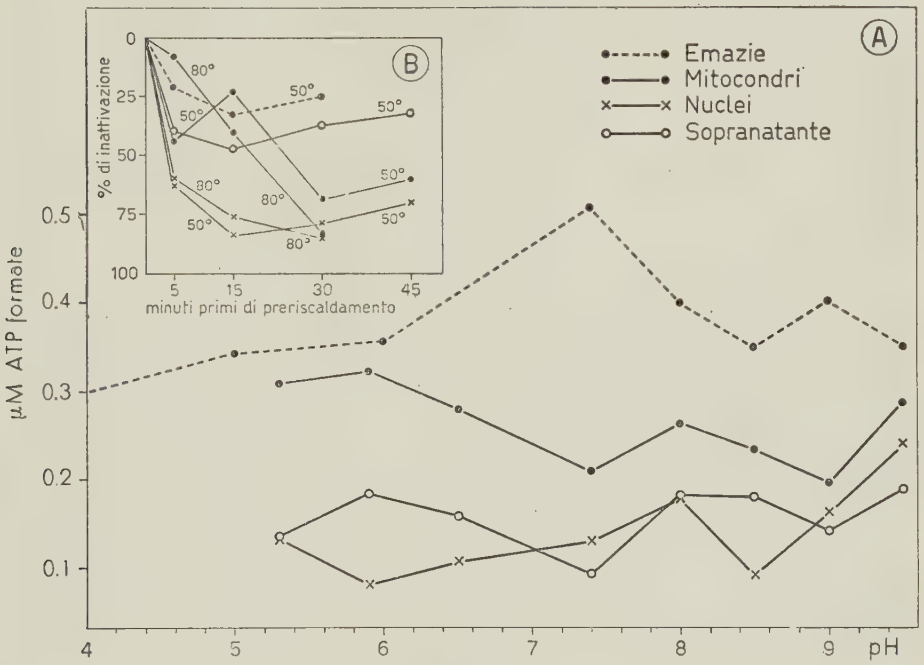


Fig. 1.

A) Attività adenilato chinasica a vari pH. Mezzo di incubazione: per le frazioni del fegato: 0,25 ml tampone dietilbarbiturato 0,0356 M; 0,1 ml $MgCl_2$ 0,014 M; 0,2 mg di proteine, 1 µM ADP; vol. finale 0,7 ml. Per le emazie: 0,30 ml tampone dietilbarbiturato 0,0356 M; 2 µM ADP e preparato enzimatico corrispondente a 10 mg d'emoglobina. Vol. finale 1 ml. Incubazione per 8' a 37°C. B) Attività adenilato chinasica ai pH ottimali residua a preriscaldamento dell'enzima per tempi diversi ed a varie temperature. Mezzo e durata d'incubazione come in A. I risultati sono calcolati sulle µM di ATP formate e riferiti all'attività dell'enzima non preriscaldato.

L'adenilato chinasi è stata riscontrata anche nell'emolisato, privo di elementi figurati e di stromi, del sangue di cavallo, di bue e di maiale. Nella Tabella I i risultati sono confrontati con quelli ottenuti su sangue umano.

Discussione.

Il metodo di analisi dei prodotti di reazione da noi utilizzato permette una determinazione diretta e rapida della attività adenilato chinasica. Evidentemente tecniche che richiedono l'uso della reazione esochinasica per determinare l'ATP o della deaminasi di Schmidt per determinare l'AMP, modificano le condizioni della reazione e fanno dipendere l'esattezza della determinazione da nuove variabili. Anche la separazione dei prodotti di reazione su resine a scambio ionico è indaginosa e poco precisa quando si lavora su piccole quantità di sostanza.

Per studiare più dettagliatamente le proprietà dell'adenilato chinasi si rende necessaria una purificazione ulteriore delle preparazioni enzimatiche usate nel presente lavoro, data la presenza in esse di enzimi che agiscono sui componenti della reazione adenilato chinasica (ATPasi, ADPasi, AMPasi nel fegato, ATPasi, AMP deaminasi nel sangue). A questi enzimi è da attribuire il fatto che nei risultati riportati non venga rigorosamente rispettata la stechiometria della reazione, ([ATP] = [AMP]). Così la presenza di due ottimi nelle curve attività/pH potrebbe essere attribuita alla trasformazione di parte dei prodotti di reazione ad opera di enzimi estranei, attivi in un ambito ristretto di pH. Preriscaldando l'enzima a 50° C si osserva una notevole inattivazione iniziale, mentre con preriscaldamenti di maggiore durata l'inattivazione sembra essere minore. Anche questo dato può essere interpretato supponendo che gli enzimi attivi sui componenti della reazione adenilato chinasica siano più termolabili della adenilato chinasi stessa.

I risultati già ottenuti permettono però di individuare alcune caratteristiche delle adenilato chinasi. Nel fegato i pH ottimali sono in genere spostati verso l'alcalinità rispetto all'optimum della miochinasi (pH 7,5), ed anche la termostabilità è minore di quella dell'enzima muscolare: infatti mentre la miochinasi perde soltanto il 50 % della attività in 30′ a 100° C in HCl 0,1 N, [2] le adenilato chinasi del fegato e del sangue vengono considerevolmente inattivate già a 50° C ed ancor maggiormente a 80° C.

L'inattivazione da fluoruro e citrato è già stata riscontrata per la miochinasi, e così l'attivazione da Mg^{++}. Barkulis e Lehninger [9], hanno segnalato che a pH 7,4 Mg^{++} attiva ad il fluoruro inibisce l'attività della adenilato chinasi epatica.

Bibliografia.

[1] Noda L. and Kuby S. A., « J. Biol. Chem. », *226*, 541 (1957).
[2] Colowick S. P., in *Methods in Enzymol* (Colowick e Kaplan ed.) vol. II, p. 602, Academic Press, New York, 1955.
[3] Cerletti P., Siliprandi N. and Ipata P. L., « Analyt. Chim. Acta », *16*, 548 (1957).
[4] Cohn W. E. and Carter C. E., « J. Am. Chem. Soc. », *72*, 4273 (1950).
[5] Cerletti P., Aebischer M. L. e Fronticelli C., « Ric. Scient. », *28*, 2052 (1958).
[6] Hogeboom G. H., Schneider W. C. and Striebich M. J., « J. Biol. Chem. », *196*, 111 (1952).
[7] Hogeboom G. H., in *Methods in Enzymol.* (Colowick e Kaplan ed.), vol. I, p. 16, Academic Press, New York, 1955.
[8] Prankard T. A. and Altman K. I., « Biochem. J. », *58*, 622 (1954).
[9] Barkulis S. S. and Lehninger A. L., « J. Biol. Chem. », *190*, 339 (1951).

Botanica. — *Nuovi dati sulla sistematica dell'*Abies nebrodensis (*Lojac.*) *Mattei*. Nota (*) di ALBINA MESSERI, presentata (**) dal Socio A. CHIARUGI.

L'Abete endemico delle alte montagne della Sicilia, *Abies nebrodensis* (Lojac.) Mattei, è una entità in via di scomparsa, che alcuni Autori recenti considerano addirittura come estinta. Di particolare interesse mi sembra quindi il compito che mi sono assunta di raccogliere metodicamente i rilievi sistematici e geobotanici che si possono ancora effettuare sulle poche piante di questa splendida gemma della nostra flora e che sono ancora oggi effettivamente superstiti sulle Madonie. In questa prima Nota riferisco sulla sistematica e su alcune caratteristiche morfologiche da me rilevate sul vivente, in una gita appositamente effettuata a Polizzi Generosa e nel vicino « Vallone della Madonna degli Angeli », nel giugno scorso e che mi hanno portata a redigere una più precisa e completa diagnosi del taxon.

Già nel 1899 il Trabut (1), in una Memoria sull'*Abies numidica*, accenna all'interesse che avrebbe uno studio dell'Abete delle Nebrodi colla convinzione che tale studio porterebbe alla distinzione sistematica di questa entità dal tipo.

Ma la prima descrizione botanica a carattere seistematico, che si riferisca soltanto all'Abete siciliano, è quella del Gussone (1884) e conviene trascriverla qui per poterla confrontare sia con la descrizione dell'Abete bianco tipico, sia con le diagnosi successive e discriminative della nuova entità.

Ecco come ce la descrive il Gussone (2):

« A pectinata DC. A. foliis planis solitaris pectinatis emarginatis subtus albo–bilineatis, strobili cylindracei erecti squamis adpressis obtusissimis bractea obovato–cuneata apice

(*) Fondazione Filippo Parlatore per lo studio della Flora della Vegetazione Italiana, presso l'Erbario Centrale Italiano dell'Università di Firenze, sotto gli auspici del Consiglio Nazionale delle Ricerche: pubblicazione n. 10. Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Messina.

(**) Nella seduta dell'8 novembre 1958.

(1) L. TRABUT, *L'Abies numidica, détermination de ses affinités avec les Abies Méditerranéens*, « Rev. Gen. de Bot. », *1*, 405–414 (1889); a p. 408: « L'abondance de l'hypoderme dans les feuilles des formés méridionales de l'*Abies pectinata* (*A. Equi–Trojani*, et var. du mont Athos) indique déjà l'influence du climat méditerranéen sur une espèce dont la zone confine avec celle des types franchement méridioneaux *A. cephalonica* etc.) et il serait intéressant l'examiner la structure de la feuille de l'*Abies pectinata* (Parlat.) des Nebrodes; Parlatore, qui a réunie les sapins méditerranéens à l'*Abies pectinata* (Prodr. Vol. 16), déclare du reste n'avoir pas vu le Sapin des Nebrodes en fruit; d'après Mr. Stobl cette espèce tend à disparaître de la Sicile et n'y fructifie même plus, il se pourrait très bien, étant donné l'analogie de la flore du Djurjura et des Babor avec celle des Nebrodes, que l'Abies de la Sicile soit un *Abies numidica* ou une forme du même type ».

(2) J. GUSSONE, *Florae Siculae Synopsis*, vol. II, pars II, p. 616 (1844).

acuminata ac reflexa munitis. Pinus Picea Lin. Sp. Pl. 1420, Abies alba, seu foemina, Cup. H. Cath., p. I.

« Ic. Duham Arb. ed. 2, v. 3 t. 82, Fl. dan. 125. Abies, Matth. comm., I, p. 97.

« In elatioribus montosis; Madonie, sed nunc fere destructa. Februario, Martio.

« Arbor excelsa: rami patuli, et horizontales; inferiores longiores, ac verticillati, saepe propendentes, ideoque formam pyramidatam assumunt, superiores oppositi: folia brevissime petiolata, supra intense virentia, pollicaria: strobili 3–4 pollicares, juniores pallide viridi – flavescentes: squamae inbricatae, latissime obovatae, suffultae, bracteis adpressis apice rotundatis, et inde in acumen longum attenuatum deciduum scariosum squamas ipsas superantem productis ».

Questa diagnosi breve, ma che ha tutta la autorità del suo acutissimo Autore, non differisce per caratteri essenziali da quella del tipo quale si trova in De Candolle [3] e che qui riporto :

« Pinus Abies (Du Roi Observ. bot., p. 39). Arbor excelsa, coma pyramidali, ramis subverticillatis horizontalibus, superioribus patentissimis, ramulis suboppositis subdisticis junioribus puberulis, foliis solitariis confertis subsecundis basi tortis patentibus rigidis brevibus rectis vel curvulis et subfalcatis linearibus planis obtusis vel emarginatis aut obtuse mucronatis, supra sulco laevi longitudinali notatis (saturate viridibus), subtus juxta carinam prominentem utrinque fascia albido–argentea notatis, amentis masculis plurimis subcongestis oblongo–cylindraceis obtusis sessilibus subpendulis folio subbrevioribus, femineis in ramulorum supremorum apice solitaris erectis, cylindraceo–oblongis obtusis, bracteis suborbicularibus fimbriato–ciliatis apice longe cuspidatis, cuspide patentissimo–subreflexa, lepidiis crassiusculis subcordato–orbicularibus subintegris bractea brevioribus, strobilis erectis cylindraceis obtusis et fere truncatis, squamis e basi cuneata rotundato–dilatatis dorso prope marginem superiorem puberulo–tomentosis caducis, bractea, exerta, lineari–spathulata denticulato–cuspidata apice reflexa brevioribus, rachide recta subulata dentata, nuculis cuneatis angulatis ala latiuscula subcuneata brevioribus.

« Habitat in Montibus Europae medieae et australis a Pyreneis borealis ad Caucasum. In Pyrenaeorum hispanicorum regione montana et subalpina ad elev. 3000–5000 ped. (Willk. Colm. Webb. aliique) in Alpibus frequens utroque declivio inter 2400–4000 ped. elevationem cum P. sylvestris vel cum P. Larice sylvas efformands, interdum ad 1000 ped. descendens, rarius 4500 ped. altitud. supergradiens, in Appenninis minus frequens! et saepe culta inter 3000–4500 ped. elevationem, et in parte australi ad 5500 ped. altitudinem adscendens, in Nebrodibus Siciliae prope verticem, ad Serra dei Pini ad 6000 ped. elev. rara et raro frictifera . . . ».

Nella descrizione del Gussone è dubbio che si accenni al particolare portamento dell'Abete nebrodense, condizione che poi ha costituito un carattere distintivo per il Lojacono e il Mattei: « *Rami patuli, et horizontales* ». Le dimensioni dei coni sono ancora minori che nel tipo « 3–4 pollicares »; per il resto le due descrizioni non discordano. Egli ripete, per esempio, « *folia. . . pollicaria* » come nel tipo, mentre si sa che l'Abete nebrodense ha foglie manifestamente più brevi. Sempre riferendosi alle foglie, l'autore nota che sono « *brevissime pedicellatae* ». Effettivamente fanno l'effetto di foglie pedicellate ad una osservazione superficiale, per la torsione subbasale, completa, che esse presentano su se stesse (Tav. II, fig. 3).

(3) A. P. De Candolle, *Prodromus Systematis Universalis Regni Vegetabilis*, pars XVI, Sectio Posterior. fasc. I, p. 420. (Coniferae, Auctor Parlatore) (1864).

Il Lojacono Pojero (1904) [4] è stato il primo a riconoscere nell'abete siciliano una entità sistematica distinta ed a descriverla in maniera molto particolareggiata, classificandolo come una varietà dell'*Abies alba.*

Eccone la diagnosi:

« Arbor excelsa, ramis patulis horizont. inferior. longioribus, verticillatis adscendendo sensim brevioribus ideoque formam pyramidatam assumentibus, secundariis oppositis, foliis valde approxim. fere contiguis multiseriatis ad ramulos secondarios oppositos fere omnibus sursum verso orientibus (10 mm. lg.) rectis (non falcatis) lin. basi more petioli vix contracta et circa ipsum in pulvinum more parvuli umboni dilatata ibique laeviter contorta, supra intense viridibus, vernicosis, sulcatis, apice fere truncatis retusis subtus nervo carinante convexo juxsta carinam utrinque fascia albo-coesia percursis, margine nitido, fere nerviforme, strobilo 3-4 poll. Coni Junivenili pallide viridi-flavescente squamis imbricatis latissime obovatis suffulto, bracteis adpressis apice rotundatis et inde in acumen longum attenuatum deciduam scariosum squamas ipsas superantem productis (ex Guss. nam ego fruct, non vidi). Facies A. numidicae!

« Sulle più alte giogaie delle Nebrodi (Madonie) alla Colma dei Pini (Loc. class. Polizzi Presl! Guss.! Parl.! oggi del tutto scomparsa. Ritrovata nei Monti Cervi di Polizzi al Vallone dei Pini [5]. Luglio 1906 per le cure del Chiar. prof. Borzì comunicatagli dall'Egreg. Signorina Mirabella. Febr. Marzo).

« È una forma australe della *A. pectinata* da cui differisce profondamente per le foglie e l'abito che rammenta meravigliosamente l'*A. numidica*! però non ci è da dubitare che le squame siccome le descrive Gussone siano con la tipica appendice exerta e perciò che essa non sia la *Abies numidica*, ma una insigne forma australe locale di Sicilia dell'*A. pectinata* ».

Qualche anno dopo il Mattei (1908) [6] diagnostica l'Abete delle Madonie come una specie a sé, dandone una descrizione ancora più particolareggiata:

« Arbor excelsa, trunco basi nudo, coma ampla, expansa, parce pyramidali, ramulis junioribus glabrescentibus, perulis resina suffultis: foliis valde approximatis, fere contiguis, multiseriatis, ad ramulos secundarios oppositos fere omnibus sursum verso orientibus, nec distice pectinata (10 mm. longis), rectis, non falcatis, linearibus basi more petioli vix contracta et circa ipsum in pulvinum more parvuli umboni dilatata, ibique laeviter contorta, supra intense viridibus, vernicosis, sulcatis, apice fere truncatis, obtusis vel parce retusis, subtus nervo carinante convexo juxta carinam utrinque fascia albo-caesia percursis, margine nitido fere nerviforme: strobilo (nondum maturo) vix 70 mm. longo, ad 30 mm. lato, squamis imbricatis, obovato-rhomboideis, dorso prope marginem superiorem rufo tomentosis, 17 mm. longis, bracteis adpressis, linearis pathulatis, apice rotundatis, non obcordatis, et inde in cuspidem longam attenuatam, reflexam, productis. – Olim in Nebrodibus obvia, sed nunc fere omnino destructa » (p. 64).

È probabile che il Mattei abbia veduto esemplari adulti di abete nebrodense, giacché insiste sui particolari del portamento, dandoci anche in rapporto

(4) M. LOJACONO POJERO, *Flora Sicula*, vol. II, pars II, p. 401 (1904).

(5) Quest'indicazione di località è da temere che sia falsa, perché né carte né libri la segnano, e perché nessuna cognizione ne hanno mai avuto i pastori, i boscaiuoli, i carbonari e qualsiasi persona che ha battuto quelle montagne. Io stesso che le ho investigate per 40 anni sconosco assolutamente tale località.

(6) G. E. MATTEI, *L'Abete delle Nebrodi*, « Bollett. del R. Orto Bot. e Giard. Col. di Palermo », Anno VII, 59-69 (1908).

a ciò un carattere distintivo «*coma ampla expansa, parce pyramidali*». A questi requisiti risponde effettivamente l'unico esemplare adulto che ho veduto nel giardino del Barone Casale a Polizzi Generosa (Tav. I, fig. 1). A questo proposito conviene osservare che il custode del giardino asserisce che l'albero è stato colpito dal fulmine; potrebbe quindi anche essere soltanto questa la causa accidentale della forma a cupola dell'albero, invece che a cuspide, che richiama alla mente l'aspetto delle piante di Abete bianco invecchiate, col tipico cimale a «nido di cicogna» [7] dovuto molto probabilmente ad un accrescimento ritardato della gemma apicale rispetto a quello dei rami dei verticilli superiori. È un fatto che una pianta più giovane (45 anni circa) allo stato naturale, che ho fotografato nel Vallone della Madonna degli Angeli (Madonie) (Tav. I, fig. 3) presenta un cimale assolutamente normale. A questo proposito conviene ricordare che, nelle descrizioni dateci dal Barbey (1931, 1934) [8] di alcuni abeti sud-mediterranei (*A. Pinsapo*, *A. maroccana*, *A. numidica*), ritroviamo il richiamo alla medesima caratteristica della chioma espansa ed irregolare, che anche questo A. attribuisce al fulmine, agli uragani, ai venti impetuosi, oltre che ad una ramificazione anormale delle cime ad una certa età. Parlando poi delle condizioni in cui crescono gli *A. numidica* sottoposti a continuo attrito contro i fusti delle specie protettrici e delle condizioni atmosferiche, il Barbey conclude: «*Des lors, il ne faut pas s'étonner si presque tous les jeunes Abies sont deformés, ramifiés, tordus et trapus*». Tuttavia le figure e le foto nonché le descrizioni sistematiche indicano che forma conica della chioma persiste in *A. numidica* per un tempo più lungo che nell'*Abies nebrodensis*. È certo ehe i nostri abeti sono sottoposti, nel Vallone della Madonna degli Angeli, sulle Madonie, e a Polizzi Generosa, a meteore dello stesso tipo, ma non credo che cause accidentali come i fulmini, per quanto frequenti, possano essere responsabili di un carattere così costante. È più probabile invece che la luminosità troppo intensa e l'insieme delle condizioni ambientali e climatiche particolarmente estreme, siano le maggiori responsabili di uno squilibrio di accrescimento del cimale, che porta precocemente ad una forma senescente.

Un altro carattere rilevato dal Mattei e riguardante il portamento è quello del «*trunco basi nudo*», che colpisce subito ed è comune sia all'al-

(7) A. Pavari, *Abete bianco*, «Monti e Boschi» nn. 11–12, 491–496 (1954).

(8) A. Barbey, *A travers les forêts de Pinsapo d'Andalousie*, Librairie Agricole, Paris 1931.

p. 67. – «Ce qui frappe surtout le sylviculteur qui entre dans cette pinsapare (de la Sierre de las Nieves), c'est la deformation des cimes et l'irregularité des frondaisons.

«Leurs troncs ecailleux, moussus, garnis très bas de grosses branches plus au moins seches et decomposées.

p. 68. – «Il est incontenstable que les ouragans frèquents et violents qui accompagnent les fortes prépicitations de l'outomne et du printemps, causent des dommages considérables .....

«Mais il est aussi une autre particularité determinant l'alteration inevitable et rapide des frandaisons des Pinsapos; c'est la ramification, on peut bien dire automatique de leur cime, sitot qu'elle attaint une certaine dimension».

bero vecchio di Polizzi, sia ai più giovani del Vallone della Madonna degli Angeli (Tav. I, fig. 1). Gli altri esemplari contorti si prestano meno a questa osservazione; tuttavia i tre esemplari fotografati dal Köstler [9] nel Vallone mettono in evidenza questo carattere anche attraverso al loro portamento irregolare. Questa caratteristica, che a mio parere è da ritenersi costante, dipende da una precocissima caduta dei primi palchi di rami; infatti il fusto dell'esemplare di Polizzi (Tav. I, figg. 1–2), ed anche dell'individuo più giovane fotografato nel vallone, nel tratto di fusto basale nudo hanno corteccia perfettamente omogenea, senza traccia di inserzione di rami. La corteccia è bruna e screpolata a placche come si verifica nei tronchi molto vecchi di Abete bianco [10,11] e ricorda un poco con la sua screpolatura regolare quella dell'Abete rosso (Tav. I, fig. 2). Le piantine al di sotto di 10 anni di età, come quella coltivata nel giardino della casa forestale di Polizzi (Tav. I, fig. 4), portano invece palchi di rami laterali fino a terra.

La brevità della vita dei rami inferiori contrasta col comportamento dell'Abete bianco e di specie affini ad habitat meridionale (*Abies Pinsapo*, Barbey 1931); essa potrebbe dipendere almeno in parte, dalla fortissima irradiazione di calore del terreno durante le lunghe, calde e soleggiatissime giornate dell'estate mediterranea, che danneggierebbe ed accecherebbe addirittura le gemme dei rami più prossimi al terreno. Per avere un'idea dell'ambiente in cui crescono i pochi individui sopravvissuti di Abete nebrodense basterebbe ricordare il calore insopportabile che soffrimmo, il 30 giugno 1958, durante la nostra escursione al Vallone della Madonna degli Angeli ed ai dati che mi registrava il fotometro quando scattai le foto qui accluse, con pellicole di media rapidità, risultate poi giustamente esposte: avevo la indicazione di fotografare con diaframma 8–11 ad 1/500 di sec. !

Sempre a proposito del « tronco nudo » giova ricordare che, a detta dei forestali del luogo, i semi dell'*Abies nebrodensis* germinano con grande facilità, mentre i semenzali muoiono quasi tutti nei primi 5 anni di vita. Ciò potrebbe attribuirsi al fatto che fino a quell'età la piantina ancora molto bassa (l'accrescimento è lentissimo) può essere vittima della forte irradiazione del terreno e facilmente soccombere; e quindi le poche piante che riescono a sopravvivere portano i rami a vegetare solo al di sopra di questa zona critica (circa 50–1 m. dal terreno), e di qui il loro fusto nudo in basso. Le condizioni microclimatiche di questo strato critico di atmosfera a contatto col suolo sono state esaminate di recente, per il M. Pellegrino, vicino a Palermo, dal Vaupel [12]. Se anche le cose stessero così, non possiamo dire se il carattere del fusto nudo sia oggi nel nostro abete di natura ecologica o

(9) J. N. KÖSTLER, *Tannen Zwischen Skylla und Karibdis*, « Jahrbuch des vereins zum Schulze der Alpenpflanzen und Tiere », Muchen.

(10) A. PAVARI, loc. cit. (1954).

(11) A. GIACOBBE, *L'Abete bianco*, « L'Alpe », 9, 77–86 (1931).

(12) VAUPEL, *Mikroklima und Pflanzentemperaturen auf trockenheissen Staudorten*, « Flora », 497, 057–541 (1958).

genetica; ci mancano a questo proposito piante coltivate in altri ambienti; quelle che esistono sono innestate su altro piede (Gibilmanna, a Villa Lanza, e Arboretum di Les Barres).

Un carattere differenziale importante rilevato dal Mattei è la «*glabrescenza quasi totale dei giovani rametti*» nell'abete nebrodense, mentre sono pelosi nel tipo. Ho potuto rilevare l'entità e la costanza di questo carattere confrontando il mio campione con quelli esistenti nell'Herbarium Centrale Italicum a Firenze, che sono: «Sett. 1843 – Petralia Sottana – da Calcara»; «Ag. 1843 – Petralia Sottana – da Calcara»; «1846 – Serra dei Pini – da Minà», e confrontandoli con campioni di Abete bianco provenienti da abetine dell'Appennino Tosco–Emiliano (Abetone), del Preappennino (Vallombrosa), ed infine di località meridionali come quelli raccolti dal Moggi a Ferdinandea (Calabria) pochi mesi fa e gentilmente datimi in visione. L'*Abies nebrodensis* non ha i rametti giovani completamente glabri ma glabrescenti, con una certa variabilità di detta glabrescenza; sempre però ben distinguibile dalla folta pelosità presentata dal tipo (Tav. II, fig. 2).

Per quanto riguarda la morfologia, le dimensioni e la inserzione degli aghi il Mattei concorda perfettamente nella sua descrizione col Lojacono. La inserzione delle foglie sul ramo presenta alcune differenze dal tipo che penso siano dovute alla diversa rapidità di accrescimento in lunghezza del ramo stesso (Tav. II, fig. 2). Nell'*Abies alba* tipico, sia pure esso di origine meridionale come quello di Ferdinandea dal quale ho tolto la documentazione fotografica, l'inserzione della base foliare sul rametto dell'anno in accrescimento è rappresentata da una impronta a forma di ellissi allungata nel senso dell'asse del ramo, con un ombelico poco pronunziato nel mezzo; via via che si procede verso i tratti più vecchi del rametto, le impronte, prima ancora della caduta delle foglie, si modificano divenendo di forma più rotondeggiante, certamente a causa del blocco dell'accrescimento in lunghezza dell'organo e del suo aumento contemporaneo in spessore. Nell'*Abies nebrodensis* le cicatrici delle basi foliari, anche nel tratto ultimo dei rametti, sono di forma circolare, con un ombelico ben marcato nel centro, e di dimensioni minori; ciò molto probabilmente a causa dell'accrescimento in lunghezza dei rami molto più lento. Le foglie poi sono corte (1 cm. circa) e tozze, a cima smussa, oltreché marcatamente rigide (Tav. II, fig. 1).

Le gemme sono molto contratte e rivestite di resina nell'abete nebrodense (Tav. I, fig. 6), molto più acuminate e prive di resina nel tipo, come già hanno notato i due Autori citati.

Infine, per quanto riguarda i coni, le testimonianze sono molto scarse, e ciò in rapporto all'altissimo grado di sterilità delle piante che sono sopravvissute. Anche a questo proposito vale ricordare che pure gli altri abeti sud–mediterranei hanno la caratteristica di essere altamente sterili [13]. Sembrerebbe che il Mattei avesse veduto dei coni non ancora maturi. Le dimen-

(13) A. BARBEY, *Une relique de la Sapinière Méditerranéenne. Le Mont Babor. Monographie de* l'Abies numidica *Lann.*, Librairie Agricole, Paris (1934).

sioni del cono « *nondum maturo* » che l'autore ci dà, di mm. 70 × 30 sono tuttavia fortemente discordanti da quelle del materiale che io ho raccolto e che riproduco in fotografia (Tav. II, fig. 5), che supera in lunghezza i coni del tipo (Tav. II, fig. 6).

Dò qui le misure principali ricavate dal cono più sviluppato dei due riprodotto in fotografia:

Lunghezza	cm. 18,6
Larghezza	cm. 4,40
Altezza della punta sul piano apicale del cono	cm. 1,20
Lunghezza della porzione reflessa della brattea	cm. 0,68–0,55
Lunghezze dell'aculeo	cm. 0,38 -0,22–0,25
Lunghezze della base exerta della brattea	cm. 0,71–0,53
Larghezze della squama	cm. 3,90×0,77–2,67×0,55–2,9×0,50.

Le misure sono state prese da un cono non ancora maturo, raccolto il 30 giugno 1938, e mantenuto in frigorifero fino al 20 settembre, giorno in cui sono state prese queste misure. Il cono si presentava in buone condizioni, aveva cambiato il colore che da verde flavescente a giugno era divenuto bruno–rossastro ai margini delle brattee, avviandosi alla maturazione. Sull'abero c'erano altri coni ancora più sviluppati, che mi propongo di raccogliere a novembre col seme maturo.

È interessante ricordare che anche il Barbey dà per i coni di *Abies numidica* le dimensioni di 12–20 cm., mentre il Trabut da quelle di 10–15 cm. per l'affine *Abies Pinsapo*, e che *Abies numidica* sta a *A. Pinsapo* all'incirca come l'*A. nebrodensis* sta all'*A. alba*, sia sul piano genetico sia su quello ecologico.

Non ho potuto riscontrare precocemente il carattere di cui parla il Mattei delle squame « *dorso prope marginem superiorem rufo tomentosis* »; carattere noto per il cono maturo, ma che sembrerebbe apparire precocemente anche nel cono giovanile, dato che il Mattei parla nella sua diagnosi di strobilo « *nondum maturo* ». Effettivamente le squame dei miei coni erano verdi flavescenti su tutta la superficie, all'epoca della raccolta.

Il fatto che i coni dell'abete nebrodense non siano tipicamente troncati all'apice ma piuttosto conici, terminanti in una punta leggermente attenuata (Tav. II, fig. 4–5), costituisce un'altra caratteristica distintiva dal tipo.

Un'altra leggera differenza sembra interessare anche la brattea nella sua parte acuminata e reflessa. La parte reflessa della brattea tipicamente sfrangiata è più rotonda che nel tipo e l'aculeo con cui termina più nettamente stagliato dal resto della brattea.

Gran parte dei caratteri differenziali messi in rilievo a cominciare dalla chioma slargata, le dimensioni e la forma delle foglie, la forma della cicatrice foliare, e la forma della brattea e del suo aculeo dipendono da una estrema lentezza di accrescimento degli organi, nella evoluzione dei quali ha maggior presa la differenziazione che l'accrescimento.

Allo stato attuale delle cose appare difficile stabilire se sia più conveniente considerare l'*Abies nebrodensis* come una specie, seguendo l'opinione del Mattei, oppure come una varietà, secondo quella del Lojacono. Della opinione di quest'ultimo è anche il Fiori [14] che tende a individuare come specie grandi gruppi sistematici, con un concetto Linneiano, mentre la maggioranza degli Autori tendono a classificare il nostro abete come una specie distinta, forse anche a causa della sua condizione di relitto ben isolato geograficamente e quasi scomparso. Lo descrivono come specie Hickel 1909 [15], Dallimore e Bruce Jackson 1923 [16], Mattfield 1925 [17]. Quest'ultimo autore, che ci dà i dettagli più esaurienti sulla nostra entità; nella sua monografia del genere *Abies* inserisce l'*Abies nebrodensis* nel ciclo delle specie, seguenti: *A. alba*, *A. Nordmanniana*, *A. cephalonica*, *A. Borisi–Regis*, *A. Bornmulleriana*. Queste entità sono caratterizzate da un gruppo di caratteri che compaiono in ciascuna di esse variamente combinati, in maniera tale che ciascuna entità è coordinata piuttosto che subordinata all'altra. Il Mattfield propone che le sei entità siano tenute collegate fra loro come un gruppo satellite dell'Abete bianco e propone di assegnare loro la dignità di specie, pur ammettendo la legittimità di annoverarle anche come varietà o sottospecie.

Nella chiave analitica proposta dall'autore per il genere *Abies*, il gruppo dei nostri sei taxa, ai quali appartiene l'*Abies nebrodensis*, compare sotto le seguenti caratteristiche comuni: « squame di copertura del cono sempre reflesse sia pure minimamente, con le punte verso l'esterno e che raggiungono sempre più della metà della lunghezza delle squame fruttifere. Canali resiniferi sempre presenti nell'ipoderma della faccia inferiore delle foglie ». Mentre il gruppo dell'*Abies Pinsapo*, *A. maroccana*, *A. numidica*, *A. cilicica*, che è il più vicino al ciclo delle sei specie precedenti, è caratterizzato da: « brattee di copertura mai reflesse in fuori, che raggiungono al massimo la metà della lunghezza delle brattee fruttifere ».

L'alto valore sistematico di questo carattere che riguarda gli organi sessuali è senza dubbio decisivo nell'assegnare l'*Abies nebrodensis* al ciclo dell'Abete bianco, tenendolo quindi distinto dagli altri abeti sud–mediterranei quali l'*A. numidica*, *A. maroccana* e *cilicica*, che appartengono al ciclo dell'*A. Pinsapo* ed ai quali invece lo ricollega il Mattei. Questi abeti meridionali per la loro forma arborea, per i caratteri anatomici della foglia, la vicinanza geografica, la simile condizione di relitto e le analoghe condizioni dell'habitat attuale presentano forti convergenze morfologiche fra loro.

I sistematici che avevano davanti l'intero panorama del genere *Abies* [18] sono stati discordi nell'importanza da attribuire ai caratteri guida delle grandi

(14) A. Fiori, *Flora Analitica d'Italia* (1923–29).

(15) Hickel, in Mattfield (1925).

(16) Dallimore and Bruce Jackson, *A Handbook of Coniferae*, pp. 1130 (1923).

(17) Mattfield, *Die in Europa und Mittelmeergebiet wildwachsenden Tannen*, «Mitteilungen der Deutschen Dendrologischen Gesellschaft », n. 35, pp. 1–37 (1925).

(18) *Die Naturlichen Pflanzenfamilien*, Engler, B. 13: Pilger, *Gymnospermae*, pp. 312–318 (1926).

divisioni; ad esempio il Pilger [18] sulla posizione dei canali resiniferi nelle foglie dei rami vegetativi basa le due grandi sezioni del genere: « 1° Harzgange der Blatter nichtbluhender Zweige an der Epidermis der Unterseite gelegen (Sectio *Marginales* Patschker) e 2° Harzgange der Blatter nicht bluhender Zweige in Parenchym gelegen (Sectio *Centrales* Patschker) ». La sezione delle *Marginales* comprende specie sparse su tutto l'areale del genere, mentre la sezione delle *Centrales* è limitata alla Siberia, Cina, Corea, Giappone ed America del Nord. D'altra parte già da molto tempo questo carattere, molto influenzabile da fattori ecologici, era stato considerato con cautela ai fini sistematici. A questo proposito Guinier et Maire [19] dicono che: « *Les characteres histologiques de la feuille ne doivent être employés, dans la classification des Abies qu'avec la plus grande circospection. Il est prudent de ne pas fonder une espece d'Abies sur des rameaux feuillus, surtout lonsqu'il s'agit de groupes ou les especes sont affines* ».

In conclusione, questa mia prima ricognizione purtroppo scarsa per la parvità di materiale e la difficoltà di venirne in possesso, mi spinge ad includere i pochi elementi nuovi raccolti nella seguente « diagnosi rinnovata » dell'Abete delle Nebrodi:

« Arbor mediocris (12–15 m. alta) trunco juventute ramis vestito, vetusta aetate basi nudo, sine nodis manifestis, coma ampla, expansa, parce pyramidali, apice convexa, ramulis junioribus glabrescentibus, perulis resina suffultis. Foliis valde approximatis, fere contiguis, multiseriatis, ad ramulos secundarios oppositos omnibus sursum versus orientibus, nec distica pectinata (10 mm. longis) rectis, rigidis, non falcatis, linearibus, contortis, basi more petioli vix contracta et circa ipsum in pulvinum more parvuli umboni, basi anguste orbiculata dilatata, supra intense viridibus, vernicosis, sulcatis, apice fere truncatis, obtusis vel parce retusis, subtus nervo carinante convexo juxta carinam utrinque fascia albo–caesia percursis, margine nitido fere nerviforme. Strobilis (nondum maturi) 180–190 mm. longis, 40–50 mm. latis, apice acuto, conico, pallide viridibus–flavescentibus, squamis imbricatis, obovato–rhomboideis, 6,5 mm. longis, 2,5–3 mm. latis, bracteis adpressis, linearibus spathulatis, apice rotundatis, non obcordatis, et inde abrupte in cuspidem acutam et reflexam productis.

« Olim in Nebrodibus (Madonie) obvia, hodie (anno 1958), fere destructa, in « Vallone della Madonna degli Angeli » circiter ad viginti specimina humilia, saepe depauperata, sterilia, tantum adsunt ».

Non mi sento in grado di esprimere un parere personale sulla dignità del taxon nell'ambito del ciclo sistematico dell'Abete bianco, al quale l'*Abies nebrodensis* strettamente appartiene. Effettivamente non abbiamo a disposizione elementi sufficienti per chiarire questo punto e tale inconveniente si ripete del resto per molte entità isolate ed in via di scomparsa, per le quali il sistematico è spesso portato a valutare i caratteri distintivi più su base

(19) P. GUINIER et R. MAIRE, *Remarques sur quelques Abies Méditerranéens*, « Bull. Soc. Bot. de France », T. LV, pp. 184–194 (1908).

geografica che genetica. Per poter valutare queste due categorie di fatti al loro giusto valore occorrerebbe avere, nel nostro caso, maggiori informazioni di quelle di cui dispongo.

Resta comunque pienamente confermato, soprattutto per i caratteri dei coni fruttiferi, che il nostro abete appartiene al ciclo dell'Abete bianco e dei suoi satelliti balcanico–caucasici, e che nettamente si distingue da quello, più meridionale, dell'*Abies Pinsapo, A. maroccana, A. numidica, A. cilicica.*

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

Tavola I.

Fig. 1. – Individuo adulto di *Abies nebrodensis*, nel giardino del Barone Casale a Polizzi Generosa (Palermo) 30 giugno 1958.

Fig. 2. – Corteccia della parte inferiore del tronco nudo del medesimo individuo.

Fig. 3. – Giovane individuo di *Abies nebrodensis* (di circa 40 anni), vegetante nel Vallone della Madonna degli Angeli, nelle Madonie, presso Polizzi Generosa; 30 giugno 1958.

Fig. 4. – Giovanissimo individuo (circa 10 anni) trapiantato nel giardino della Casa Forestale di Polizzi Generosa, dal Vallone della Madonna degli Angeli nelle Madonie, l'inverno del 1957.

Fig. 5. – Rametto vegetativo basso prelevato dalla chioma dell'abete del giardino del Barone Casale.

Fig. 6. – Gemma apicale di un rametto basso prelevato dall'abete del giardino Casale in Polizzi, che mostra la rivestitura di resina caratteristica delle gemme dell'Abete nebrodense.

Tavola II.

Fig. 1. – Rametti di Abete nebrodense a sinistra, e di Abete bianco di Ferdinandea a destra; sono evidenti le differenze di lunghezza e di rigidezza delle foglie.

Fig. 2. – Rametti della vegetazione dell'anno, di Abete nebrodense a sinistra e di Abete bianco di Ferdinandea a destra; è chiara la glabrescenza dell'Abete nebrodense e la pelosità dell'Abete bianco; sono evidenti anche le diverse forme delle cicatrici foliari.

Fig. 3. – Aghi maturi di un ramo vegetativo di Abete nebrodense visti ventralmente (prima fila) e dorsalmente (seconda fila). Gli aghi sembrano sottilmente picciolati per la torsione della parte prossimale della foglia su se stessa.

Fig. 4. – Coni dell'Abete nebrodense visti di piatto; si notano le cime caratteristicamente acuminate.

Fig. 5. – Coni dell'Abete nebrodense visti di fianco.

Fig. 6. – Coni dell'Abete bianco di Ferdinandea, visti di fianco. Si notano le dimensioni sensibilmente più modeste (vedi anche scala) in confronto a quelle dei coni dell'Abete nebrodense.

1

2

3

4

5

6

1

2

3

4

5

6

Zoologia. — *Rapporti numerici dei sessi in tre popolazioni di* Mytilicola intestinalis *Steuer*(*). Nota di Guido Bacci(**), M. Balata(***) e M. L. Romani(****), presentata (*****) dal Socio Giulio Cotronei.

Talune osservazioni e ricerche hanno dimostrato che nelle specie gonocoriche parassite il determinismo dei sessi può dipendere dal numero dei loro individui che si trovano in un singolo ospitatore, cioè dal grado di infestazione (1).

Un caso ben studiato è quello di *Jone thoracica*, un Isopode che vive sulle branchie del Crostaceo Decapode *Callianassa capitata*. Reverberi e Pitotti (2) dimostrarono che la prima larva parassita che arriva sulle branchie di *Callianassa* diventa femmina mentre la seconda larva si fissa sul corpo del primo parassita così femminilizzato e diventa sempre maschio. Dunque quando è presente un solo parassita adulto questi è sempre di sesso femminile, quando ne sono presenti due questi risultano invariabilmente maschio e femmina. Appare evidente il significato adattivo di tale comportamento.

Le cose cambiano nei casi in cui i parassiti possono essere in numero maggiore di due per ospite. Caullery e Comas (3) studiarono *Paramermis contorta*, un Nematode parassita delle larve di *Chironomus*: su 340 *Chironomus* parassitati da una sola *Paramermis* per ciascuno trovarono 255 *Paramermis* di sesso femminile, solo 17 di sesso maschile e 68 intersessi mentre su 16 *Chironomus* con 4 parassiti ciascuno riscontrarono 23 femmine di *Paramermis*, 41 fenotipi maschili e 5 intersessuati. Un caso estremo di 17 Nematodi su un solo *Chironomus* rivelò infine la presenza di 15 maschi e 2 femmine. Dunque quando vi è un solo parassita per ospite questo è generalmente – ma non sempre – di sesso femminile, quando ve ne sono due si stabilisce fra i sessi di *Paramermis* un rapporto molto vicino ad 1 : 1, mentre l'aumento del grado di infestazione porta all'aumento della frequenza relativa dei maschi ma non alla scomparsa totale delle femmine. Si combinano in tal modo i vantaggi di una plasticità fenotipica del tipo *Jone* con quelli

(*) Lavoro eseguito negli Istituti di Zoologia dell'Università di Sassari e della Università di Modena con contributi del C.N.R.

(**) Istituto di Zoologia della Università di Modena.

(***) Istituto di Zoologia della Università di Sassari.

(****) Istituto di Zoologia della Università di Modena.

(*****) Nella seduta dell'8 novembre 1958.

(1) Mentre usiamo questa espressione – che non risulta sia stata impiegata nella trattatistica – per indicare il numero dei parassiti per ogni singolo ospite, impieghiamo il termine di indice di infestazione per indicare la percentuale dei mitili parassitati in un allevamento.

(2) G. Reverberi e M. Pitotti, « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », vol. 19, 111–184 (1942).

(3) M. Caullery e M. Comas, «C. R. Acad. Sci. Paris », vol. 186, 646–648 (1928).

di un determinismo genetico che assicura la esistenza di femmine (e quindi una discendenza) anche in gruppi molto numerosi di parassiti [4].

Osservazioni del Malaquin [5] su un Monstrillide parassita del Polichete *Salmacina* avevano già indicato l'esistenza di fatti simili a quelli osservati da Caullery e Comas ma ne avevano fornito una analisi meno chiara. Il poco che si conosce dei rapporti fra le proporzioni dei sessi e il grado di infestazione dimostra comunque il notevole interesse di un ulteriore approfondimento delle ricerche in questo campo.

Primi dati su *Mytilicola*.

Mytilicola intestinalis è un Copepode Ciclopide parassita dell'intestino dei mitili ed è stato oggetto di numerose ricerche a causa della sua importanza economica ma il suo determinismo sessuale non ha finora suscitato particolare interesse. Meyer Waarden e Mann [6] hanno recentemente rilevato la sua distribuzione negli allevamenti di mitili delle coste dell'Italia e delle sue isole.

Ricerche eseguite dall'autunno 1957 al giugno 1958 su mitili provenienti dagli allevamenti di Olbia in Sardegna, da quelli di La Spezia e da allevamenti di Porto Corsini presso Ravenna hanno fornito, per quanto concerne il rapporto numerico dei sessi, risultati concordanti nelle linee generali ma anche suggestivi di differenze fra popolazione e popolazione le quali fanno pensare ad un differenziamento razziale nel determinismo dei sessi.

Le tabelle che seguono portano nella 1ª colonna il numero dei parassiti per mitilo o grado di infestazione, nella 2ª le frequenze dei maschi dei diversi casi, nella 3ª quella delle femmine, nella 4ª le frequenze totali e nell'ultima le frequenze percentuali dei fenotipi maschili a seconda del grado di infestazione. Gli istogrammi annessi riproducono gli stessi dati con il numero dei parassiti per ospite sulle ordinate.

Esaminando i dati relativi alle tre diverse provenienze si constata che le percentuali dei maschi sono sempre elevate (non minori del 37 %), anche nei casi in cui il mitilo ospita un solo parassita. Le loro percentuali vanno inoltre gradatamente aumentando con l'aumentare del grado di infestazione. Questo fenomeno generale appare particolarmente chiaro quando si sommano i dati relativi alle tre popolazioni (Tabella IV) ciò che permette di attenuare talora le irregolarità dovute alla scarsità dei campioni esaminati per i casi di più elevata infestazione individuale. I mitili più infestati sono risultati particolarmente frequenti negli allevamenti di Olbia dove abbiamo riscontrato un indice di infestazione del 96 %, meno frequenti negli individui

(4) G. Bacci, « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », vol. 26, 110–137 (1952).

(5) A. Malaquin, « Arch. zool. expér. gén. », vol. 9 (3), 81–232 (1901).

(6) P. F. Meyer Waarden u. H. Mann, « Boll. Pesca, Piscic. Idrobiol. », a. 29, 201–220 (1953).

provenienti da La Spezia dove si è riscontrato il 65 %, mentre per Porto Corsini si è avuto solo il 48 % con un solo mitilo su 222 infestato da 9 *Mytilicola*. Questo fenomeno porta come conseguenza che il numero dei maschi (dipendenti in gran parte dal grado di infestazione) è risultato massimo a Olbia (67 %) minimo a Porto Corsini (47 %).

Nessun dubbio può quindi sussistere sulla generalità del fenomeno dell'aumento della percentuale dei maschi in relazione all'incremento del grado di infestazione.

Il confronto fra le frequenze relative dei maschi e delle femmine quando sia presente da uno solo a 2–3 parassiti per mitilo dimostra peraltro l'esistenza di differenze notevoli nelle tre popolazioni. Nelle *Mytilicola* di Olbia si riscontra il 56 % di maschi anche quando il parassita è isolato mentre in quelli de La Spezia e di Porto Corsini il 50 % si raggiunge solo quando si hanno 3 parassiti per mitilo, condizione in cui a Olbia si riscontra già una frequenza del 68 % di maschi.

Più difficilmente analizzabili e comparabili – per lo scarso numero delle osservazioni – sono per ora i dati relativi ai casi di infestazione più massiccia di singoli mitili. In questi casi non si ha comunque la totale eliminazione dei fenotipi femminili.

Dopo aver messo in evidenza le diverse modalità con le quali il fenomeno della mascolinizzazione si presenta nelle tre popolazioni ermafrodite occorrerà stabilire se queste non rispondano a differenze razziali.

È infine importante rilevare, ai fini di confronti con le ricerche affini, che abbiamo riscontrato alcuni casi di femmine giovani e normali accanto a femmine molto più sviluppate e provviste di sacchi ovigeri esterni. Ciò indica la possibilità di un differenziamento in senso femminile anche da parte di larve in presenza di femmine già differenziate.

Tabella I.

Mytilicola *di Porto Corsini.*

N. dei parassiti per mitilo	Frequenze dei maschi	Frequenze delle femmine	Totali	Percentuali dei maschi
1	36	54	90	40
2	51	81	132	38
3	54	54	108	50
4	39	37	76	51
5	20	15	35	57
6	4	8	12	33
7	17	11	28	60
8	5	3	8	62
9	8	1	9	88
	234	264	498	

TABELLA II.

Mytilicola *de La Spezia.*

N. dei parassiti per mitilo	Frequenze dei maschi	Frequenze delle femmine	Totali	Percentuali dei maschi
1	20	33	53	37
2	44	58	102	43
3	51	57	108	47
4	35	33	68	51
5	31	19	50	62
6	32	16	48	66
7	26	16	42	61
8	14	10	24	58
9	6	3	9	66
10	13	7	20	—
18	14	4	18	77
	286	256	542	

TABELLA III.

Mytilicola *di Olbia.*

N. dei parassiti per mitilo	Frequenza dei maschi	Frequenza delle femmine	Totali	Percentuali dei maschi
1	34	26	60	56
2	62	28	90	68
3	70	32	102	68
4	57	27	84	67
5	80	40	120	66
6	75	39	114	65
7	41	22	63	65
8	29	11	40	72
9	18	9	27	66
10	21	9	30	70
11	—	—	—	—
12	22	14	36	61
13	31	8	39	79
14	—	—	—	—
15	14	1	15	93
16	—	—	—	—
17	23	11	34	67
18	—	—	—	—
19	10	9	19	52
	587	286	873	

Tabella IV.

Mytilicola *delle tre popolazioni.*

N. dei parassiti per mitilo	Frequenza dei maschi	Frequenza delle femmine	Totali	Percentuali dei maschi
1	90	113	203	44,3
2	157	167	324	48,4
3	175	143	318	55,0
4	131	97	228	57,4
5	131	74	205	63,4
6	111	63	174	63,7
7	84	49	133	63,1
8	48	24	72	66,6
9	32	13	45	71,1
10	34	16	50	68,0
11	—	—	—	—
12	22	14	36	61,1
13	31	8	39	79,4
14	—	—	—	—
15	14	1	15	93,3
16	—	—	—	—
17	23	11	34	67,6
18	14	4	18	77,7
19	10	9	19	52,6
	1107	806	1913	

Conclusioni e discussioni.

I dati così stabiliti consentono quindi di giungere alle seguenti conclusioni:

1° I rapporti numerici dei sessi, quando si considerino *Mytilicola* isolate nel loro ospite, non si discostano molto dal rapporto 1 : 1 e rivelano una lieve preponderanza di maschi negli allevamenti di Olbia, di femmine negli allevamenti di Porto Corsini e di La Spezia.

2° Nelle tre popolazioni esaminate si riscontra indistintamente un aumento delle frequenze dei maschi con l'aumentare del grado di infestazione.

3° La presenza di femmine adulte non inibisce il differenziamento in senso femminile di taluni individui.

Questi fatti fanno quindi concludere per una forte componente genetica nel determinismo dei sessi (§§ 1 e 3) cui si sovrappone una influenza ambientale (§ 2) di natura per ora imprecisabile.

Si può comunque stabilire una scala crescente delle influenze fenotipiche nel differenziamento sessuale che può cominciare con *Mytilicola*,

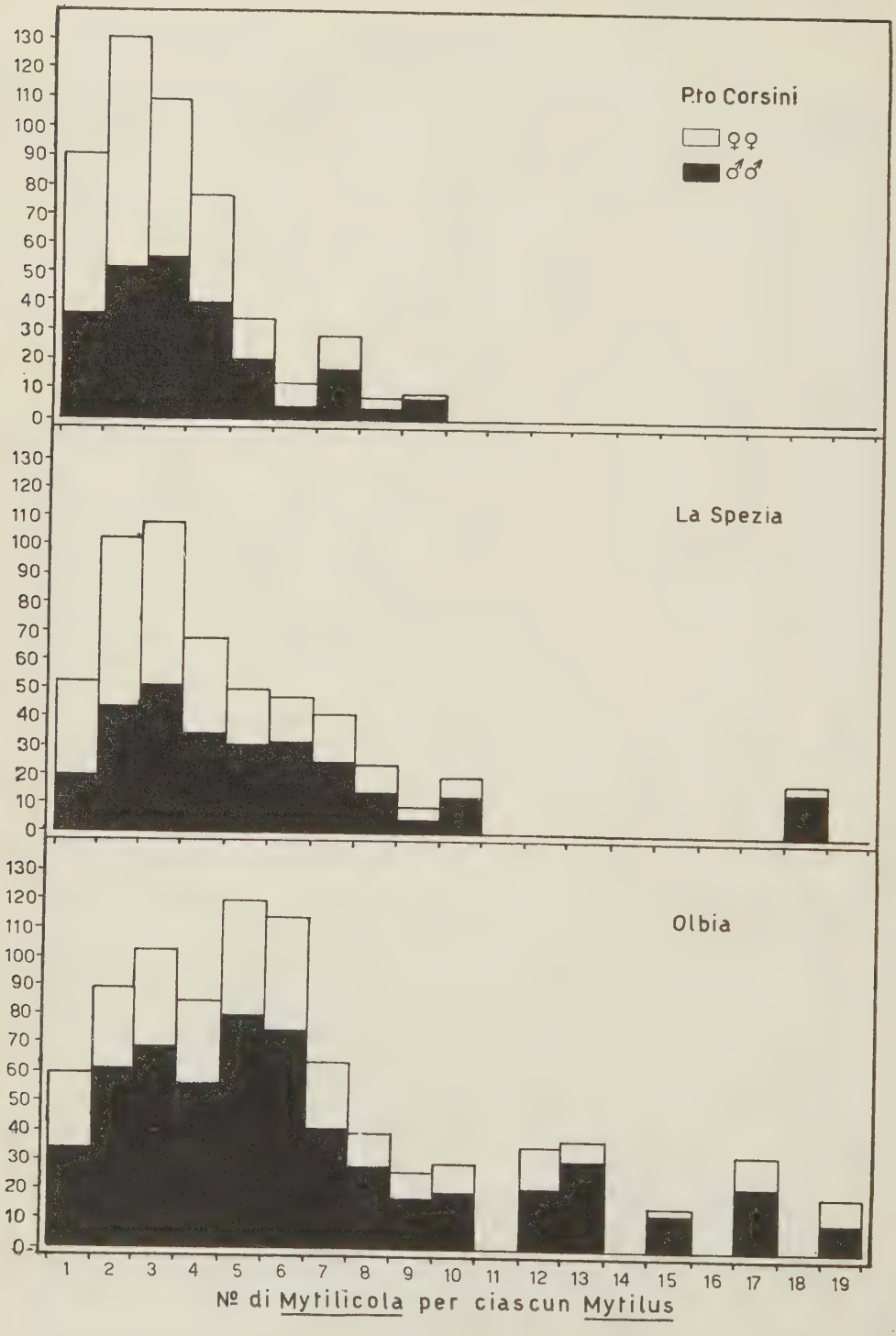

P.to Corsini
♀♀
♂♂
La Spezia
Olbia
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19
Nº di Mytilicola per ciascun Mytilus

Fig. 1.

proseguire con *Paramermis* e terminare per il momento con *Jone*. Nella prima l'influenza ambientale si manifesta con una preponderanza di femmine quando si riscontri un unico parassita per ospite (e solo nelle popolazioni di Porto Corsini e di La Spezia) e con un progressivo aumento di maschi con l'incremento del grado di infestazione. In *Paramermis* i parassiti isolati sono quasi esclusivamente femmine e, con l'aumentare del grado di infestazione, assistiamo a un rapido aumento delle percentuali dei maschi mentre in *Jone* non sembra si riscontri alcuna eccezione alla esistenza di fenotipi femminili nel caso che il parassita si trovi isolato. Appare dunque evidente da questi esempi l'esistenza di risposte varie dei genotipi sessuali nelle tre specie alle sollecitazioni dell'ambiente. Tali risposte appaiono inoltre chiaramente legate alle diverse modalità della infestazione da parte dei tre parassiti.

Rimane ora da confermare se alla minore plasticità fenotipica delle *Mytilicola* è legata anche una possibilità di formare razze sessuali distinte nelle popolazioni isolate che si costituiscono negli allevamenti di mitili del Mediterraneo.

Zoologia (Anatomia). — *Sulla presenza di particolari cellule nervose di senso negli epiteli di rivestimento della ventosa di* Sepia officinalis (*). Nota di Pasquale Graziadei, presentata (**) dal Socio A. Pensa.

La dimostrazione di un corredo nervoso intraepiteliale rappresentato da cellule è cosa non infrequente negli Invertebrati, dove l'apparato nervoso recettore ha una disposizione più diffusa di quanto non avvenga nei Vertebrati. Tuttavia ancor oggi è possibile mettere in luce aspetti nuovi od insoliti di strutture d'altra parte già note ai neuroistologi.

In un settore ben definito dell'epitelio che riveste la ventosa del braccio di *Sepia officinalis* e precisamente in corrispondenza dell'epitelio che sovrasta la muscolatura acetabolocutanea, mi è stato possibile dimostrare la presenza di elementi nervosi che si allineano fra le cellule epiteliali stesse. È degno di nota il fatto che l'epitelio in discussione è rivestito all'esterno da robuste denticolazioni cornee ciascuna delle quali sovrasta una cellula epiteliale. Le cellule epiteliali inoltre appaiono provviste di epiteliofibrille di notevole consistenza e di facile osservazione. Questo reperto ricorda da vicino quanto già illustrato da Del Rio Hortega in numerosi epiteli ecto– ed endodermici di Invertebrati.

Il corredo nervoso di questo epitelio è composto da elementi nervosi di aspetto non comune. È rappresentato da pirenofori voluminosi dai quali si stacca un unico prolungamento. Sia nel pirenoforo che nel prolungamento non ho notato una chiara struttura neurofibrillare del neuroplasma. La forma del pirenoforo intraepiteliale e le sue dimensioni si avvicinano maggiormente a quanto siamo soliti osservare negli elementi gangliari di questi Cefalopodi piuttosto che ai comuni neuroni primari di senso dislocati nell'epitelio delle restanti porzioni del soma. La loro forma è grossolanamente piriforme ed il loro maggior asse è disposto parallelamente alla superficie epiteliale anziché in senso verticale, come è la norma per i neuroni primari degli epiteli sensoriali. Ne deriva che il prolungamento non abbandona per la via più breve l'epitelio ma anzi, per un tratto considerevole, vi scorre dentro; quindi con brusca inflessione guadagna la muscolatura sottostante. Nel decorso entro l'epitelio ed in quello intramuscolare non ho notato l'emissione di collaterali né la ramificazione dell'unico prolungamento. Invece in sezioni fortunate e di un certo spessore, mi è stato possibile seguire tali prolungamenti sino in corrispondenza del ganglio intrapeduncolare della ventosa, oppure direttamente nel neuropilo del midollo assile del braccio, e in altri casi ancora

(*) Lavoro eseguito nel Centro di Studio del Sistema Nervoso della Università di Pavia (Direttore: A. Pensa).

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1958.

ho notato prolungamenti che dopo aver dato un ramo che si espandeva nel ganglio intrapeduncolare, proseguivano fino al neuropilo del midollo assile per terminarvi (vedi fig. 1). Tanto nel ganglio della ventosa che nel midollo assile del braccio quindi i neuroni sopradescritti partecipano ampiamente alla costituzione del finissimo intreccio nervoso del neuropilo, insieme ai prolunga-

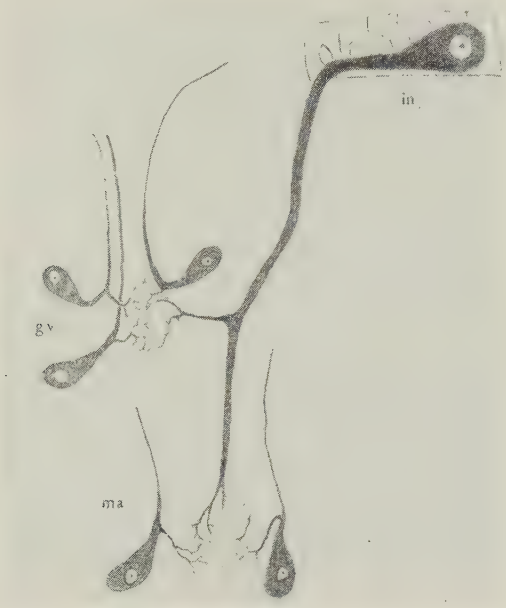


Fig. 1. – Disegno schematico illustrante i rapporti dei neuroni recettori intraepiteliali (*in*) con i neuroni motori del ganglio (*g. v.*) e del midollo assile del braccio della ventosa (*m. a.*)

Gli elementi nervosi intraepiteliali forniscono un unico prolungamento che non emette collaterali nell'epitelio né nella muscolatura. Cede invece collaterali al neuropilo del ganglio della ventosa e si risolve nel neuropilo del midollo assile del braccio. I rapporti fra i neuroni afferenti e quelli efferenti si stabiliscono a livello del finissimo plesso dei neuropili. *in* – Cellula nervosa sensitiva intraepiteliale; *g. v.* rapporto del suo neurite coi neuroni motori nel neuropilo del ganglio della ventosa e *m. a.* nel neuropilo del midollo assile del braccio.

menti nervosi dei neuroni sensoriali primari intraepiteliali. Importante da notarsi il fatto che la rete del neuropilo così composta ha i più stretti rapporti con le ramificazioni dell'unico prolungamento delle cellule motrici che si trovano in tali centri e che provvedono alla motilità del braccio e della ventosa.

Le cellule nervose che ho ora descritte e la cui natura recettrice è estremamente probabile, inviano quindi lo stimolo e al ganglio proprio della ventosa ed al midollo assile. Si stabilirebbe così il tratto afferente breve (ganglio della ventosa) e lungo (al midollo assile) dell'arco nervoso riflesso fra epitelio della ventosa della Sepia e la muscolatura della ventosa e del braccio.

Esperimenti fisiologici di precedenti Autori (Ten Cate) avevano infatti dimostrato, però soltanto in via sperimentale, che i movimenti riflessi della

ventosa e del braccio possono essere provocati sia con l'intermediario del midollo assile sia, in assenza di questo, con l'intermediario di un centro più periferico e cioè il ganglio della ventosa.

La morfologia insolita di questi elementi intraepiteliali permette ancora di formulare una prudente ipotesi sulla possibile specificità dello stimolo nervoso da loro raccolto. Esperienze fisiologiche avrebbero infatti dimostrato che la stimolazione di zone diverse della ventosa del braccio di Cefalopodi provoca differenti reazioni. Non si può escludere che il polimorfismo dei recettori sia in rapporto col determinarsi di quelle differenze constatate per le reazioni agli stimoli.

Fisiologia vegetale. — *Sul meccanismo di adattamento a condizioni osmotiche estreme in* Dunaliella salina. – I. *Reazioni fisiologiche a variazioni dell'ambiente osmotico* (*). Nota di Erasmo Marrè, Orietta Servettaz e Francesco Albergoni, presentata (**) dal Socio S. Tonzig.

La capacità di adattamento a variazioni anche molto estese della concentrazione e della composizione salina dell'ambiente, comune a tutti gli organismi vegetali, raggiunge un grado elevatissimo in alcune forme ad *habitat* desertico o marittimo. Tra queste, uno dei casi più noti è quello di *Dunaliella salina*, capace di sopravvivere e moltiplicarsi in ambienti la cui salinità varia da valori notevolmente inferiori a quelli dell'acqua di mare, come presso gli estuari dei fiumi, ai valori limite delle acque madri delle saline (soluzioni sature di cloruro di sodio).

Questa caratteristica capacità di adattamento di *Dunaliella* ha da tempo attirato l'attenzione degli studiosi, e il fenomeno è stato ripetutamente studiato, soprattutto nei suoi aspetti ecologici e morfologici [1–5]. Non ci risulta tuttavia l'esistenza di ricerche organiche intese a definirne il meccanismo; ricerche che pure si presentano ricche di interesse tanto da un punto di vista biologico generale quanto da quello più specificamente fisiologico, dei rapporti tra fattore idrico, fattore osmotico e fattore ionico, a livello delle singole strutture del plasma; includendo fra queste non solo gli organuli cellulari, ma anche le macromolecole proteiche – enzimatiche o meno, la cui sensibilità a questi fattori è troppo nota per dover essere ricordata.

Nell'impostazione dello studio sul meccanismo di adattamento in *Dunaliella* abbiamo così suddiviso il nostro piano di lavoro:

I) Definizione, in sede preliminare, delle principali reazioni fisiologiche legate a estese variazioni della salinità esterna.

II) Indagine sulla natura della forza impiegata da *Dunaliella* per controbilanciare forze osmotiche esterne tali da raggiungere i valori massimi sperimentalmente ottenibili (fino a oltre 240 atmosfere), conservando nello stesso tempo rapporti sostanzialmente normali con l'ambiente.

III) Esame delle conseguenze, sia strutturali (anche a livello molecolare) che metaboliche, secondariamente indotte nella cellula dall'eccezionale sviluppo del meccanismo di adattamento.

In questa prima Nota riferiamo su ricerche relative al primo dei punti citati sopra. In particolare abbiamo preso in esame:

a) il rapporto tra ritmo di accrescimento, concentrazione e composizione del mezzo esterno;

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano, Centro di studio del C.N.R. per lo studio delle ossido-riduzioni nei vegetali.

(**) Nella seduta dell'8 novembre 1958.

b) la ripercussione del progressivo aumento della concentrazione del mezzo sull'efficienza di due funzioni fondamentali, la fotosintesi e la respirazione;

c) i limiti di possibilità dell'adattamento individuale a escursioni estese del valore osmotico esterno;

d) le reazioni delle cellule di *Dunaliella* alla sostituzione del cloruro di sodio, quale agente osmoticamente attivo, con altri composti solubili.

Materiale e metodi.

Il ceppo di *Dunaliella salina* usato ci è stato gentilmente donato dal prof. Barigozzi, dell'Istituto di Genetica di questa Università. Partendo da tale ceppo abbiamo ottenuto culture in cui, di regola, il mezzo basale era costituito da una soluzione contenente KCl, $CaCl_2$, $MnCl_2$, $MgSO_4$, $NaNO_3$, NaH_2O_4 e brodo di terra preparato secondo Bacci [6], e in cui il cloruro di sodio era presente a concentrazioni varianti da due a otto volte quella dell'acqua di mare normale e cioè da 1,25 M a 5 M. Le colture venivano normalmente mantenute in matracci conici da 4 litri, contenenti 1 litro di soluzione, in camera termoregolata a 15 C° e illuminata artificialmente per 16 ore su 24 con tubi fluorescenti, assortiti in modo da fornire luce sensibilmente vicina, come spettro, a quella naturale del sole. L'intensità luminosa a livello delle culture era di circa 8.000 lux. In alcuni casi si è ricorso al gorgogliamento nei matracci di una mistura di aria e CO_2 nel rapporto di 20 parti ad una. Tale procedura, pur accelerando notevolmente la crescita in modo pressoché uguale, proporzionalmente, in tutte le culture, presenta per altro diversi inconvenienti: come una diversa intensità di evaporazione nei diversi matracci e una maggiore difficoltà nell'evitare inquinamenti; è stata quindi usata solo eccezionalmente.

Le misure di crescita sono state fatte contando il numero di cellule dopo intervalli di 24 ore, partendo sempre da culture contenenti, all'inizio, un numero uguale di cellule per unità di volume e con una concentrazione in alghe sufficientemente bassa perché l'accrescimento presentasse, nelle successive 48 ore, un andamento vicino a quello esponenziale. È risultato che questa condizione può ottenersi solo con una concentrazione iniziale variabile tra 5×10^4 e 10^5 cellule per cm^3.

Il contenuto in azoto è stato determinato con il metodo di Kjeldahl; quello in clorofilla secondo Arnon [7]. Le determinazioni delle attività respiratoria e fotosintetica sono state eseguite mediante la procedura descritta in un precedente lavoro [8]. La pressione osmotica dei diversi mezzi di cultura è stata determinata, quando ritenuto utile, mediante il metodo crioscopico, applicato secondo Loomis e Shull [9].

Esperienze e risultati.

I. – *Accrescimento di* Dunaliella *in funzione della concentrazione e della composizione del mezzo esterno.*

L'andamento medio della crescita in mezzi osmotici diversi, come risultante da numerose esperienze eseguite lungo un periodo di oltre 8 mesi, appare dalla Tabella I. La velocità del processo appare massima per le concentrazioni esterne in NaCl tra 1,25 e 2,5 M, corrispondenti a concentrazioni da 2 a 4 volte maggiori che nella normale acqua di mare, e a pressione osmotica tra 58 e 115 atmosfere; mentre cade rapidamente per la successiva

concentrazione 3,75 M e si riduce a meno di 1/6 di quello ottimale per la concentrazione 5 M, massima tra quelle da noi usate. Tale caduta della crescita non sembra imputabile allo spostato rapporto tra ioni sodio e altri ioni o composti in soluzione, perché rimane pressoché invariata sia che si vari la concentrazione del solo NaCl, sia che venga aumentata, proporzionalmente a questa, anche quella degli altri componenti la soluzione, come ioni solfato, nitrato, magnesio, o anche quella del brodo di terra.

Tabella I.

Effetto della composizione del mezzo sulla velocità di crescita di Dunaliella salina.

Esp. N.	Composizione del mezzo				Pressione osmotica (in atm.) (4)	Tempo richiesto per il raddoppiamento del numero di cellule (in ore)
	Mezzo base (1)	$NaNO_3$ (2) NaH_2PO_4	NaCl	Estratto di terra (cc. per 1000 cc. finali di soluzione) (3)		
1	Conc. × 1	Conc. × 1	1,25 M	50 cc.	58	28
	»	»	2,5 M	»	115	26
	»	»	3,75 M	»	172	75
	»	»	5 M	»	227	171
2	Conc. × 1	Conc. × 1	1,25 M	50 cc.	56	14
	» × 2	»	1,25 M	»	57	12
	» × 1	»	3,75 M	»	170	70
	» × 6	»	3,75 M	»	173	82
3	Conc. × 1	Conc. × 1	1,25 M	50 cc.	59	25
	» × 2	» × 2	1,25 M	50 »	61	26
	» × 2	» × 2	1,25 M	100 »	63	26
	» × 1	» × 1	3,75 M	50 »	170	95
	» × 6	» × 6	3,75 M	50 »	175	85
	» × 6	» × 6	3,75 M	150 »	179	150

(1) Mezzo di base: conc. × 1: KCl 0,0012 M, $CaCl_2$ 0,0014 M, $MgCl_2$ 0,004 M, $MgSO_4$ 0,00029 M.
(2) Conc. × 1: $NaNO_3$ 0,0012 M, NaH_2PO_4 0,00016 M.
(3) Estratto di terra: kg. 1,5 di terra, bolliti per 2 ore in recipiente chiuso con 3 litri di H_2O dist. e filtrati.
(4) I valori della pressione osmotica delle soluzioni di cultura sono stati determinati mediante il metodo crioscopico [9].

II. – *Rapporto tra concentrazione del mezzo e attività fotosintetica e respiratoria.*

La caduta dell'attività di crescita in presenza delle concentrazioni più elevate in NaCl suggerisce che, per quanto grande possa essere la capacità di adattamento in *Dunaliella*, pure qualche funzione debba risultare sostanzialmente inibita da queste condizioni anormali d'ambiente. Ci è quindi sembrato opportuno eseguire una prima analisi orientativa sul comportamento di due funzioni fondamentali, la respirazione e la fotosintesi, in quanto esse da un lato condizionano la crescita sotto gli aspetti sia energetico che anabolico e, dall'altro, coinvolgendo gran parte dei sistemi metabolici della cellula, sono ben adatte a rilevarne eventuali lesioni. Dai dati della Tabella II si osserva che tanto l'attività respiratoria che quella fotosintetica risultano alquanto depresse (di circa il 30 %) nelle culture ambientate in NaCl 3,75 M rispetto a quelle con NaCl 2,5 e 1,25 M; questa differenza pur sensibile, è però di gran lunga inferiore a quella sopra rilevata per la crescita, che nella concentrazione 3,75 M ha velocità inferiore di circa il 60 % a quella osservabile per le concentrazioni più basse. Ciò fa pensare, almeno in via di prima ipotesi, che la diminuzione di crescita non rappresenti una conseguenza diretta di una diminuita sintesi di materiali plastici o energetici.

TABELLA II.

*Respirazione, fotosintesi e rapporto clorofilla/*N *totale in funzione della concentrazione* in NaCl *del mezzo.*

Conc. in NaCl	Respirazione	Fotosintesi		Rapporto cl/N
	$mm^3 O_2$/ mg N/ora	$mm^3 O_2$ per mg N/ora	$mm^3 O_2$ per mg cl/ora	
1,25 M	110	1368	572	0,40
2,5 M	113	1400	600	0,43
3,75 M	74	920	440	0,5

Condizioni sperimentali: la respirazione è stata determinata in apparecchio di Warburg a temperatura di 18°, mantenendo le alghe nel loro stesso mezzo di cultura; la fotosintesi è stata determinata in apparecchio di Warburg con apposito apparato di illuminazione di 12 %, mantenendo le alghe nel loro mezzo di cultura, addizionato, subito prima dell'inizio dell'esperienza, con Na_2CO_3 e $KHCO_3$, fino a conc. finale in carbonato 0,1 M, e pH 8,6. I dati relativi alla fotosintesi, corretti per il consumo di O_2 dovuto alla respirazione, esprimono la fotosintesi reale.

Dalla stessa tabella risulta pure che il rapporto azoto/clorofilla non è sensibilmente influenzato dalle variazioni dell'ambiente osmotico: il che sembra indicare una sostanziale integrità del meccanismo preposto alla biosintesi dell'apparato fotosintetico.

III. – *Limiti di possibilità dell'adattamento individuale.*

Una possibilità da non potersi escludere a priori era quella di una base genetica del fenomeno di adattamento: nel senso che in una popolazione di *Dunaliella* potessero coesistere linee diverse, dotate di diverso grado di resistenza a particolari condizioni dell'ambiente salino; e che alle variazioni dell'ambiente potesse corrispondere il rivelarsi e l'affermarsi dell'una o dell'altra di queste linee genetiche. Ci è sembrato che un controllo di questa possibilità potesse eseguirsi sottoponendo gruppi di cellule di *Dunaliella* a variazioni osmotiche sufficientemente rapide, nel tempo, da poter considerare il fenomeno dell'adattamento come svolgentisi a livello individuale (in altri termini in tempo insufficiente al succedersi di due generazioni). Le esperienze della Tabella III, in cui la escursione osmotica subìta dalle cellule è veramente ampia (da concentrazione in NaCl 1,25 M a concentrazione 5 M e viceversa), e gli intervalli di tempo considerati (20 ore) sono sensibilmente inferiori a quelli necessari al duplicarsi del numero di cellule, dimostrano come l'adattamento sia un fatto essenzialmente individuale (anche se, come è ovvio, non escludono le possibilità di componenti genetiche nel fenomeno, quale esso si svolge in natura). Dalla stessa tabella si rileva pure – anche se non con definitiva evidenza – come la permanenza prolungata in un determinato ambiente osmotico imprima alla cellula una certa caratterizzazione, non totalmente soppressa dalle variazioni della concentrazione salina esterna. Così alghe provenienti da culture con NaCl 5 M, ambientate per un breve periodo in NaCl 1,25 M resistono meglio al passaggio alla concentrazione 5 M di quanto questo non avvenga per alghe ambientate in NaCl 1,25 M e sottoposte allo stesso aumento di salinità del mezzo.

Tabella III.

Capacità di adattamento di cellule di Dunaliella *a variazioni della concentrazione in* NaCl *del mezzo.*

Concentrazione molari NaCl iniziale → finale	Percentuali di alghe ancora capaci di mobilità	Percentuali di cellule immobili
1,25 ——→ 5	45	55
5 → 1,25 → 5	60	40
5 ——→ 1,25	95	5
1,25 → 5 → 1,25	100	—

I passaggi da una concentrazione all'altra sono stati eseguiti mediante dialisi per 18 ore. Le cellule venivano esaminate al termine di ogni periodo di 18 ore dall'ultimo passaggio.

Le esperienze della Tabella II sono state eseguite variando nel modo più lento e graduale, per dialisi, la concentrazione del cloruro di sodio. Altre esperienze in cui le cellule venivano passate direttamente dal mezzo originario ad altro a diversa salinità, permettono di seguire meglio, nelle sue diverse fasi, l'andamento nel tempo del fenomeno di adattamento e ne mettono anche più evidentemente in luce la rapidità. Così cellule provenienti da una concentrazione in NaCl 1,25 M, portate in un mezzo contenente NaCl 2,5 M (il che significa un improvviso aumento della pressione osmotica pari a 56 atmosfere) subiscono, appena trapiantate, una notevole perdita di volume così da presentarsi raggrinzite, mentre il movimento dei flagelli si arresta completamente; ma la forma delle cellule ritorna quasi normale dopo 15 minuti primi, del tutto normale dopo circa 1 ora, e anche la mobilità ricompare nel 20 % delle cellule dopo 10 minuti, nell'80 % dopo 1 ora e in oltre il 95 % dopo 2 ore dal trapianto.

IV. – *Reazioni di* Dunaliella *ad aumenti della pressione osmotica ottenuti usando composti solubili diversi dal cloruro di sodio.*

In questa esperienza abbiamo voluto saggiare quanto la capacità di adattamento di *Dunaliella* a valori elevati della pressione osmotica rappresenti un fatto specifico nei confronti del cloruro di sodio, di gran lunga predominante nei mezzi liquidi in cui l'alga vive in natura. Abbiamo così confrontato per due tipi di cultura, uno ambientato in soluzione contenente NaCl 1,25 M e l'altro in NaCl 3,75 M, le reazioni osservabili in seguito ad un ulteriore aumento di 44 atmosfere della pressione osmotica, ottenuto aggiungendo al liquido di cultura quantità adatte dei seguenti composti: NaCl, KCl, KNO_3, urea, saccarosio.

I risultati di queste esperienze, riassunti nella Tabella IV, mostrano, in primo luogo, come l'aumento della pressione osmotica esterna sia molto meglio sopportato, e anche più rapidamente compensabile, nelle alghe originariamente ambientate nel mezzo a più elevata concentrazione salina. Si osserva inoltre come i tre elettroliti NaCl, KCl e KNO_3 provochino reazioni sostanzialmente simili. Dei due non elettroliti usati uno, l'urea, sembra, almeno nel breve periodo considerato, tollerato dalle alghe con facilità anche maggiore di quanto non lo siano i sali; mentre l'altro, il saccarosio, provoca reazioni che, seppure inizialmente non particolarmente gravi, risultano però molto difficilmente reversibili nel tempo.

Discussione e conclusione.

Come già detto nell'introduzione, le esperienze sopra riferite, hanno avuto per scopo solo quello di una prima esplorazione del fenomeno nelle sue linee generali, quale premessa necessaria per uno studio organico del suo meccanismo. Da questa stessa impostazione deriva necessariamente l'incompletezza dei dati e la provvisorietà della loro interpretazione nei riguardi dei singoli punti toccati.

Tabella IV.

Effetti di un aumento improvviso della pressione osmotica nel mezzo (44 atmosfere) ottenuto con sostanze solubili diverse.

Concentrazione iniziale in NaCl	Composto usato per aumentare la pressione osmotica	Reazione immediata		Tempo richiesto per il ritorno a condizioni vicine alle iniziali (in minuti primi)	
		Forma	*Mobilità*	*Forma*	*Mobilità*
1,25 M	NaCl	Molto contratta	Quasi scomparsa	40	40
3,75 M	»	Alquanto contratta	Poco ridotta	15	30
1,25 M	KCl	Molto contratta	Scomparsa	70	100
3,75 M	»	Quasi normale	Irregolare	10	30
1,25 M	KNO_3	Molto contratta	Molto ridotta	20	50
3,75 M	»	Quasi normale	Quasi normale	25	30
1,25 M	Urea	Alquanto contratta	Alquanto ridotta	10	10
3,75 M	»	Quasi normale	Quasi normale	7	7
1,25 M	Saccarosio	Molto contratta	Quasi scomparsa	più di 100	più di 100
3,75 M	»	Alquanto contratta	Alquanto ridotta	40	più di 100

Pur con questa riserva, ci sembra che questi primi risultati forniscano un orientamento sufficientemente preciso riguardo diversi aspetti del problema e in particolare:

a) per quanto riguarda i rapporti tra attività delle funzioni fondamentali (crescita, respirazione, e assimilazione del C), i nostri dati indicano che *Dunaliella* è capace di sopravvivere e moltiplicarsi per tutto il raggio di pressioni osmotiche (con NaCl quale agente osmotico) tra 20 e 220 atmo-

sfere. L'*optimum* di crescita, singolarmente largo, corrisponde alla zona tra 50 e 100 atmosfere circa. Per concentrazioni più alte la crescita rapidamente diminuisce indicando così l'insorgere di qualche lesione funzionale. Questa non sembra però individuabile nel danneggiamento o nell'inibizione degli apparati respitatorio o fotosintetico, la cui attività rimane ancora superiore ai 2/3 di quella ottimale quando già la crescita è inibita di oltre il 60 %. Il meccanismo di inibizione della crescita da parte delle alte pressioni osmotiche sembra argomento di particolare interesse, e merita essere ripreso in ulteriori ricerche.

b) Per quanto riguarda alcune caratteristiche del fenomeno dell'adattamento, questo appare di natura essenzialmente individuale e indipendente da una eventuale eterogeneità o variabilità genetica di *Dunaliella*. Infatti, tutte le cellule di una stessa popolazione sopportano agevolmente sia l'escursione graduale per un intervallo di 15 ore da pressione osmotica di 55 atmosfere a pressione osmotica di 220 atmosfere e viceversa, sia sbalzi improvvisi di 44 atmosfere. In quest'ultimo caso il ricupero, come forma e mobilità, dallo shok iniziale risulta completo entro meno di 1 ora. È d'altra parte interessante la richiesta di un determinato, anche se modesto, periodo di tempo perché il meccanismo di adattamento possa entrare in funzione e riportare le cellule in condizione di equilibrio col mezzo esterno.

c) Per quanto riguarda il meccanismo dell'adattamento, esso presenta un certo grado di specificità in funzione della natura dell'agente osmotico di cui è variata la concentrazione del mezzo. Così l'adattamento è più rapido nel caso dell'urea, quale agente osmotico, che in quello degli elettroliti NaCl e KCl che inducono reazioni pressoché uguali; mentre la capacità di adattamento verso un agente a elevato peso molecolare, quale il saccarosio, risulta scarsa o estremamente lenta.

L'analisi di questo comportamento rispetto ai vari agenti osmotici porta nel cuore del problema del meccanismo dell'adattamento, in quanto suggerisce che fenomeni di permeabilità abbiano in esso larga parte. In successivi lavori, tale analisi sarà ripresa, estesa ed integrata dai risultati di altre esperienze.

Bibliografia.

[1] E. C. Teodoresco, « Rev. Gen. Bot. », *18* (1905).
[2] L. R. Blinks, in *Manual of Phycology*, di G. M. Smith, « Chronica Botanica », Waltham 1951.
[3] A. Labbe, « Arch. d'Anat. Microsc. », *21*, f. 3 (1925).
[4] G. M. Smith, *The fresh water algae of the United States*, New York 1933.
[5] F. Cavara, « Rend. Accad. Sc. Fis. e Nat. di Napoli », *9* (1906).
[6] G. Bacci, « Boll. di Zool. », *17*, 49 (1950).
[7] D. I. Arnon, « Plant Phys. », *24*, 1 (1949).
[8] E. Marrè e O. Servettaz, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », Serie VIII, vol. XX (1956).
[9] W. E. Loomis and C. A. Shull, *Methods Plant Physiology*, Mc Grow-Hill, New York 1937.

Fisiologia vegetale. — *Ricerche sulla fisiologia della crescita della radice.* – I. *Impostazione del problema* (*). Nota di FEDERICA TREZZI, presentata (**) dal Socio S. TONZIG.

È noto come fusto e radice siano organi a comportamento fisiologico così diverso da apparire spesso addirittura antagonistico; e come manifestazioni di ciò siano, da una parte, le opposte reazioni che i due organi danno a stimoli naturali quali, tipicamente, quello geotropico; dall'altra la tanto diversa intensità di reazione che fusto e radice danno agli stimoli sperimentali più diversi come, per esempio, il trattamento con auxine, con colchicina, e via dicendo.

Siano o meno strettamente collegati fra loro i due fatti, vale anche la pena di ricordare come alla diversa sensibilità dei due organi faccia riscontro una assai diversa rapidità di differenziazione e, se così si può dire, di maturazione, dei loro tessuti. Intendo alludere alla diversa ampiezza che, nei due organi, hanno le zone ove i tessuti, abbandonato il carattere meristematico, stanno evolvendosi in tessuti adulti primari. Per concretare con un esempio questo richiamo, dirò che nelle plantule di pisello (*Pisum sativum* var. Alaska) i tessuti non più meristematici ma non ancora adulti, dunque in corso di differenziazione e di crescita per distensione occupano, nel fusto, una zona di qualche centimetro; nella radice, invece, di appena 2–3 millimetri. Ne viene anche che, come conseguenza di questa in certo modo più precoce differenziazione, la zona dove i tessuti sono già divenuti incapaci di ulteriore accrescimento è, nella radice, molto più prossima all'apice di quanto non lo sia nel fusto.

Il problema della maggior sensibilità della radice è stato, del resto, riconosciuto e studiato da tempo: si è, peraltro, tuttora nel periodo delle spiegazioni ipotetiche o del reperimento di fatti non ancora sufficienti a chiarire il problema in maniera definitiva. Fatti ed ipotesi ancora si intrecciano. Osservazioni oramai vecchie hanno dimostrato che la viscosità strutturale del plasma, quale può essere valutata in base al tempo ed alla forma di plasmolisi, è, nelle radici, assai più elevata che nel fusto cosicché essa vi ha naturalmente valori che nel fusto si ottengono solo per trattamento con auxine [1]. In entrambi gli organi, d'altra parte, l'acido ascorbico riduce la viscosità del plasma [2]. S'è anche trovato che, in condizioni naturali, l'acido ascorbico è presente nella radice in concentrazioni sensibilmente inferiori che nel fusto e che mentre, nel fusto, il trattamento con auxine stimola la distensione cellulare, l'acido ascorbico la deprime [3, 4]. Messi insieme, questi dati suggeriscono facilmente l'idea che nella radice l'auxina

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano, Centro di studi per le ossido–riduzioni nei vegetali del C.N.R.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1958.

sia presente in concentrazioni maggiori che nel fusto; il risultato potrebbe essere, nella radice, uno stato di eccitazione assai più spinto che nel fusto. I dati succitati, peraltro, farebbero pensare che la concentrazione d'auxina sia, nella radice, maggiore che nel fusto più che altro in senso relativo alla concentrazione d'una sostanza ad azione antiauxinica quale l'acido ascorbico (o meglio, secondo ricerche successive, l'acido deidroascorbico): nella radice, in definitiva, il rapporto fra agenti stimolanti ed agenti inibenti sarebbe spostato, in confronto al fusto, più in favore dei primi ottenendosi una stimolazione di grado già prossimo a quello ottimale o addirittura superottimale.

Del resto, l'idea che la radice abbia un comportamento tanto diverso dal fusto come conseguenza d'una sua carica sovraottimale d'auxina, è assai più vecchia dei lavori che ho ora citato [5]. I dati sperimentali che l'hanno suggerita sono noti: in una radice o in fusto che siano posti in posizione orizzontale, l'auxina subisce un trasporto trasversale e, abbandonando il fianco ch'è venuto a trovarsi verso l'alto, tende a concentrarsi nel fianco rivolto verso il basso. Nel fusto, tale concentrazione è ancora inferiore a quella ottimale; nella radice, per contro, essa è già largamente superottimale; nel fusto, di conseguenza, il fianco verso il basso si accresce assai più di quello verso l'alto; nella radice, invece, mentre il fianco verso l'alto si allunga maggiormente, quello verso il basso è addirittura inibito; ne segue che entrambi gli organi si curvano, peraltro in opposta direzione: verso l'alto il fusto, verso il basso la radice. Se, d'altra parte, si asporta sia ad un fusto (o a un coleottile) che ad una radice il centro auxinogeno rappresentato dall'apice meristematico, la conseguente caduta di concentrazione auxinica determina un rallentamento, o addirittura un arresto, della crescita del fusto, un suo acceleramento nella radice. Infine, il trattamento con auxine, sia pure a piccolissime concentrazioni, è seguito da una accelerazione della crescita nel fusto, da un suo rallentamento nella radice.

La validità di quest'ultimo reperto non a tutti è apparsa, in verità, indiscutibile. Non sono mancate, infatti, osservazioni discordanti in base alle quali il trattamento di radici integre con soluzioni molto diluite di auxina ne stimolerebbe la crescita. Va tuttavia osservato che i risultati di questo genere non sono facilmente riproducibili nemmeno se ci si ponga in condizioni sperimentali rigorosamente identiche; e qualche volta si hanno solo in ritardo, vale a dire dopo la scomparsa, nel tessuto, dell'auxina somministrata [6, 7, 8, 9]: ciò che non sembra essere favorevole ad una interpretazione in senso positivo di questi risultati.

La letteratura sulla fisiologia della crescita della radice è peraltro molto vasta né io ho bisogno di tentar di riassumerla esistendo, a tale riguardo, ottime monografie [10, 11]. Solo mi limiterò a far cenno di quelle ipotesi che più mi è sembrato di dovere tener presenti durante l'esecuzione delle mie proprie ricerche.

Affiora da una gran quantità di ricerche l'opinione che l'acido indolacetico somministrato alle radici dall'esterno abbia effetti che sostanzialmente

non differiscono da quelli ch'esso provoca nei fusti. Più che in senso qualitativo, la reazione sarebbe diversa in senso quantitativo a causa della concentrazione sopraottimale dell'auxina nativa nella radice. Viene altresì affermato che l'azione inibitrice dell'auxina sull'accrescimento longitudinale della radice non significa affatto una attenuata intensità dei processi di crescita in generale, quanto un mutamento del loro concretarsi: anziché distendersi in direzione normalmente polare, le cellule subirebbero un ingrandimento isodiametrico o addirittura soprattutto in senso radiale mentre un numero anormalmente maggiore di mitosi – la cui quantità complessiva rimarrebbe inalterata – si orienterebbero secondo un piano trasversale alla radice.

Del tutto diversa è l'ipotesi cui è pervenuto Burström [12, 13, 14]. Egli ammette che la crescita per distensione della cellula radicale avvenga in due fasi la prima delle quali implicherebbe una « dissoluzione » della membrana, la seconda (di effetto preminente) una deposizione di nuovo materiale nella membrana. Agendo diversamente sulle due fasi, l'auxina avrebbe una contemporanea azione di stimolo e di inibizione sulla crescita della radice, ma dei due effetti il secondo sarebbe dominante. La « dissoluzione » o « plasticizzazione » della membrana sarebbe possibile a causa della natura pectica della membrana cellulare primaria e consentirebbe un ingrandimento passivo della cellula determinato da un assorbimento d'acqua e accompagnato dall'assottigliamento della membrana. Su questa fase della crescita, l'auxina agirebbe sia sulla distensibilità plastica irreversibile che su quella elastica reversibile favorendo però piuttosto quest'ultima che la prima, ciò che darebbe già ragione d'una parte della sua azione inibente la crescita. Quanto alla seconda fase, cui si deve la maggior parte della crescita per distensione, l'auxina avrebbe su di essa un'azione sfavorevole, abbreviandone la durata ed accelerando così l'irrigidimento della membrana. Più di recente, lo stesso Burström ha espresso l'opinione che l'arresto dell'allungamento della cellula radicale possa essere dovuto a una diminuzione della concentrazione d'auxina, durante la distensione della cellula, sino a valori insufficienti a consentire la distensione plastica della membrana.

È necessario ch'io ricordi a questo punto come lo studio della fisiologia dell'accrescimento delle radici sia andato accumulando prove sempre più numerose dell'esistenza nelle radici, accanto a sostanze stimolanti quali l'acido indolacetico, di sostanze che invece inibiscono la crescita sia delle radici che dei fusti. Quale sia il significato per il normale accrescimento delle radici di queste sostanze, non appare in verità chiaro; ed anche meno chiara è la natura dell'inibitore che, per esempio, viene indicato da Burström con la denominazione di « fattore X » [15]. È comunque evidente che l'esistenza di inibitori naturali nelle radici, se di grande interesse per lo studio generale della fisiologia della loro crescita, potrebbe sembrare priva di collegamenti col problema particolare di cui io mi occupo e che riguarda il modo diverso – nei confronti del fusto – col quale la crescita delle radici reagisce all'auxina sia nativa che esogena. Senonché, proprio a questo proposito, esistono

alcune assai interessanti ricerche le quali tendono a indicare uno stretto nesso tra azione dell'auxina ed azione, o addirittura insorgenza, dell'inibitore.

Intendo alludere alle ricerche di Libbert secondo le quali l'accrescimento delle radici sarebbe sottoposto all'azione di un inibitore la cui formazione sarebbe dovuta proprio all'auxina. Con i suoi primi reperti [16,17], tale autore avrebbe dimostrato, in piante di pisello, la presenza d'un sistema inibitore, forse identificabile col « fattore X » di Burström, che viene attivato per azione dell'auxina. In forma di precursore inattivo, l'inibitore si formerebbe nelle radici; da queste esso migrerebbe nel germoglio e quivi verrebbe attivato per opera dell'auxina alla quale, dunque, sarebbe dovuta la trasformazione del precursore in inibitore. Successive ricerche [18] hanno condotto lo stesso Libbert ad ammettere che nelle piante eziolate il precursore si formi unicamente nelle radici e che nelle piante verdi, invece, esso si formi anche nelle foglie; inoltre, che la sua attivazione avvenga non solo nel germoglio ma anche nelle radici. All'inibitore da lui individuato, Libbert dà il nome di « inibitore correlativo » perché è in base ad esso ed alla sua attivazione particolarmente intensa nei centri auxinogeni ch'egli spiega i fenomeni d'inibizione correlativa come, in modo particolare, l'inibizione delle gemme ascellari ad opera delle foglie. Fenomeni analoghi di trasformazione indotta dall'auxina del precursore in inibitore, Libbert ammette avvenire anche nelle radici; una prova di ciò egli indica nel fatto che radici sperimentalmente arricchite d'auxina contengono una quantità maggiore di inibitore (capace di inibire la crescita delle radici e reperibile nella frazione neutra dell'estratto etereo) delle radici normali, e queste, a loro volta, ne contengono più delle radici impoverite d'auxina per decapitazione. In via d'ipotesi, Libbert esprime l'opinione che l'accrescimento delle radici sia regolato da un inibitore sul quale l'auxina esercita la sua influenza in duplice maniera: deboli concentrazioni d'auxina si comporterebbero come antagoniste dell'inibitore e quindi stimolerebbero la crescita, più forti concentrazioni d'auxina determinerebbero la trasformazione del precursore in inibitore così inibendo la crescita.

Le prove sperimentali che Libbert fornisce a sostegno della sua teoria non sembra, peraltro, siano ancora esaurienti. E benché, come già ho detto, molti altri studiosi abbiano lavorato alla soluzione del problema e numerosi ed assai interessanti siano i dati di fatto che sono stati raccolti, questi sono ancora scarsamente collegabili fra loro, sono talvolta contraditori e, comunque, ancora non consentono una discussione realistica sul meccanismo col quale l'auxina partecipa alla regolazione della crescita della radice e su quello che dà alla stessa radice l'apparenza, almeno, di una assai maggiore sensibilità all'auxina.

Nel tentativo di coordinare i fatti già noti e di avvicinare il problema alla sua soluzione, io ho condotto una serie di ricerche i cui risultati saranno esposti in note successive. In questa prima nota, avente più che altro finalità introduttive, io desidero precisare le premesse dalle quali le mie ricerche hanno preso le mosse e le direttive cui si sono ispirate.

Da tempo, come già ho ricordato, sono in atto presso questo Istituto ricerche sulla fisiologia della crescita di organi caulinari e, più in particolare, sul significato da attribuire, a tale riguardo, al sistema dell'acido ascorbico. Un primo gruppo di ricerche [2, 3, 4, 19] è servito a dimostrare che l'acido ascorbico, sia quello endogeno che quello sperimentalmente somministrato, ha, sui tessuti caulinari e su tutti i fenomeni influenzabili dall'auxina, una azione di tipo opposto. Le successive indagini, condotte allo scopo di chiarire il meccanismo d'azione dell'acido ascorbico, ha permesso di individuare due concrete manifestazioni di tale meccanismo. Da una parte è stata indicata un'azione competitiva dell'acido ascorbico nei confronti dell'auxina [20]: è da ritenere per più fatti che l'auxina sia attiva soltanto se, a guisa d'un enzima, legata in un complesso auxin–proteico, ed è sulla formazione e sulla conservazione di tale complesso che l'acido ascorbico ha mostrato di esercitare un'azione competitrice che si risolve nel mantenere libera, e pertanto inattiva, una corrispondente quantità di auxina. D'altra parte [21, 22, 23] è stato riconosciuto che, del sistema dell'ascorbico, soltanto il deidroascorbico, e non l'acido ascorbico in forma ridotta, ha azione antiauxinica. Còmpito dell'auxina, in tutto o in parte, appare quello di regolare l'ossidazione dell'acido ascorbico frenando l'attività ascorbico–ossidasica. Quanto all'acido deidroascorbico, la sua azione sfavorevole alla crescita viene esercitata in più modi: direttamente su taluni sistemi respiratori, spostando il rapporto tra forma ridotta e forma ossidata del glutatione, influendo sull'andamento dei processi d'ossido–riduzione dai quali dipende la sintesi di legami fosforici ad alto contenuto energetico. Era da vedere, cosa ch'io ho cercato di fare, se ed in quale misura fatti analoghi a questi, che sono stati studiati nei fusti, si ripetano nelle radici e quale azione vi eserciti l'eventuale differenza relativa nella carica endogena di auxina e del sistema dell'acido ascorbico e del glutatione.

Parallelamente a questo, le mie ricerche si sono svolte secondo un altro indirizzo: quello relativo all'azione di inibitori la cui comparsa, o la cui attività, siano condizionate dall'auxina stessa e, di conseguenza, risentano in senso inverso dell'azione di sostanze antiauxiniche.

Si tratta di indirizzi d'indagine distinti ma non indipendenti e che io ho anzi cercato di coordinare fra loro.

BIBLIOGRAFIA.

[1] C. TORRIANI, Lavori di Bot. pub. in occ. del 70° genet. di G. Gola, Padova, p. 385 (1947).
[2] S. TONZIG e F. TREZZI, «N. Giorn. Bot. It.», n. s., vol. 57, p. 515 (1950).
[3] S. TONZIG e F. TREZZI, «N. Giorn. Bot. It.», n. s., vol. 57, p. 535 (1950).
[4] S. TONZIG e F. TREZZI, «N. Giorn. Bot. It.», n. s., vol. 57, p. 549 (1950).
[5] F. W. WENT e K. V. THIMANN, *Phytohormones*, New York (1949).
[6] R. POHL, «Ber. Deut. Bt. Ges.», vol. 64, p. 132 (1951).

[7] G. Ochs, « Planta », vol. 44, p. 412 (1954).
[8] L. J. Audus e A. Garrard, « J. Expt. Bt. », vol. 4, p. 330 (1953)
[9] L. J. Audus e R. Thresh, « Physiol. Plant. », vol. 6, p. 451 (1953).
[10] J. G. Torrey, « Annual Rev. Plant. Physiol. », vol. 7, p. 237 (1956).
[11] B. Åberg, « Annual Rev. Plant. Physiol. », vol. 8, p. 153 (1957).
[12] H. Burström, « Ann. Agr. Coll. Swed. », vol. 10, p. 209 (1942).
[13] H. Burström, « Physiol. Plant. », vol. 5, p. 391 (1952).
[14] H. Burström, « Physiol. Plant. », vol. 6, p. 262 (1953).
[15] H. Burström, « Physiol. Plant. », vol. 7, p. 548 (1954).
[16] E. Libbert, « Planta », vol. 44, p. 286 (1954).
[17] E. Libbert, « Naturwiss. », vol. 42, p. 158 (1955).
[18] E. Libbert, « Planta », vol. 45, p. 405 (1955).
[19] S. Tonzig e F. Trezzi, « Rend. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. Fis., serie VIII, vol. 16, p. 434 (1954).
[20] S. Tonzig e F. Trezzi, « Rend. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. Fis., serie VIII, vol. 17, p. 324 (1954).
[21] S. Tonzig, F. Trezzi, G. Laudi, E. Marrè, « Atti Acc. Naz. Lincei », Memorie Cl. Sc. Fis., serie VIII, vol. 4, p. 109 (1955).
[22] S. Tonzig e E. Marrè, « Rend. Ist. Lomb. Sc. Lett. », Cl. Sc., vol. 89, p. 243 (1955).
[23] F. Trezzi, « Rend. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. Fis., serie VIII, vol. 21, p. 1 (1956).

Fisiologia. — *Misura contemporanea della pressione endopleurica ed endoesofagea nel cane* (*). Nota (**) di Giuseppe Milic-Emili e Jean Marie Petit, presentata dal Socio R. Margaria.

In un lavoro precedente (Petit e Milic-Emili [1]) era stato prospettato che la differenza in % esistente tra le variazioni di pressione endosofagea (ΔP_{ES}), misurate mediante un palloncino posto nell'esofago e collegato mediante una sonda ad un manometro, e le variazioni di pressione endotoracica (ΔP_{TR}) fosse espressa dalla equazione:

$$(1) \qquad \frac{\Delta P_{TR} - \Delta P_{ES}}{\Delta P_{TR}} \cdot 100\% = \frac{dVa}{dPa} \cdot \frac{dPes}{dVes}$$

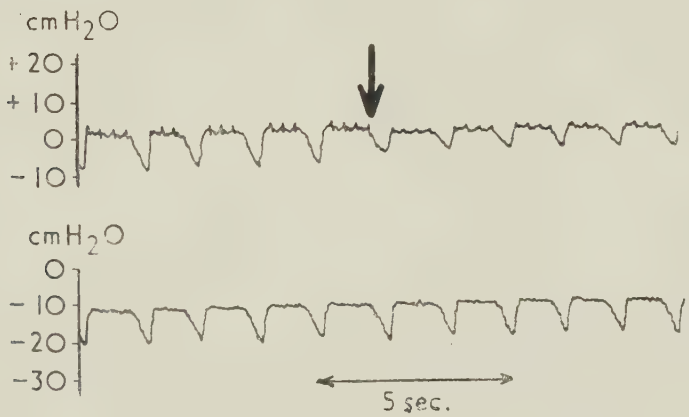


Fig. 1. – Tracciati simultanei della pressione endoesofagea (sopra) e della pressione endopleurica (sotto) durante la respirazione spontanea in un cane di 13,5 Kg. La freccia indica il momento in cui il coefficiente volume/pressione dell'apparecchiatura di misura veniva variato da 4 a 43 ml/cm $H_2O \times 10^{-3}$.

ove il coefficiente dVa/dPa rappresenta la variazione di volume in ml per cm H_2O di variazione di pressione dell'apparecchiatura di misura della pressione endoesofagea ed il coefficiente $dPes/dVes$ esprime l'elastanza delle pareti dell'esofago, cioè la variazione di pressione in cm H_2O per ml di variazione del volume di aria contenuto nel palloncino endoesofageo.

(*) Lavoro eseguito negli Istituti di Fisiologia Umana dell'Università di Milano, di Pathologie Expérimentale – Faculté de Médecine, Nancy (Francia), ed E. Malvoz Physiopathologie du Travail, Liège (Belgio).

Questa ricerca è stata effettuata con l'aiuto finanziario dell'Alta Autorità della Comunità Europea del Carbone e dell'Acciaio.

(**) Pervenuta all'Accademia il 2 agosto 1958.

Scopo del presente lavoro è la misura contemporanea di tutti i membri della (1) al fine di verificare la validità dell'ipotesi prospettata.

A tal fine in due cani anestetizzati con Nesdonal è stata praticata la misura contemporanea della pressione endopleurica, col metodo di Setnikar e coll. [2], cioè in assenza di pneumotorace, e della pressione endoesofagea, mediante una sonda introdotta nel terzo inferiore dell'esofago, che era munita alla sua estremità endoesofagea di un palloncino di gomma. L'altra estremità della sonda era collegata ad un manometro a capacitanza Racia. Il coefficiente dVa/dPa veniva variato mediante l'interposizione tra la sonda ed il manometro di pipette tarate di vario volume ripiene di aria.

Durante gli esperimenti è stata misurata pure l'elastanza delle pareti dell'esofago, col metodo di Petit e Milic-Emili [1], [3].

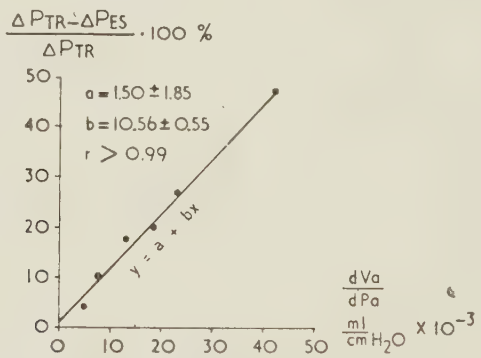


Fig. 2. – *Ordinata*: differenza in °/₀ tra variazioni di pressione endotoracica ed endoesofagea. *Ascissa*: coefficiente volume/pressione dell'apparecchiatura di misura in ml/cm $H_2O \times 10^{-3}$.

La funzione è una retta ($y = a + bx$) che è stata calcolata col metodo dei minimi quadrati: i valori dei parametri a e b sono indicati insieme con la loro deviazione standard: a è nullo (statisticamente non significativo), e b corrisponde all'elastanza delle pareti dell'esofago, che, misurata direttamente nel corso dello stesso esperimento, è risultata di 10,55±0,57 cm H_2O/ml.

Nella fig. 1 sono esposti i tracciati sperimentali della pressione endopleurica e della pressione endoesofagea ottenuti in una prova effettuata nel primo cane. Durante tale esperimento il coefficiente dVa/dPa veniva variato da 4 a 43 ml/cm $H_2O \cdot 10^{-3}$. Utilizzando i dati della fig. 1, insieme a quelli ottenuti in altri esperimenti, è stata costruita la fig. 2, ove la differenza tra le variazioni di pressione endopleurica ed endoesofagea espressa in °/₀ (ordinata) è posta in funzione del coefficiente dVa/dPa (ascissa). In tale figura i dati sperimentali si dispongono lungo una retta del tipo $y = bx$, in accordo con la (1): il parametro b è evidentemente espressione dell'elastanza delle pareti dell'esofago. Infatti il valore di elastanza così calcolato corrisponde quantitativamente al dato ottenuto per misura diretta, che è risultato di 10,55 ± 0,57.

I dati ottenuti nel secondo cane sono dello stesso tipo.

Dai risultati ottenuti appare che, misurando le variazioni di pressione endoesofagea, il coefficiente dVa/dPa e l'elastanza dell'esofago, è quindi possibile di calcolare ΔP_{TR}, e conoscere un parametro di importanza fondamentale in meccanica respiratoria, la cui misura diretta nell'uomo ovviamente non può essere praticata che eccezionalmente.

Bibliografia.

[1] J. M. Petit e G. Milic-Emili, « Journal Appl. Physiol. », in corso di pubblicazione.
[2] I. Setnikar, E. Agostoni e A. Taglietti, « Arch. Sci. Biol. », *41*, 312 (1957).
[3] J. M. Petit e G. Milic-Emili, « Boll. Soc. Ital. Biol. Sper. », *33*, 1654 (1957).

Fisiologia. — *Risposte rotatorie e post–rotatorie cerebellari e variazioni della pressione arteriosa nel gatto curarizzato con d–tubocurarina e con succinilcolina* (*). Nota (**) di TORQUATO GUALTIEROTTI e DINO PASSERINI, presentata dal Socio R. MARGARIA.

Precedenti ricerche (1) avevano dimostrato che la corteccia cerebellare degli uccelli presenta una sensibilità assai elevata alle sollecitazioni rotatorie. Infatti si poteva ottenere un'apprezzabile risposta, costituita da un aumento di ampiezza dell'attività elettrica cerebellare, per valori di accelerazione centripeta di 0,001 g.

Allo scopo di stabilire se tale sensibilità fosse caratteristica degli uccelli soltanto o presente anche nei mammiferi, sono stati eseguiti esperimenti registrando l'elettrocerebellogramma da vari punti della corteccia cerebellare del gatto curarizzato, durante e dopo sollecitazioni rotatorie di varia entità.

L'animale, previa apertura della teca cranica in narcosi da etere e protossido d'azoto per l'esposizione dell'adatta sezione della corteccia cerebellare, veniva profondamente curarizzato. Si sono usate a questo scopo tanto d–tubocurarina (Intocostrin Squibb, 10 u. pro Kg), che succinilcolina, 1 mg pro Kg. L'animale, in respirazione artificiale, veniva poi solidamente fissato al tavolo di contenzione della centrifuga le cui caratteristiche sono già state descritte altrove (2). La testa era bloccata da una fascia metallica assicurata con viti infisse nello spessore del cranio, in modo da non subire spostamenti rispetto al braccio rotante. La respirazione artificiale poteva essere mantenuta ininterrottamente anche durante la rotazione.

I potenziali cerebellari venivano raccolti mediante due diversi tipi di elettrodi impolarizzabili di Ag–AgCl. In un tipo, per registrare da zone più estese, il contatto sulla superficie cerebellare aveva luogo per mezzo di due fili di cotone imbevuto di soluzione isotonica di NaCl. Nel secondo tipo, adatto per registrazioni da porzioni assai piccole della corteccia, il contatto avveniva direttamente mediante elettrodi costituiti da due chiodini di argento clorurato di 0,4 mm di diametro, lunghi 1,5 mm, infissi nello spessore della corteccia. Questi erano saldati a fili d'acciaio inossidabile smaltato del diametro di 100 micron, avvolto a spirale. Ambedue questi tipi di

(*) Dal Laboratorio di Fisiologia Umana dell'Università di Milano.

Questa ricerca è stata finanziata dall'Ufficio di Ricerca Scientifica dell'Air Research and Development Command, United States Air Force, tramite il suo Ufficio Europeo, secondo il Contratto AF 61(052)–23.

(**) Pervenuta all'Accademia il 2 agosto 1958.

(1) T. GUALTIEROTTI e D. PASSERINI, su questi « Rendiconti ».

(2) T. GUALTIEROTTI, B. SCHREIBER, D. MAINARDI e D. PASSERINI (1958), in corso di stampa sull'« Am. J. Physiology ».

elettrodi hanno dimostrato di essere i più adatti per evitare disturbi meccanici dovuti al moto rotatorio, specialmente quando l'accelerazione di partenza e di arresto era molto elevata.

L'attività elettrica cerebellare era amplificata attraverso pre-stadi differenziali in resistenza-capacità, ad alta discriminazione, con una costante di tempo di circa 1/10 sec e registrata con tubo a raggi catodici a cinque canali: su un primo canale era sempre riportata l'accelerazione centripeta, misurata con accelerometro capacitivo fissato al braccio rotante; su un secondo canale veniva registrata l'accelerazione tangenziale (fig. 2) mediante accelerometro analogo a quello precedente. Nei residui tre canali si osservavano i potenziali biologici: da tre diversi punti del cervelletto, oppure da due punti del cervelletto e dai muscoli della nuca o del dorso per controllare la completa paralisi curarica (fig. 3). Occasionalmente invece dell'accelerazione tangenziale veniva registrata la pressione arteriosa alla femorale mediante elettromanometro (figg. 1 e 3).

Per mettere in evidenza eventuali artefatti sono stati eseguiti controlli: 1° ad animale morto; 2° ad animale profondamente narcotizzato; 3° dopo vasta demolizione o 4° novocainizzazione profonda della corteccia cerebellare. Con questa tecnica artefatti da movimento comparivano soltanto per accelerazioni tangenziali assai elevate (almeno 2-3 g) ed erano rilevabili come una o due punte, della durata di 0,05-0,1 sec, facilmente riconoscibili date le caratteristiche degli amplificatori usati, e che non alteravano la registrazione successiva dei potenziali biologici. D'altra parte valori così elevati di accelerazione tangenziale erano assai raramente raggiunti.

La particolare costruzione degli elettrodi testè descritti dà ragione della scarsità di artefatti meccanici. Questi elettrodi non esercitando alcuna costrizione sulla massa cerebellare ed essendo raccordati agli amplificatori con un collegamento molto leggero, elastico e flessibile, evitano modificazioni meccaniche, e conseguentemente elettriche, dovute a movimenti prodotti dalla accelerazioni, o dalle vibrazioni cardiache.

I risultati ottenuti dimostrano che risposte all'accelerazione rotatoria e tangenziale si rilevano soltanto dal flocculo-nodulo, mentre regioni anche vicine non presentano alcuna variazione elettrica durante la rotazione (fig. 1). La risposta consisteva in un aumento di ampiezza dell'attività elettrica cerebellare che poteva diventare, durante accelerazioni di 0,1 g, fino a 6-7 volte la norma (200 anziché 25-30 μ V), e in una diminuzione della frequenza da 150-200 a 70-80 cicli/sec. Aumentando la costante di tempo dell'amplificatore si poteva constatare che tale variazione di frequenza era reale, e i valori riscontrati erano corretti. La registrazione contemporanea dell'elettromiogramma permetteva di stabilire che la curarizzazione era sufficientemente efficace perché non si avessero potenziali muscolari di ampiezza apprezzabile durante gli esperimenti (fig. 3) nel gatto curarizzato con d-tubocurarina. Nel gatto curarizzato con succinilcolina, invece, (fig. 2) assai raramente si riusciva ad abolire totalmente i potenziali muscolari, per quanto questi fossero assai ridotti.

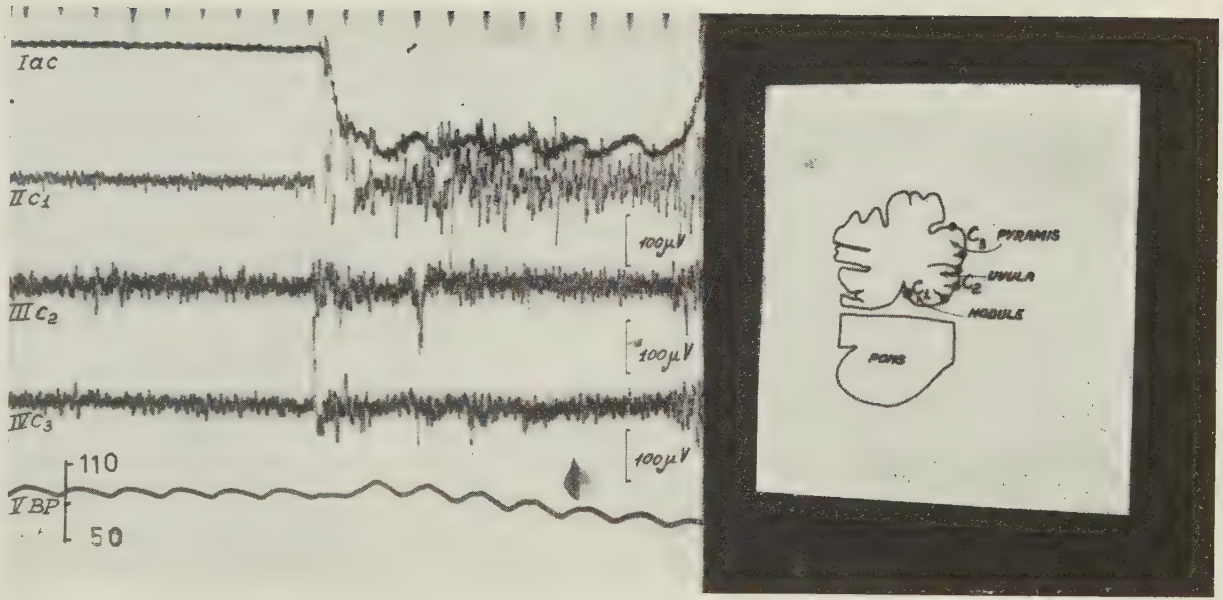


Fig. 1. – Gatto curarizzato con d-tubocurarina. Rotazione orizzontale.

I *ac*: accelerazione centripeta = 0,1 g.

II c_1: attività elettrica cerebellare registrata dal flocculo-nodulo sinistro.

III c_2: attività elettrica cerebellare registrata dal lobo posteriore a 2 mm da II.

IV c_3: attività elettrica cerebellare registrata dal lobo posteriore a 5 mm da II.

V *BP*: pressione arteriosa alla femorale.

La risposta cerebellare è limitata al flocculo-nodulo. L'ampiezza dell'attività elettrica è notevolmente aumentata e la frequenza diminuita (da 150-200/sec a 70-80/sec).

Segnatempo 1/4 sec. Taratura elettromanometro e amplificazione indicate nella figura.

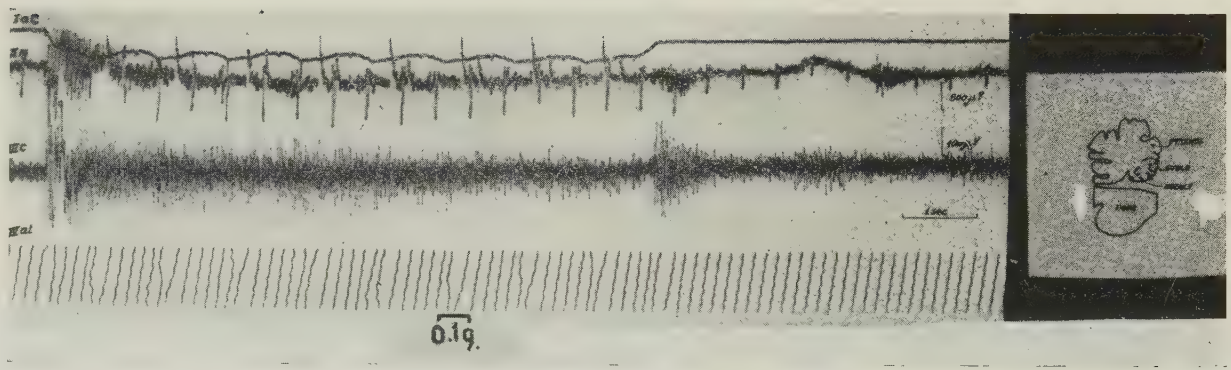


Fig. 2. – Gatto curarizzato con succinilcolina. Rotazione orizzontale.

I *ac*: accelerazione centripeta = 0,01 g.

II *m*: elettromiogramma dei muscoli dorsali. È visibile anche la componente R dell'e.c.g.

III *c*: elettrocerebellogramma dal flocculo-nodulo.

IV *at*: accelerazione tangenziale registrata trasversalmente, asse dei tempi = 100 m/sec.

Nell'attività cerebellare una scarica postuma che dura 2–3 secondi segue la fine della rotazione. Questo è dovuto alla sufficiente durata dell'accelerazione centripeta di 0,01 g.

Si osserva qualche scarica muscolare a causa dell'incompleta curarizzazione.

Tempo, taratura accelerometro tangenziale e amplificazione indicati nella figura.

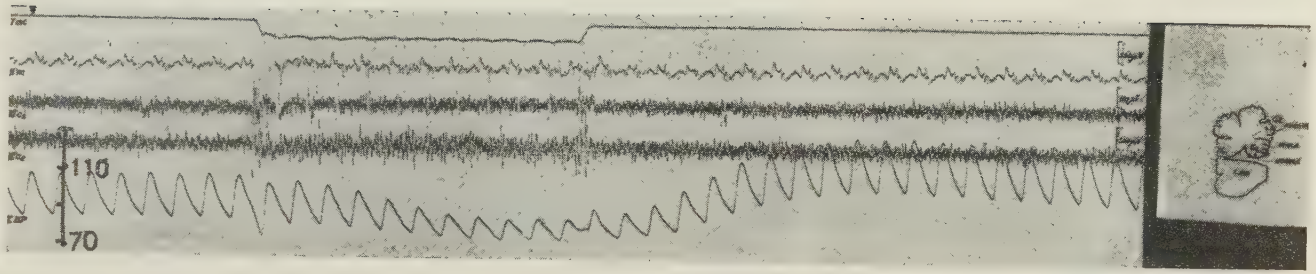


Fig. 3. – Gatto curarizzato con d–tubocurarina. Rotazione orizzontale.

I *ac*: accelerazione centripeta = 0,01 g.
II *m*: elettromiogramma dei muscoli dorsali. È visibile anche la componente R dell'e.c.g.
III c_1: elettrocerebellogramma dal lobo posteriore, sopra il flocculo-nodulo.
IV c_2: elettrocerebellogramma dal flocculo–nodulo.
V *BP*: pressione arteriosa alla femorale.

La risposta all'accelerazione è limitata al flocculo–nodulo. L'accelerazione non è durata abbastanza o non è stata abbastanza intensa per produrre una larga scarica postuma. La pressione arteriosa scende durante la rotazione. Il polso diviene più piccolo. Un aumento di rimbalzo della pressione arteriosa e dell'ampiezza del polso segue la fine della rotazione. L'accelerazione centripeta a livello dell'arteria femorale da cui la pressione arteriosa è rilevata, è 10 volte l'accelerazione a livello dei canali semicircolari, data la differenza nel raggio di rotazione.

Segnatempo 1/4 sec. Taratura elettromanometro e amplificazione indicate nella figura.

Al termine della rotazione, nel gatto trattato con d–tubocurarina, la scarica postuma è ridotta a qualche decimo di secondo. Nel gatto trattato con succinilcolina (fig. 2) la scarica postuma consiste in un decremento esponenziale dei potenziali, dal massimo valore raggiunto all'arresto a un valore poco più elevato di quello fisiologico: questo fenomeno ha luogo in circa 1 sec. Dopo un altro secondo di intervallo in cui l'attività non muta, si rileva una scarica fusiforme della durata di circa 0,5 sec che precede il ritorno definitivo all'ampiezza normale. Come si è detto precedentemente la succinilcolina non provoca una completa paralisi muscolare, però dall'esame comparativo dell'elettromiogramma e dell'elettrocerebellogramma sembra di poter escludere una influenza reciproca delle due attività elettriche (fig. 2).

La pressione arteriosa nell'animale curarizzato è normalmente inferiore di 10–15 mm Hg rispetto a quella precedente la curarizzazione e scende durante la rotazione anche quando l'accelerazione centripeta è solo 0,1 g (fig. 3). Dopo la fine della rotazione si ha un lento risalire della pressione arteriosa che in circa 2,5 sec supera il valore normale, per ritornare al valore prerotatorio nei 3–4 sec successivi. Di pari passo varia l'ampiezza del polso; anche in questo caso si ha un fenomeno di rimbalzo, costituito da un tardivo incremento.

Tanto le variazioni di ampiezza dell'attività cerebellare che le modificazioni della pressione arteriosa e del polso imputabili all'accelerazione centripeta, fino a 0,1 g, non si osservano più se l'animale è sottoposto a narcosi profonda da etere o da barbiturico.

Dall'insieme dei risultati suesposti si conferma *a*) l'alta sensibilità cerebellare alle accelerazioni (0,01 g); *b*) che le risposte elettriche rotatorie e postrotatorie risultano limitate alla regione del flocculo–nodulo; *c*) che l'aumento di ampiezza e la diminuzione di frequenza dell'attività cerebellare, tipiche risposte della corteccia cerebellare ad impulsi afferenti, si rilevano anche quando gli stimoli provengono dal labirinto; *d*) che l'effetto postumo costituito dalle due scariche postrotatorie è presumibilmente da mettersi in relazione con l'inerzia del sistema recettore dei canali semicircolari. È noto infatti che la modificazione plastica dell'ampolla e lo spostamento della cresta dovuti alla sollecitazione rotatoria richiedono qualche secondo per il ritorno alla norma.

Si è anche messa in evidenza una differenza nell'effetto cerebellare della d–tubocurarina in rapporto alla succinilcolina, cioè dei curarici iperpolarizzanti rispetto a quelli depolarizzanti: la d–tubocurarina sembra ridurre leggermente la sensibilità cerebellare alle accelerazioni rotatorie, ma abolisce quasi del tutto la scarica postrotatoria che si osserva invece nell'animale trattato con succinilcolina. Poiché le scariche postrotatorie, data la loro lunga latenza e durata, sono verosimilmente l'espressione dell'eccitazione di lunghe catene interneuroniche, si può prospettare l'ipotesi che i curarici iperpolarizzanti inibiscano le sinapsi interneuroniche e quelli depolarizzanti non producano questo effetto.

Fisiologia. — *Sul consumo di O_2 di omogenati di cervello di ratti intossicati con streptomicina o con diidrostreptomicina* (*). Nota di PIETRO D'ARCANGELO e MARCO MARCHETTI, presentata (**) dal Corrisp. G. AMANTEA.

In precedenti esperienze (D'Arcangelo [1]; D'Arcangelo e Marchetti [2]), saggiando *in vitro* gli effetti della streptomicina e della diidrostreptomicina sulla respirazione di omogenati di vari organi (cervello, rene, fegato, milza) di ratto, osservammo che i due antibiotici provocavano negli omogenati di cervello, a partire da determinate concentrazioni (300–400 μg/ml), una netta e costante diminuzione del consumo di O_2, mentre risultavano praticamente inattivi, anche alle concentrazioni massime da noi esplorate (10.000 μg/ml), sugli omogenati degli altri organi. Nel considerare il significato del particolare effetto rilevato in dette esperienze sugli omogenati di cervello, prospettammo l'eventualità che esso potesse essere espressione di una particolare suscettibilità della sostanza nervosa all'azione dei due antibiotici e costituire in tal caso un importante elemento chiarificatore per interpretare l'azione elettivamente neurotossica che questi farmaci notoriamente esercitano nell'organismo animale (Donatelli e Galeotti–Flori [3]; Cerquiglini e Chiucini [4]; Molitor e Graessle [5]).

Spinti da questa considerazione, estendendo le nostre indagini all'azione *in vivo* della streptomicina e della diidrostreptomicina, abbiamo voluto innanzi tutto verificare se anche nell'omogenato di cervello di ratti intossicati con questi farmaci risultasse evidente una inibizione del consumo di O_2, analogamente a quanto avevamo osservato nelle esperienze *in vitro*. A questo scopo abbiamo eseguito una serie di misurazioni comparative del consumo di O_2 di omogenati di cervello di ratti normali e di ratti intossicati con streptomicina o con diidrostreptomicina.

Le esperienze sono state condotte su 39 ratti albini (21 ♂ e 18 ♀) adulti, di peso variabile da 95 a 170 g, tutti appartenenti ad uno stesso ceppo e approssimativamente della stessa età.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta dell'8 novembre 1958.

(1) P. D'ARCANGELO, « Rend. Acc. Naz. Lincei », XXII (fasc. 5), 654 (1957).

(2) P. D'ARCANGELO e M. MARCHETTI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (in corso di stampa).

(3) L. DONATELLI e A. GALEOTTI–FLORI, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », *23*, 578 (1947); « Arch. Sc. Farm. », *1*, 183 (1948); L. DONATELLI, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », *24*, 462 (1948).

(4) S. CERQUIGLINI e G. CHIUCINI, « Boll. Soc. It. Biol. Sper, », *25*, 1130 (1949); *26*, 1029 e 1366 (1950); G. CHIUCINI, ibidem, *26*, 1031, 1033, 1368 e 1371 (1950).

(5) H. MOLITOR e O. E. GRAESSLE, « Pharmacol. Rev. », *2*, 1 (1950).

Tabella I.

Consumo di O_2 degli omogenati di cervello di ratti normali e di ratti intossicati con streptomicina o con diidrostreptomicina.

Controlli							Ratti intossicati con streptomicina							Ratti intossicati con diidrostreptomicina						
N. animale	Sesso	Peso, g	µl O_2/g tessuto fresco intervallo di tempo in min				N. animale	Sesso	Peso, g	µl O_2/g tessuto fresco intervallo di tempo in min				N. animale	Sesso	Peso, g	µl O_2/g tessuto fresco intervallo di tempo in min			
			0–30	30–60	60–90	90–120				0–30	30–60	60–90	90–120				0–30	30–60	60–90	90–120
1	♀	95	213	213	204	210	14	♀	95	294	215	230	204	27	♀	100	339	241	241	259
2	♂	140	204	205	217	191	15	♂	150	325	265	284	224	28	♂	165	280	205	204	222
3	♂	170	312	255	277	227	16	♂	125	252	194	168	114	29	♂	165	293	271	255	249
4	♀	100	277	255	246	201	17	♀	95	375	319	322	255	30	♂	140	272	286	243	214
5	♂	130	319	292	297	289	18	♂	150	355	273	281	209	31	♀	100	283	250	274	215
6	♀	110	252	225	241	225	19	♂	145	297	264	240	265	32	♂	125	264	246	227	233
7	♀	105	234	275	192	263	20	♀	95	244	231	215	240	33	♀	105	261	182	203	198
8	♂	125	235	256	239	265	21	♀	100	369	348	319	312	34	♀	95	306	246	245	229
9	♂	120	274	247	260	252	22	♂	120	288	307	274	271	35	♂	155	308	218	250	218
10	♂	150	211	206	191	191	23	♀	100	312	275	272	250	36	♀	115	287	248	190	173
11	♀	110	413	380	360	345	24	♂	110	315	194	194	152	37	♂	120	222	222	198	198
12	♂	135	334	293	253	270	25	♀	115	311	278	247	241	38	♀	105	306	209	209	190
13	♀	110	218	265	224	215	26	♂	150	253	224	190	184	39	♂	125	205	232	213	222
medie		*123*	*269*	*259*	*246*	*242*	*medie*		*119*	*307*	*260*	*248*	*224*	*medie*		*124*	*279*	*235*	*227*	*217*
σ		± 21,5	± 61	± 47	± 46	± 45	σ		± 23	± 43	± 47	± 49	± 53	σ		± 25	± 36	± 28	± 26	± 24

TABELLA II.

	μl O_2/g tessuto fresco intervallo di tempo in min				Differenze		
	0–30 (A)	30–60 (B)	60–90 (C)	90–120 (D)	A–B	A–C	A–D
Controlli	269±61	259±47	246±46	242±45	— 10 ($P > 0,6$)	— 23 ($P > 0,2$)	— 27 ($P > 0,2$)
Ratti intossicati con streptomicina	307±43	260±47	248±49	224±53	— 47 ($P < 0,02$)	— 59 ($P < 0,01$)	— 83 ($P < 0,001$)
Ratti intossicati con diidrostreptomicina . . .	279±36	235±28	227±26	217±24	— 44 ($P < 0,01$)	— 52 ($P < 0,001$)	— 62 ($P < 0,001$)

Gli animali sono stati divisi in 3 lotti di 13 ratti ciascuno (7 ♂ e 6 ♀). Un primo lotto è stato utilizzato per i controlli; un secondo lotto è stato trattato con streptomicina ed il terzo con diidrostreptomicina. Il farmaco, streptomicina o diidrostreptomicina in forma di solfato (Squibb), disciolto alla concentrazione del 10 % (calcolato come base) in soluzione acquosa di NaCl al 9 ‰, veniva somministrato all'animale in un'unica dose di 1 g/kg di peso corporeo, per iniezione praticata nel sottocutaneo della regione del dorso. Questa dose, che per entrambi i farmaci corrisponde, secondo le esperienze di Chiucini [6], all'incirca alla metà di quella mortale per il ratto, ha provocato in tutti gli animali da noi trattati la comparsa di un quadro di intossicazione acuta grave, avente gli stessi caratteri di quello ripetutamente descritto da Cerquiglini e Chiucini nel ratto e in altri animali da laboratorio (loc. cit.): profonda depressione dell'attività motoria, sensitiva e sensoriale, che porta ad uno stato comatoso, con ipotonia muscolare generalizzata, bradipnea e ipotermia. Nei nostri animali il quadro tossico si è completato in tutti i suoi sintomi principali dopo un tempo variabile da 5 a 30 min dalla somministrazione del farmaco, in genere più rapidamente nei ratti intossicati con streptomicina che in quelli con diidrostreptomicina.

Instauratosi il quadro completo dell'intossicazione acuta l'animale veniva ucciso per decapitazione. Gli omogenati di cervello sono stati preparati secondo la tecnica seguita nelle nostre precedenti esperienze. Immediatamente dopo la morte dell'animale veniva asportato l'intero cervello, pesato rapidamente

(6) G. CHIUCINI, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », *26*, 1368 (1950).

e omogeneizzato a bassa temperatura in liquido di Krebs–Ringer addizionato con glicoso in concentrazione dell'1 ‰ e tamponato con fosfati a pH 7,4. La misurazione del consumo di O_2 dell'omogenato, diluito con questo liquido fino ad ottenere una concentrazione di 100 mg di organo fresco in 3 ml, è stata eseguita mediante l'apparecchio di Warburg (3 ml di omogenato per ogni vaschetta manometrica), alla temperatura di 37° C ed in ambiente di aria, sempre su campioni in doppio. Le letture manometriche sono state effettuate ogni 30 min, per la durata di 2 ore. La stessa tecnica è stata seguita per gli omogenati di cervello dei ratti controllo, uccisi anch'essi per decapitazione.

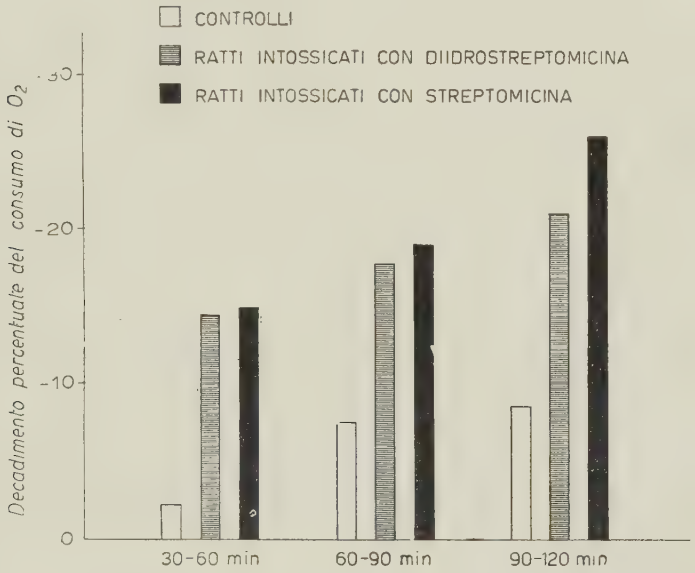


Fig. 1. – Decadimento del consumo di O_2 negli omogenati di cervello dei ratti controllo e in quelli dei ratti intossicati con streptomicina o con diidrostreptomicina, espresso in valori percentuali rispetto al consumo di O_2 durante i primi 30 min di esperimento.

I dati ottenuti dalle letture manometriche sono stati espressi in $\mu l\ O_2/g$ di tessuto fresco. Il confronto tra le medie di ogni serie di valori è stato eseguito mediante il calcolo di t secondo Fisher [7], assumendo come soglia di significatività: $P = 0{,}05$.

Nella Tabella I figurano i valori del consumo di O_2 degli omogenati durante le 2 ore di esperimento per ciascun animale dei 3 lotti e le medie di questi valori calcolate per ogni lotto. Il confronto diretto tra il consumo medio di O_2 dei controlli nei diversi tempi di esperimento e quello osservato, in

(7) R. A. Fisher, *Statistical Methods for Research Workers*, 1950, Oliver and Boyd, Edinburgh.

tempi corrispondenti, per gli omogenati di cervello dei ratti intossicati con streptomicina o con diidrostreptomicina, non fa rilevare differenze statisticamente significative. Se, però, si analizza, per ciascun gruppo di animali, l'andamento in funzione del tempo del consumo medio di O_2 da parte degli omogenati (ved. Tabella II), si osserva che in quelli dei ratti intossicati la diminuzione di detto consumo nel tempo è maggiore che nei controlli e risulta, al contrario che in questi, statisticamente significativa. Esprimendo questo decadimento in termini percentuali rispetto al consumo medio di O_2 durante i primi 30 min di esperimento, abbiamo ottenuto i valori rappresentati graficamente nella fig. 1: le differenze tra il decremento percentuale del consumo di O_2 dei controlli e quello presentato dagli omogenati di cervello dei ratti intossicati con streptomicina o con diidrostreptomicina, nei diversi tempi di esperimento, risultano in ogni caso statisticamente significative; al di sotto dei limiti della significatività statistica si mantengono invece le differenze osservate, a questo riguardo, tra gli effetti della streptomicina e quelli della diidrostreptomicina.

In conclusione, dunque, la streptomicina e la diidrostreptomicina ad alte dosi inibiscono l'attività respiratoria del tessuto cerebrale anche in caso di somministrazione *in vivo*. Tale effetto appare sostanzialmente analogo a quello già da noi osservato trattando con dette sostanze omogenati di cervello indenne. Le diversità che il fenomeno presenta, riguardo all'intensità e alla evoluzione temporale, nelle due condizioni sperimentali, sono presumibilmente da riportarsi alla ben diversa modalità con cui si attua, nei due casi, il processo di attacco. Nel caso della somministrazione *in vivo*, infatti, non solo risulta indeterminata la quantità di farmaco che perviene a contatto con le strutture respiratorie endocellulari del substrato, ma profondamente diverso è ovviamente il destino che il farmaco subisce prima di rendersi su queste operante.

Biochimica. — *I citocromi dei Policheti e dei Sipunculidi. Spettri differenziali* (*). Nota di Francesco Ghiretti e Anna Ghiretti-Magaldi, presentata (**) dal Corrisp. G. Montalenti.

In questi ultimi anni, da quando le ricerche sugli enzimi respiratori ferro-porfirinici sono state estese ad altri organismi quali lieviti, batteri e piante superiori, il quadro dei sistemi dei citocromi si è andato notevolmente allargando sì da includere un gran numero di componenti più o meno diversi da quelli ormai classici, dei mammiferi.

Tabella I.

Massimi delle bande principali di assorbimento dei citocromi ridotti presenti nei mitocondri di mammifero (cuore di bue).

	α	β	γ
Citocromo *a*	605	—	—
» a_3	—	—	445
» *b*	562	530	430
» *c*	550	520	415
» c_1	554	524	418

I diversi componenti del sistema dei citocromi di un organismo vengono identificati principalmente in base alla posizione dei massimi di assorbimento negli spettri visibile e ultravioletto delle loro forme ridotte e, per alcuni di essi, in base alle proprietà dei loro composti con ossido di carbonio (Tabella I). Questo metodo è stato applicato recentemente a diversi gruppi di Invertebrati marini quali Echinodermi [1], Molluschi Cefalopodi [2, 3] e Molluschi Gasteropodi [4, 5]; esso ha permesso di dimostrare nei mitocondri isolati da

(*) Lavoro eseguito nel Reparto di Fisiologia della Stazione Zoologica di Napoli, con un contributo (RG-4845 C2) del National Institutes of Health, United States Public Health Service.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1958.

(1) R. Maggio e A. Ghiretti-Magaldi, « Exper. Cell. Res. », *15*, p. 95 (1958).

(2) A. Ghiretti-Magaldi, A. Giuditta e F. Ghiretti, « Biochem. J. », *66*, p. 303 (1957); « J. Cell. Comp. Physiol. » (in corso di stampa).

(3) A. Ghiretti-Magaldi e F. Ghiretti, « Experientia », *14*, p. 170 (1958).

(4) F. Ghiretti, A. Ghiretti-Magaldi e L. Tosi, « J. Gen. Physiol. » (in corso di stampa).

(5) L. Tosi e F. Ghiretti, « Experientia » (in corso di stampa).

cellule e tessuti di questi organismi l'esistenza di un sistema di enzimi ferro–porfirinici, di accertarne la partecipazione ai processi di respirazione terminale, di individuarne i vari componenti e confrontarli con quelli dei sistemi respiratori dei Vertebrati superiori.

In questa Nota riferiamo i risultati di ricerche spettrofotometriche eseguite su particolati ottenuti da due organismi marini: *Spirographis spallanzani* e *Sipunculus nudus*, scelti come rappresentanti rispettivamente dei Policheti e dei Sipunculidi. Questi vermi marini sono oggetto di numerose ricerche chimiche e fisiologiche per l'interesse dei loro pigmenti respiratori. È noto che nella clorocruorina di *Spirographis* l'eme è ritenuto identico a quello del Citocromo a_3 o citocromossidasi; l'emeritrina delle cellule ematiche di *Sipunculus* invece è un pigmento a ferro diverso sia dalla clorocruorina che dall'emoglobina per non avere un gruppo prostetico porfirinico.

Esperimenti e risultati.

Il sottile strato muscolare del corpo di *Spirographis* e quello assai più spesso di *Sipunculus* sono stati usati in questi esperimenti. Il tessuto era sminuzzato e sospeso molte volte in acqua di fonte fino a quando il liquido di lavaggio diventava limpido e incolore. Dopo omogenizzazione con 10 volumi di tampone fosfato 0,1 M a pH 7,4 si centrifugava a 700 × g; il sedimento era eventualmente riomogenizzato come sopra e i supernatanti, dopo aggiunta di un eguale volume di tampone, erano centrifugati a 30.000 × g nella centrifuga preparativa Spinco. Il piccolo sedimento veniva raccolto, lavato due volte e infine risospeso in un piccolo volume (10–20 ml) dello stesso tampone di fosfato.

Tutti i tentativi di preparazione in soluzioni di saccarosio a varie concentrazioni hanno dato esito negativo rispetto alla quantità e alla natura del particolato ottenuto. Poiché il nostro metodo di preparazione potrebbe danneggiare il particolato alterandone il quadro dei citocromi, abbiamo voluto trattare nello stesso modo il muscolo cardiaco di mammifero per confrontare le proprietà spettrofotometriche ed enzimatiche del particolato con quelle di preparati ottenuti mediante metodi che sicuramente mantengono integra la struttura dei mitocondri. Lo spettro differenziale (ridotto–meno ossidato) dei citocromi presenti in un preparato di cuore di bue è riportato nella fig. 1. La tecnica seguita è la stessa di quella seguita altrove.[2] Essa consiste essenzialmente nell'usare due campioni della sospensione in esame in uno dei quali i pigmenti sono nella forma ossidata, nell'altro nella forma ridotta. La riduzione è ottenuta mediante ascorbato, succinato o ditionite in assenza di aria. La differenza di assorbimento fra le due forme ridotta e ossidata viene misurata fra 380 e 620 mμ a intervalli di 4 o di 2 mμ in uno spettrofotometro Beckman munito di fotomoltiplicatore previamente calibrato con una lampada Beckman a vapori di mercurio.

Nella zona visibile dello spettro sono chiaramente visibili le bande α dei citocromi *a*, *b* e c_1 con massimi rispettivamente a 605, 562 e 554 mμ

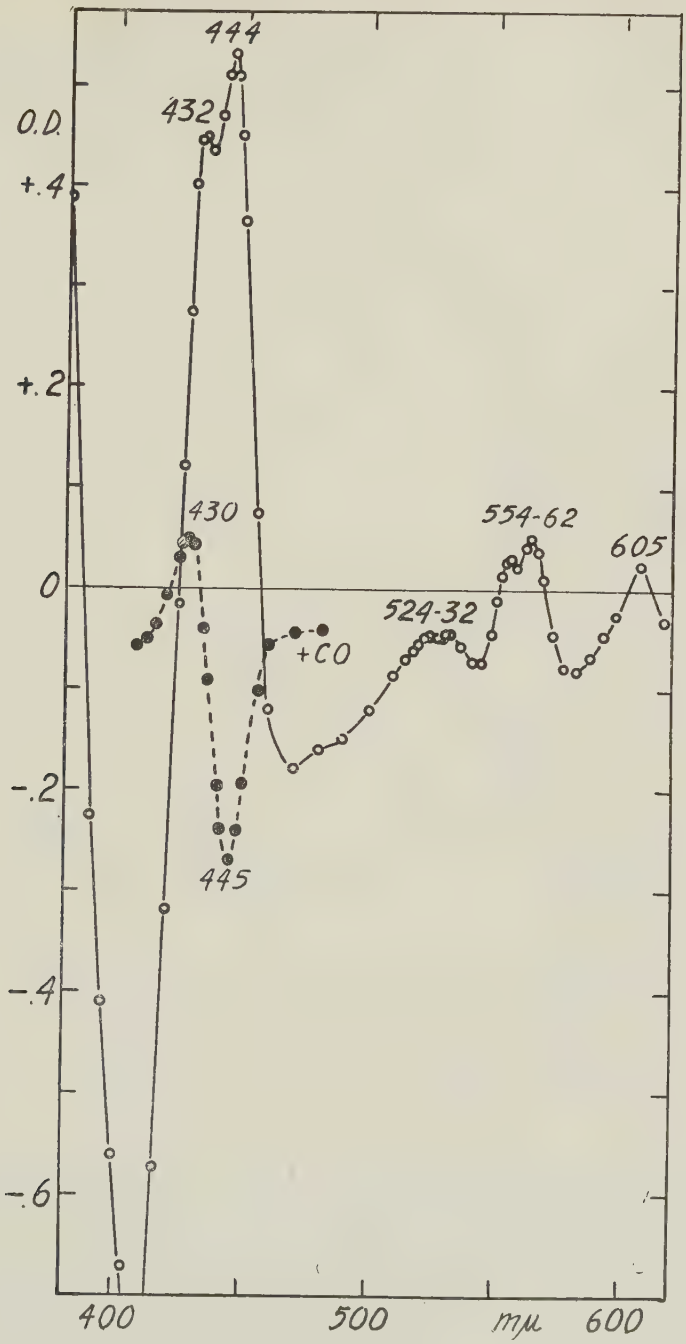


Fig. 1. – Spettro differenziale di un preparato di cuore di bue.

mentre fra 524 e 523 mμ sono le bande β dei citocromi *b* e *c*. Il minimo intorno a 470 mμ è dovuto alla scomparsa della banda di assorbimento delle flavoproteine. Nella regione del Soret i massimi a 444 e 432 mμ sono rispettiva-

mente quelli delle bande γ dei citocromi a_3 e b. Si può concludere pertanto che il sistema dei citocromi intimamente associato al particolato in esame non subisce modificazioni di sorta in seguito al metodo di preparazione del particolato stesso. Il fatto che nello spettro sopra esaminato non compaiano bande sicuramente attribuibili al citocromo c si può spiegare ricordando che

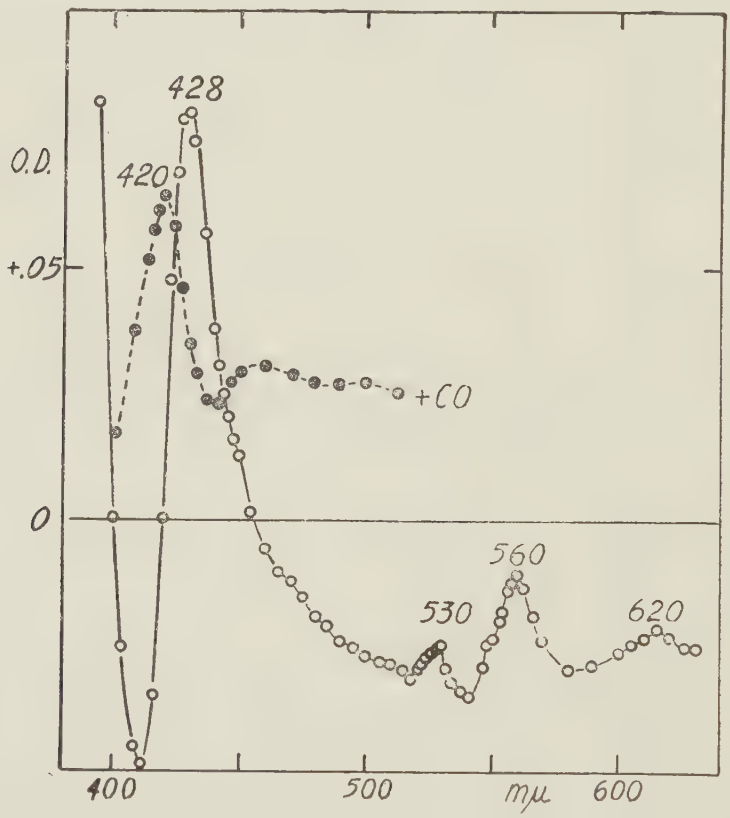


Fig. 2. – *Sipunculus nudus*. Spettro differenziale di un preparato di muscolo.

questo pigmento è più solubile in acqua e che quindi deve essere stato allontanato con i ripetuti lavaggi effettuati durante la preparazione del particolato. Del resto anche negli spettri differenziali di cellule intere è difficile vedere la banda γ a 415 mμ del citocromo c che rimane nascosta dalla banda negativa del citocromo b. Tuttavia la presenza anche in quantità catalitiche di citocromo c nel particolato è dimostrata indirettamente dalla comparsa delle bande dei citocromi b e a_3 quando la riduzione è ottenuta mediante succinato.

La fig. 2 mostra un tipico spettro differenziale di particolato ottenuto dal muscolo di *Sipunculus* dopo riduzione con ditionite. Mentre sono visibili le bande α, β e γ del citocromo b (rispettivamente a 428, 530 e 560 mμ)

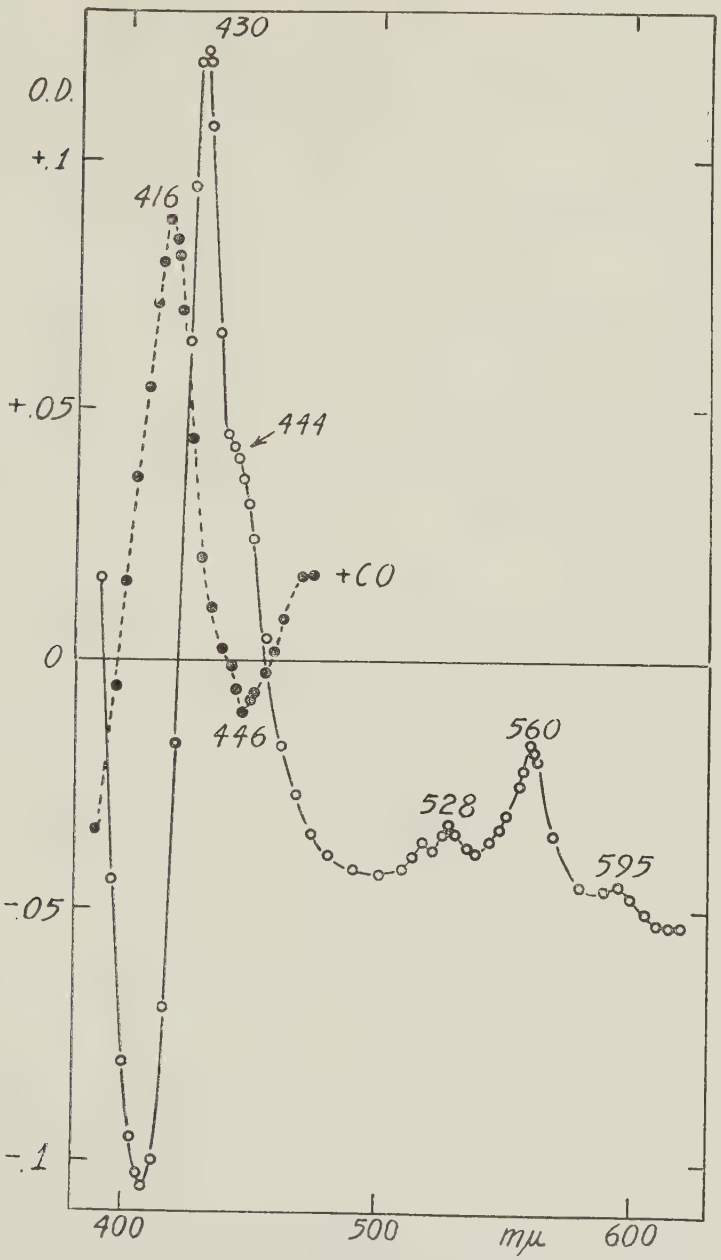


Fig. 3. – *Spirographis spallanzani*. Spettro differenziale di un preparato di muscolo.

mancano le bande corrispondenti ai citocromi *a* e a_3. Infatti nessuna banda compare intorno a 444 mμ e la piccola banda a 620 mμ pare indicare la presenza di un citocromo *a* proprio di questo organismo per essere spostato verso più alte lunghezze d'onda.

L'ossido di carbonio è il reattivo più specifico per l'identificazione delle ossidasi terminali di un organismo: come è ben noto, nei mammiferi esso si combina specificamente con l'atomo di ferro del citocromo a_3 dando un composto il cui spettro differenziale presenta nella regione del Soret un massimo ben distinto a 430 mμ e un minimo a 445 mμ. Tale spettro è dato nella sua forma tipica anche dal nostro preparato di cuore di bue dopo trattamento con ossido di carbonio (fig. 1). Quando invece si tratta con ossido di carbonio, secondo il metodo descritto da Chance [6] il preparato di *Sipunculus* si ottiene lo spettro riportato nella fig. 2. In essa il massimo a 420 mμ sta ad indicare la presenza di una ossidasi terminale diversa dal citocromo a_3.

Gli spettri differenziali ottenuti con i preparati di *Spirographis* sono riportati nella fig. 3. Anche in essi non è mai visibile la banda a 605 mμ mentre quella a 444 mμ o manca del tutto o compare appena come una piccola spalla della banda γ del citocromo *b*. La piccola banda a 595 mμ potrebbe essere quella di un citocromo *a*. Che anche in *Spirographis* l'ossidasi terminale sia diversa dal citocromo a_3, è indicato dallo spettro del suo composto con ossido di carbonio. In esso il massimo della banda è a 416 mμ, spostato cioè ancora verso più basse lunghezze d'onda di quanto non lo sia quello di *Sipunculus* (Tabella II). Sia in *Sipunculus* che in *Spirographis* lo spettro del composto con ossido di carbonio non presenta nel visibile alcuna banda caratteristica. Ogni possibile interferenza della clorocruorina negli spettri di *Spirographis* può essere esclusa per essere stato questo pigmento rimosso quasi totalmente durante la preparazione del particolato e soprattutto perché lo spettro del composto clorocruorina–ossido di carbonio presenta massimi a lunghezze d'onda più alte e precisamente a 439 e 600 mμ [7].

TABELLA II.

Massimi di assorbimento negli spettri differenziali di particolati di Spirographis *e* Sipunculus.

	Visibile					Soret		Composto con CO	
	α				β	γ		Max	Min
Sipunculus nudus	620			560	530		428	420	444
Spirographis spall.		595		560	528	444	430	416	445
Cuore di bue		605		562	554	525	444	432	430	445

(6) B. CHANCE, in COLOWICK e KAPLAN, *Methods in Enzymology*, vol. 4, p. 273 (1957). N. Y.

(7) J. ROCHE e M. FOX, « Proc. Roy. Soc. London », *114*, p. 161 (1934).

Considerazioni e conclusioni.

Un tentativo di classificazione dei citocromi, in base alle loro proprietà funzionali, spettroscopiche e chimiche, potrebbe essere fatto raggruppando tutti gli enzimi respiratori ferro-porfirinici noti fino ad oggi in tre grandi gruppi: quello dei citocromi *a*, *b* e *c*. Al gruppo *a* appartengono i citocromi la cui funzione è legata in generale ad una attività ossidasica. Per alcuni di essi è stata dimostrata la capacità di ossidare il citocromo *c* ad opera dell'ossigeno molecolare. Oltre i citocromi *a* e a_3 il cui gruppo prostetico sembra essere identico a quello della Spirographis emina, si conoscono tre altri tipi di ossidasi terminali caratterizzati dallo spettro del loro composto con ossido di carbonio: il citocromo a_1 e a_2 e il cosidetto «CO-binding pigment» degli Autori americani. Essi sono stati osservati nei batteri in cui possono trovarsi da soli o associati in modo da dare spettri differenziali più complicati [8].

Tabella III.

Massimi delle bande di assorbimento dei citocromi del gruppo a *e dei loro composti con ossido di carbonio.*

	α	γ	Composto con CO	
			Max	Min
Citocromo *a*	605	—	—	—
» a_1	590	435-440	427	442
» a_2	635	—	647	630
» a_3	—	445	430	444
«CO-binding»	—	—	416	432
Sipunculus	620	—	420	442
Spirographis	595	444 ?	416	446

Il citocromo a_1 è l'ossidasi terminale di *Acetobacter pasteurianum* e di numerosi altri microrganismi, che nello stato ridotto presenta due bande ben distinte a 590 mμ (banda α) e a 435-440 mμ (banda γ). Lo spettro del suo composto con ossido di carbonio mostra un massimo a 427 mμ e un minimo a 442 mμ. Il citocromo a_2 di cui non è stata ancora dimostrata la funzione biologica, mostra solo una banda nel visibile a 635 mμ e il suo composto con ossido di carbonio è caratterizzato da una banda ben distinta con

(8) B. Chance, «J. Biol. Chem.», *202*, p. 383 (1953).

massimo a 647 mμ. Del terzo citocromo si conosce solo lo spettro del suo composto con CO che mostra una banda nella regione del Soret con massimo a 416 mμ e minimo a 432 mμ. Questo composto è stato osservato in diversi batteri quali *Micrococcus pyogenes* e *Acetobacter suboxidans* [9].

A questi citocromi del gruppo *a* bisogna aggiungere le ossidasi terminali di *Sipunculus* e di *Spirographis*. Il composto con ossido di carbonio dei pigmenti di questi organismi marini differisce sia dal citocromo a_1 che da quello a_2 (Tabella III). Non sappiamo se essi sono formati da uno solo o da una miscela di pigmenti; quel che sembra accertato è l'assenza di una citocromossidasi eguale a quella dei mammiferi, dei lieviti e di diversi Invertebrati marini. È opportuno ricordare a questo proposito i risultati ottenuti da Bueding e Charms [10] in alcuni vermi parassiti. In *Ascaris lumbricoides* e *Litomosoides carinii* non è stato possibile dimostrare alcuna attività attribuibile alla presenza di citocromo *c* e di citocromossidasi. In un trematode *Schistosoma mansoni* le attività erano misurabili, ma troppo basse in confronto dei valori di Q_{O_2} osservati. Bueding ritiene (e tale conclusione sembra valere anche per *Sipunculus* e *Spirographis*) che negli organismi esaminati la respirazione terminale sia catalizzata prevalentemente, se non esclusivamente, da enzimi diversi da quelli del sistema citocromo *c* – citocromossidasi.

(9) L. Smith, « Bacteriol. Rev. », *18*, p. 106 (1954).
(10) E. Bueding e B. Charms, « J. Biol. Chem. », *196*, p. 615 (1952).

Biologia. — *Sulla spettrometria a raggi X di fluorescenza come metodo per lo studio degli elementi in traccie in biologia. Prime ricerche su alcuni tessuti umani* (*). Nota di Renato Pellizzer, Ruggero Corazza e Anton Maria Mancini, presentata (**) dal Corrisp. C. Andreatta.

Le recenti acquisizioni in campo di enzimiologia hanno notevolmente valorizzato l'importanza di alcuni elementi chimici ad azione attivatrice o inibitrice o addirittura facenti parte integrante del complesso enzimatico [1] [2] [3] [4], elementi che, anche per la loro rarità o per la loro difficile determinazione, hanno riproposto l'interesse per i metodi atti a svelarli [5].

Questi metodi, specie quando siano volti a determinare elementi in traccie nei substrati di organismi animali in genere ed umani in particolare, debbono tener conto di alcune condizioni:

a) la limitazione quantitativa di molti elementi, considerato che non esiste un rapporto costante fra quantità dell'elemento presente ed importanza della sua attività biologica;

b) la necessità di determinare, a volte, in uno stesso substrato, la più vasta gamma di elementi; infatti, in rapporto ad una attività biologica specifica è spesso necessario considerare tutta una serie completa di questi ad azione inibente o attivante, sinergici e antagonisti, tra i quali sono compresi alcuni elementi le cui proprietà fisico–chimiche sono meno note, mentre la loro importanza biologica può essere molto elevata;

c) la necessità di studiare dati o situazioni quali si presentano spontaneamente nei substrati biologici, condizione questa soprattutto valida quando si considerino tessuti di origine umana;

d) la necessità di studiare variazioni degli elementi stessi per periodi di tempo opportuni.

Prendendo in esame partitamente i metodi più usati per la determinazione degli elementi in tracce in biologia si può facilmente constatare che l'*analisi chimica* con metodi ponderali e volumetrici è lontana dal soddisfare le esigenze poste dalla prima condizione; con questo mezzo infatti si sono determinati, sui substrati biologici, solo elementi in concentrazione elevata e, evidentemente, per una serie non molto numerosa di essi [6] [7]. Metodi più sensibili, come, ad esempio, la polarografia, sono serviti soprattutto per soluzioni ed hanno avuto pertanto un uso piuttosto limitato, anche per una certa complessità di questi mezzi analitici.

(*) Lavoro eseguito negli Istituti di Mineralogia e Petrografia e di Anatomia e Istologia Patologica dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1958.

I metodi della *spettroscopia ottica* hanno avuto un impiego larghissimo, essi sono stati usati al fine di determinare: Ag, Au, Al, As, Ba, Be, Bi, Ca, Cd, Co, Cr, Cu, Fe, Hg, K, Li, Mg, Mn, Na, Ni, P, Pb, Sb, Si, Sn, Sr, Ti, U, Zn [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]. Questi metodi peraltro non sono esenti da deficienze: è nota infatti l'impossibilità di determinare alcuni elementi di notevole interesse biologico come gli alogeni, inoltre l'impossibilità di condurre le singole analisi su quantità discrete di sostanza e di ripetere le medesime sullo stesso campione.

Lo studio con *isotopi radioattivi* [15] che, come è noto, ha avuto larghissima applicazione, non è atto a valutare le situazioni quali si presentano spontaneamente in biologia, ma crea delle condizioni artificiali estremamente utili solo quando si voglia studiare la biodinamica di un elemento (metabolismo, fissazione in un tessuto, interferenza sulle attività biologiche di strutture viventi). Evidentemente però con questo mezzo non si soddisfa la terza condizione sopra proposta; nell'uomo infatti lo studio della biodinamica di un elemento mediante isotopi trova uso limitato, sia quantitativo, che qualitativo (J, Fe, Na, Cr, Sr, Co, Au, Ca, Th) per la nota azione lesiva delle radiazioni. A ciò si aggiunga che, per alcuni isotopi di breve vita media, è impossibile seguire il ciclo completo degli elementi nell'organismo [16]; per altro l'estremo potere lesivo impedisce sia somministrazioni prolungate, sia l'uso di dosi adeguate in relazione a determinate condizioni sperimentali; non è possibile perciò rispettare l'ultima condizione che si è posta.

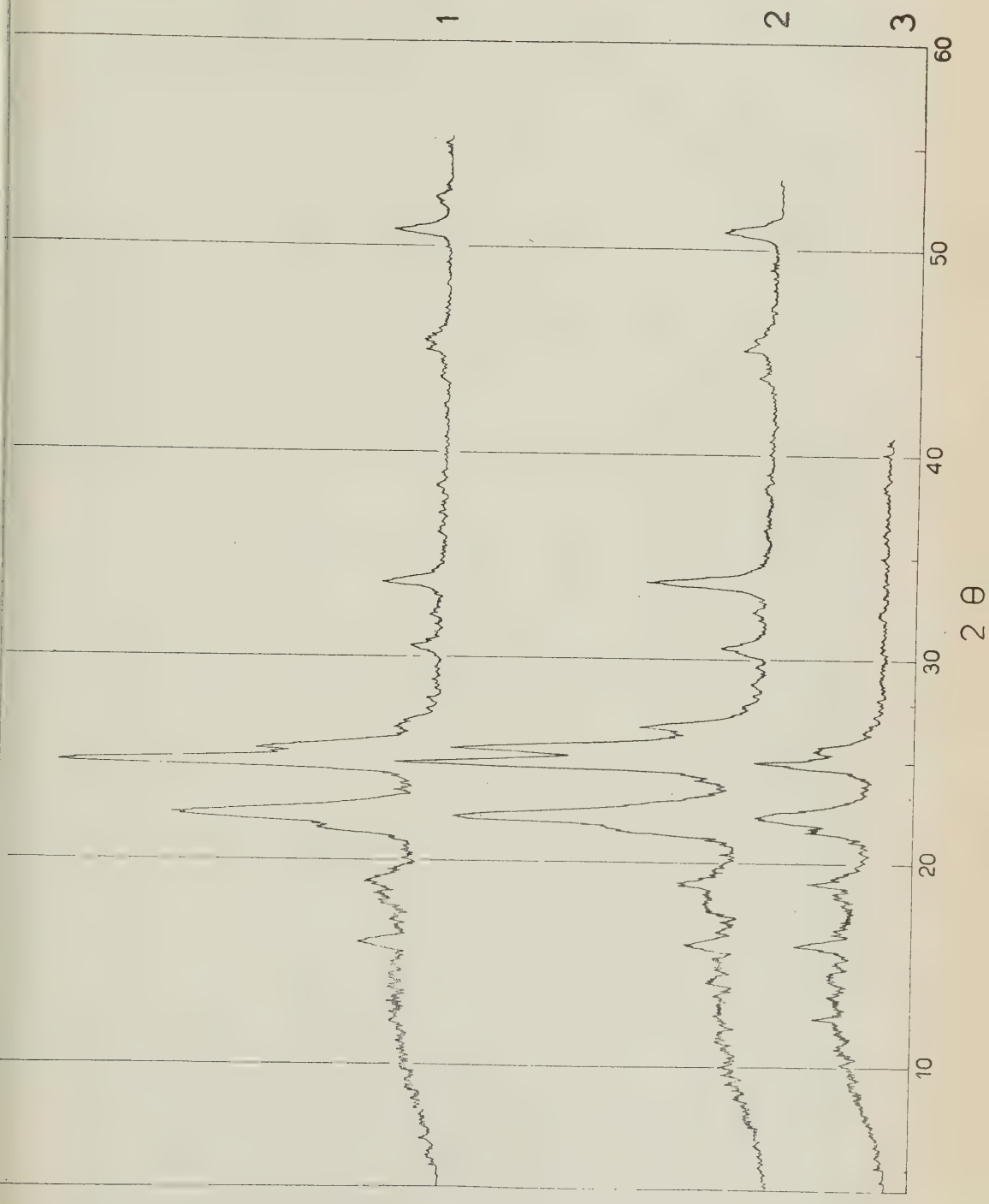
Per quanto sopra esposto si è sentita la necessità di ricercare un metodo che potesse ovviare, per quanto possibile, alle deficienze proprie di quelli surricordati e, ad un tempo, potesse soddisfare le quattro condizioni proposte.

Si è ritenuto che il metodo della *spettrometria a raggi X di fluorescenza* fosse il più adatto per un primo tentativo, tanto più che in questi ultimi anni è risultato un efficace metodo di analisi spettrochimica in campo abiologico.

La spettrometria per fluorescenza utilizza, come è noto, le radiazioni X di emissione ottenute per eccitazione dei campioni da analizzare mediante irradiazione, in opportune condizioni, con un fascio di raggi Roentgen.

Nel fascio di raggi X di emissione (detti di « fluorescenza ») si ha una serie di lunghezze d'onda che sono caratteristiche degli elementi presenti nel campione. Normalmente si hanno radiazioni della serie K e della serie L, con maggiore intensità per la $K\alpha$, $K\beta$, $L\alpha$, $L\beta_1$, $L\beta_2$, rispetto ad altre come la $L\gamma$, la $L\eta$. Il fascio di raggi X di emissione viene diffratto da un cristallo analizzatore, sì che è possibile determinare la lunghezza d'onda delle singole serie di radiazioni costituenti il fascio stesso e pertanto i corrispondenti elementi chimici presenti nel campione. Nota infatti una distanza reticolare d del cristallo e rilevati i valori degli angoli di diffrazione, si può facilmente risalire al valore di λ, utilizzando la nota equazione di Bragg: $n\lambda = 2\,d \operatorname{sen} \vartheta$.

L'apparecchiatura usata per le nostre ricerche è quella che correda il diffrattometro XRD–5 della General Electric esistente nell'Istituto di Mineralogia e Petrografia dell'Università di Bologna.


1
2
3
60
50
40
30
20
10
2 θ

Le esperienze sono state condotte su alcuni tessuti umani sia allo stato fresco (cuore, muscolo pettorale, muscolo psoas), sia sulle ceneri degli stessi. Le condizioni che si sono dimostrate più adatte, nell'intervallo $2\theta = 5°–55°$, sono: radiazione a 45 KV e 45 mA da anticatodo di W; cristallo analizzatore di quarzo con $d = 3{,}3429$; registrazione grafica su scala lineare; sensibilità 200 c/sec a fondo scala e costante di tempo 2; velocità del goniometro 2° al minuto.

Dall'esame degli spettrogrammi, eseguiti più volte su ciascun campione, si può anzitutto rilevare come l'andamento delle curve ottenute sia con campioni allo stato fresco, sia con campioni inceneriti, sostanzialmente non muti. Ma mentre nelle prime la nitidezza è compromessa dalle sovrapposizioni degli effetti dovuti a radiazioni diffuse (radiazioni parassite in genere) dipendenti dall'abbondanza di sostanze organiche, nelle seconde si ha una nitidezza di gran lunga maggiore, in quanto sono eliminati quegli effetti che talora mascherano i picchi corrispondenti ad alcune diffrazioni.

In particolare dall'esame degli spettrogrammi ottenuti su ceneri (ved. fig. 1) si sono potute chiaramente rilevare alcune serie di diffrazioni corrispondenti, per i valori di λ riportati nella Tabella I, ad elementi chimici presenti nei diversi campioni ed alla radiazione primaria del wolframio che è difficilmente eliminabile.

I valori di λ, riportati nella Tabella I, in qualche caso si scostano lievemente da quelli teorici per effetto della sovrapposizione di radiazioni caratteristiche non risolvibili alla registrazione.

Va ancora messo in evidenza come nelle complesse serie di interferenze presenti negli spettrogrammi esistano coppie di difficile interpretazione; fra queste alcune sono probabilmente riferibili a Ce, Th, Ho. Più difficile l'interpretazione, per quanto sopra, di una zona spettrale, nell'intervallo di 2ϑ compreso fra 9° e 15°, caratterizzata da un « pianerottolo » di interferenze forse attribuibili ad elementi del gruppo delle terre rare.

Pur non volendo riferire in questa sede sulle problematiche relative all'estimazione quantitativa degli elementi riconosciuti, non va sottaciuto come, già da una immediata valutazione dell'ampiezza dei picchi, si possano trarre indicazioni di ordine quantitativo anche se molto approssimate. Soprattutto, da un esame comparativo di diversi spettrogrammi, si possono apprezzare le variazioni di rapporti quantitativi fra coppie di elementi. Ciò è particolarmente significativo nelle ricerche biologiche, ove è proprio la valutazione delle quantità relative che ha grande importanza.

I vantaggi che il metodo della spettrometria a raggi X di fluorescenza offre nei riguardi di una ricerca svolta su substrati animali e soprattutto su tessuti umani, appaiono già con tutta evidenza dall'esposizione che del metodo stesso si è fatta e dai primi risultati ottenuti dalla sua applicazione.

Dato che l'impiego dei mezzi analitici in campo biologico e l'interpretazione dei risultati ottenuti presentano spesso notevoli difficoltà, è facilmente comprensibile come un metodo che rispetti, per quanto possibile, una situazione reale e non richieda procedimenti o valutazioni dei dati troppo indaginosi sia da preferire ad altri nelle stesse condizioni di sensibilità e precisione.

Tabella I.

Organo	Elemento	λ (Å)	*n*	Serie	2 θ
Cuore	Br	0,933	1	Kβ	16,04
		1,041	1	Kα	17,92
		0,933	2	Kβ	(?) 32,41
		1,041	2	Kα	(?) 36,26
	Fe	1,757	1	Kβ	30,47
		1,937	1	Kα	33,68
	Cu	1,392	1	Kβ	24,03
		1,542	1	Kα	26,67
	Zn	1,295	1	Kβ	22,34
		1,437	1	Kα	24,82
		1,295	2	Kβ	45,59
		1,437	2	Kα	50,92
	Rb	0,829	1	Kβ	14,25
		0,927	1	Kα	15,94
		0,829	2	Kβ	(?) 28,72
		0,927	2	Kα	32,27
	La	0,328	1	Kβ	5,62
		0,373	1	Kα	6,40
		0,328	2	Kβ	(?) 11,26
		0,373	2	Kα	(?) 12,81
		—	—	—	—
		—	—	—	—
	W	1,098	1	$L\gamma_1$	18,91
		1,244	1	$L\beta_2$	21,45
		1,263	1	$L\beta_3$	21,78
		1,282	1	$L\beta_1$	22,11
		1,476	1	$L\alpha_1$	25,51
		1,487	1	$L\alpha_2$	25,70

Organo	Elemento	λ (Å)	*n*	Serie	2 θ
Muscolo pettorale	Br	0,933	1	Kβ	16,04
		1,041	1	Kα	17,92
		0,933	2	Kβ	32,41
		1,041	2	Kα	36,26
	Fe	1,757	1	Kβ	30,47
		1,937	1	Kα	33,68
	Cu	1,392	1	Kβ	24,03
		1,542	1	Kα	26,67
	Zn	1,295	1	Kβ	22,34
		1,437	1	Kα	24,82
		1,295	2	Kβ	45,59
		1,437	2	Kα	50,92
	Rb	0,829	1	Kβ	14,25
		0,927	1	Kα	15,94
		0,829	2	Kβ	28,72
		0,927	2	Kα	32,27
	La	0,328	1	Kβ	(?) 5,62
		0,373	1	Kα	6,40
		0,328	2	Kβ	11,26
		0,373	2	Kα	12,81
		2,458	1	$L\beta_1$	43,14
		2,665	1	$L\alpha_1$	46,98
	W	1,098	1	$L\gamma_1$	18,91
		1,244	1	$L\beta_2$	21,45
		1,263	1	$L\beta_3$	21,78
		1,282	1	$L\beta_1$	22,11
		1,303	1	$L\beta_4$	22,45
		1,476	1	$L\alpha_1$	25,51

Organo	Elemento	λ (Å)	*n*	Serie	2 θ
Muscolo psoas	Br	0,933	1	Kβ	16,04
		1,041	1	Kα	17,92
		0,933	2	Kβ	32,41
		1,041	2	Kα	36,26
	Fe	1,757	1	Kβ	30,47
		1,937	1	Kα	33,68
	Cu	—	—	—	—
		—	—	—	—
	Zn	1,295	1	Kβ	22,34
		1,437	1	Kα	24,82
		—	—	—	—
		—	—	—	—
	Rb	0,829	1	Kβ	14,25
		0,927	1	Kα	15,94
		0,829	2	Kβ	(?) 28,72
		0,927	2	Kα	32,27
	La	—	—	—	—
		—	—	—	—
		—	—	—	—
		—	—	—	—
		—	—	—	—
		—	—	—	—
	W	1,098	1	$L\gamma_1$	18,91
		1,244	1	$L\beta_2$	21,45
		1,263	1	$L\beta_3$	21,78
		1,282	1	$L\beta_1$	22,11
		1,476	1	$L\alpha_1$	25,51
		1,487	1	$L\alpha_2$	25,70

Il metodo spettrometrico usato soddisfa pienamente le condizioni di cui sopra. Infatti, la ripetibilità delle analisi sullo stesso campione a condizioni fisse e costanti, la possibilità di esaminare campioni voluminosi, le possibilità di gran lunga migliori di un immediato apprezzamento quantitativo, costituiscono una valida garanzia per una obbiettiva raccolta e valutazione dei dati. A questo si aggiunga la semplicità del metodo che permette, mediante registrazione grafica, rapide determinazioni e la possibilità di facili comparazioni dirette dei risultati.

Per quanto si riferisce alle quattro condizioni menzionate nell'introduzione il metodo della spettrometria soddisfa completamente l'esigenza posta dalla prima di esse (limitazione quantitativa), dalla terza (rispetto delle condizioni naturali) e di conseguenza dalla quarta (sperimentazione frazionata nel tempo).

La esigenza posta dalla seconda condizione (limitazione qualitativa) è soddisfatta solo per gli emenenti chimici di numero atomico superiore a 20.

Tale limitazione, che di per se stessa può venire ovviata dalla integrazione con la spettroscopia ottica, non diminuisce il valore del metodo per gli studi degli elementi in traccie, considerato soprattutto che esso consente la determinazione del Br e dello J sulla cui importanza si è fatto in precedenza cenno.

Da quanto sopra esposto si deduce che l'impiego del metodo spettrometrico per fluorescenza può trovare particolare indicazione nella determinazione, e quindi nello studio, di elementi chimici poco o per nulla conosciuti in campo biologico; e ciò non solo per una valutazione di questi in quanto tali, ma soprattutto in rapporto ad un apprezzamento anche comparativo di una gamma completa di elementi.

Si potranno quindi meglio studiare e valutare da un lato le interferenze che esistono fra gruppi di essi, dall'altro il ciclo biochimico di uno o più elementi, sia in condizioni naturali che sperimentalmente indotte.

Bibliografia.

[1] Schwietzer C. H., *Die Bedeutung der Spurenelemente im Stoffwechsel*, « Deutsch. med. J. », 7, 643 (1956).

[2] Lehninger A. L., *Role of metal ions in enzyme systems*, « Physiol. Rev. », 30, 393 (1950).

[3] Nicholas D. J., *Role of metals in enzymes with special reference to flavoproteins*, « Nature », 179, 800 (1957).

[4] Summer J. B., Myrback K., *The Enzymes*, vol. I, p. 1. N. Y. Acad. Press (1949).

[5] Ferrari C., *I problemi chimico-analitici degli elementi minori del ciclo vitale*, « Minerva Med. », 46, 1833 (1955).

[6] Griffith G. C., Butt E. M., Walker J., *Inorganic element content of certain human tissues*, « Ann. Int. Med. », 41, 501 (1954).

[7] Barlow J. S., Manery J. F., *Comparison of method of flame photometry with chemical methods for determination of cations in tissues*, « Canad. J. M. Sc. », 31, 326 (1953).

[8] Smith J. L., Kaufman N., Yeager E., Hovorka F., Kinney T. D., *Application of emission spectroscopy to medical problemy.* – II. *A survey of typical application.* « Arch. of Path. », 52, 332 (1951).

[9] Smith J. L., Yeager E., Kaufman N., Hovorka F., Kinney T. D., *Application of emission spectroscopy to medical problems.* – I. *Spectrographic techniques*, « Arch. of Path. », *52*, 321 (1951).

[10] Fox H. M., Ramage H., *Spectrographic Analysis of animal tissues*, « Nature », London, *126*, 682 (1930).

[11] Tipton I. H., *Spectrographic analysis of trace elements in human tissue*, « Phys. Rev. », *87*, 197 A (1952).

[12] Ruthard K., *Der Elementnachweis im Gewebe.* – X. *Mitteilung – Die quantitative Bestimmung von Metallen im biologischen Material mittelst Emissions–spektralanalyse*, « Arch. path. Anat. », *294*, 198 (1934).

[13] Brode W. R., *Chemical spectroscopy*. Ed. II: New York, J. Wiley & Sons. Inc. (1946).

[14] Gerlach Wa., Gerlach W., *Über die Bedentung der Spektralanalyse für biologische und medizinische Probleme.* « Strahlenterap. », *61*, 561 (1938).

[15] Pollister H., *Physical Techniques in biological research*, II vol., N. Y. Acad. Press (1956).

[16] Ageno M., *Sull'impiego degli isotopi stabiliti e radioattivi come indicatori*, « Rendiconti Ist. Sup. Sanità », *15*, 5 (1952).

Biologia. — *L'attività secretoria del sistema ipotalamo–ipofisario e dell'organo sottocommessurale durante lo sviluppo di un Anfibio anuro* (*). Nota di GIORGIO M. BAFFONI, presentata (**) dal Corrisp. A. STEFANELLI.

È nota la morfologia del sistema ipotalamo–ipofisario di Anfibî anuri adulti (in *Bufo* [1], *Rana* [2] ed *Hyla* [3]) e sono stati descritti i quadri della sua attività [1,3–10], sono invece poco conosciuti i quadri della secrezione dell'organo sottocommessurale e l'andamento dei processi secretorî di queste formazioni diencefaliche negli Anfibî anuri in sviluppo; Mazzi [11] in *Rana* ha osservato che l'inizio dell'attività secretoria nell'organo sottocommessurale si ha quando comincia la circolazione nelle pinna caudale dell'embrione (a stadio 22) e che il neurosecreto compare prima nella neuroipofisi (in larve di 11,3 mm. di lunghezza) e solo molto più tardi nei neuroni del centro ipotalamico (in larve di 37,3 mm. di lunghezza); più di recente Bolognari e Rotella [8] osservano le prime tracce di neurosecreto in larve di 13 mm. di *Rana* e di 12,4 mm. di *Bufo*, contemporaneamente nella neuroipofisi e nel centro preottico.

Nell'ambito delle ricerche che si stanno svolgendo nel nostro Istituto sul differenziamento della cellula nervosa [12], l'osservazione di un peculiare

(*) Ricerca eseguita nell'Istituto di Anatomia comparata « G. B. Grassi » dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1958.

(1) W. HILD, « Zeitschr. f. Anat. », *115*, 459 (1951); A. BOLOGNARI e A. ROTELLA, « Atti Soc. Pelor. Sci. Fis. Mat. Nat. » (Messina), *2*, 61 (1956).

(2) A. B. DAWSON, « Anat. Rec. », *112*, 443 (1952); *ivi*, *115*, 63 (1953), M. OKADA, T. BAN e T. KUROTSU, « Med. Journ. Osaka Univ. », *6*, 359 (1955).

(3) L. D. WILSON, A. J. WEIMBERG e H. A. BERN, « Journ. Comp. Neurol. », *107*, 253 (1957).

(4) T. ITO e K. OISHI, « Okajimas Folia Anat. Japon. », *23*, 35 (1950).

(5) E. SCHARRER e B. SCHARRER, *Neurosekretion*. In: MOLLENDORF'S, « Handbuch der mikroscopischen Anatomie des Menschen », *6*, 953 (1954).

(6) R. COLLIN e J. BARRY, « C. R. Soc. Biol. », *148*, 1457 (1954).

(7) J. H. TRAMEZZANI e J. V. URANGA, « C. R. Soc. Biol. », *149*, 1792 (1955).

(8) A. BOLOGNARI e A. ROTELLA, « Atti Soc. Pelor. Sci. Fis. Mat. Nat. » (Messina), *3*, 333 (1957).

(9) H. LEGAIT e E. LEGAIT, « C. R. Soc. Biol. », *150*, 1429 (1956).

(10) F. S. LOEBEL e P. K. GUIJON, « Biológica » (Santiago de Chile), f. XXIV, 15 (1957).

(11) V. MAZZI, « Monit. Zool. Ital. », *62*, 78 (1954).

(12) Ved.: Al. STEFANELLI, « Mem. Acc. Naz. Lincei » (s. VIII), *1*, 27 (1947); « Quart. Rev. Biol. », *26*, 17 (1951); « Nature », *174*, 974 (1954); « La Ric. Sci. », *25*, 2778 (1955); G. M. BAFFONI e G. CATTE, « Riv. di Biol. » (Perugia), *43*, 373 (1951); G. M. BAFFONI e L. SERRA, « Riv. di Biol. », *44*, 469 (1952); G. M. BAFFONI, « Arch. Zool. Ital. », *41*, 1 (1956); « Rend. Acc. Naz. Lincei » (s. VIII), *20*, 125; *ivi*, *21*, 491 (1956); « Boll. di Zool. », *24*, p. 153 (1958).

comportamento delle strutture nucleari nel centro preottico magnocellulare alla metamorfosi di un Anfibio urodelo [13], ha suggerito l'esame dei fenomeni neurosecretorî del sistema ipotalamo–ipofisario e quindi dell'attività secretoria dell'organo sottocommessurale durante lo sviluppo; in *Triturus cristatus*, oltre a precisare l'inizio di questi fenomeni ed a descrivere il ciclo secretorio dell'organo sottocommessurale, sono state riscontrate sensibili variazioni d'attività all'inizio ed al termine della vita larvale [14]. Al fine di verificare se le variazioni riscontrate nell'Anfibio urodelo fossero o no in rapporto con le modificazioni morfologiche e fisiologiche che si verificano all'inizio della vita acquatica e di quella terrestre, ho voluto esaminare i fenomeni secretorî diencefalici durante lo sviluppo di un Anfibio anuro, tenendo presente che negli Anuri il periodo di sviluppo è più veloce e che le trasformazioni degli apparati per l'adattamento alla condizione terrestre sono più profonde che negli Urodeli [15]. Questa ricerca pertanto si riallaccia alle osservazioni comparative già da me compiute nell'intento di precisare i rapporti intercorrenti tra le modificazioni ecologiche dell'organismo ed il sistema nervoso [12,16] al fine di individuare il valore funzionale di alcuni centri nervosi.

Per questa ricerca non si prestavano gli Anfibî anuri più comuni nei dintorni di Roma (*Bufo* e *Rana*) poiché l'abbondante pigmento nelle loro uova aveva già intralciato l'osservazione di precedenti ricercatori (Hild [1], Mazzi [11]), i quali hanno concordemente dichiarato che nei primi stadî di sviluppo è molto difficile la distinzione tra granuli di pigmento e di secreto; inoltre recenti osservazioni istochimiche hanno constatato che alcuni granuli di pigmento melanico si decolorano con procedimenti ossidativi (permanganato di K) [17] e quindi acquistano una notevole affinità per l'ematossilina–cromica o la fucsina–paraldeide [18], cioè non possono dirimersi dal neurosecreto con i metodi selettivi normalmente impiegati.

Nella primavera del 1957 ho avuto alcuni individui adulti ed un lotto di una cinquantina di uova di *Bombina pachypus* (BP.) [19]; la scarsità di pigmento delle uova di questo Anfibio anuro mi ha suggerito la sua utilizzazione per i miei propositi. Dopo aver constatato che embrioni fissati con il liquido di Sanfelice si coloravano altrettanto bene, anzi con maggior dettaglio e con minori artefatti, che quelli fissati con il liquido di Bouin, ho fissato in

(13) M. Marini « Riv. di Neurobiol. » (Perugia), *2*, 495 (1957).

(14) M. Marini, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (s. VIII), *23*, 96 e 173 (1957).

(15) Ved.: G. Cotronei, « Rend. R. Acc. Naz. Lincei » (s. V), *21*, 782 (1912); G. M. Baffoni, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (s. VIII), *14*, 138 (1953).

(16) G. M. Baffoni, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (s. VIII), *14*, 139 (1953); « Boll. di Zool. », *24*, 135 (1958); G. M. Baffoni e G. D'Ancona, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (s. VIII), *24*, 456 e 606 (1958).

(17) W. Chesterman e E. H. Leach, « Quart. Journ Micr. Sci. », *99*, 65 (1958).

(18) D. Eichner, « Zeischr. f. Zellforsch. », *48*, 137 (1958).

(19) Adulti ed uova di *Bombina* sono stati catturati nel Lazio, in terreno collinoso (a 260 m s/m.) in località « Fontana Cervinera », presso Paliano (41°,47′ di lat. e 0°,35′ di long. Est di Roma; Foglio n. 151, III della Carta d'Italia dell'Istituto Geografico Militare).

Sanfelice due serie complete (a partire dallo stadio 17, di bottone caudale) di stadî embrionali (classificati secondo Shumway [20] in *Rana pipiens*) e larvali (secondo Taylor e Kollros [21]), animali a varî tempi dopo il passaggio alla vita terrestre (9, 18, 36, 70 e 500 giorni) ed adulti; dopo lo stadio XXI (tre giorni prima del termine della metamorfosi) l'encefalo è stato isolato in alcool a 95°. Animali *in toto* ed encefali isolati sono stati inclusi in celloidina–paraffina, affettati a 5 μ di spessore, gli uni lungo il piano trasversale e gli altri dalla norma sagittale, e colorati con la cromoematossilina–floxina secondo il metodo di Gomori modificato da Bargmann [22].

Le prime tracce di neurosecreto compaiono dopo lo sgusciamento (che inizia a stadio 18) in alcuni neuroni dell'ipotalamo allo stadio 21: il neurosecreto appare come minuti granuli localizzati nel polo neuritico delle cellule, talora attorno a placchette di vitello, comunque sempre sul bordo di vacuoli che si formano aderenti a concavità od irregolarità della membrana nucleare (Tav. I, 1). Fino al termine del periodo embrionale (st. 19–23), che secondo Cotronei [23] coincide con l'esaurimento delle scorte vitelline (st. 24), l'aspetto del neurosecreto nelle cellule dei centri preottici (c. p.) non cambia, ma aumentano di numero gli elementi in attività, rostralmente e caudalmente al chiasma ottico, dorsalmente verso l'*area ventralis anterior* e ventralmente. Dallo stadio 23 compaiono i primi granuli di secreto nella neuroipofisi (Tav. I, 6). All'inizio del periodo larvale (stadio I) si osservano le prime gocce di secreto nella neuroipofisi (Tav. I, 7). Nello strato mantellare, tra le cellule del c. p., durante i primi stadî larvali (st. I–III) appaiono elementi il cui nucleo presenta aspetti degenerativi (picnosi e carioressi) e la cui cromatina si trasforma in sferule floxinofile che successivamente (a st. IX) scompaiono; la maggior parte delle cellule del c. p., però, in questi stadî presentano 2–3 nucleoli e minutissimi granuli di secreto che spesso conferiscono al loro citoplasma un aspetto pulverulento (Tav. I, 3); granuli di neurosecreto si osservano nella porzione dentritica che si dirige verso i vasi e la cavità ventricolare: talora ho rinvenuto granuli basofili attorno ai capillari (Tav. I, 4) e sul bordo ventricolare (questi quadri deporrebbero in favore della « idroencefalocrinia » sostenuta da Collin e Barry [24]). Dallo stadio IV in poi il neurosecreto delle cellule del c. p. assume un aspetto di granuli grossi e marcati, diviene visibile lungo il decorso del fascio ipotamo–ipofisario, (comparsa di fibre moniliformi) e si accumula progressivamente nella neuroipofisi (Tav. I, 8), specie a partire dallo stadio IX fino allo st. XXI. Allo stadio XXII la maggior parte delle cellule del c. p. sono prive di secreto, in

(20) W. Shumway, « Anat. Rec. », *78*, 139 (1940).

(21) A. C. Taylor e J. J. Kollros, « Anat. Rec. », *94*, 7 (1946).

(22) W. Bargmann, « Mikroscopie », *5*, 289 (1950).

(23) G. Cotronei, « Mem. Soc. Ital. dei XL » (s. III), *21*, 1 (1919); « Arch. Zool. Ital. », *10*, 85 (1922).

(24) R. Collin e J. Barry, « Ann. Endocrinol. », *15*, 533 (1954).

alcune si può osservare una delicata ombreggiatura grigiastra al polo neuritico; allo stadio XXIII ricompaiono granuli basofili nelle cellule (Tav. I, 5) e nel contempo compaiono gocce colorabili con la cromoematossilina nei plessi corioidei del III ventricolo (Tav. I, 9), mentre il neurosecreto diminuisce nella neuroipofisi.

Dopo il termine della vita larvale e negli adulti (catturati o fissati in primavera) il neurosecreto delle cellule del c. p. aumenta con le dimensioni dell'animale; numerose fibre piene di neurosecreto, però, compaiono solo negli adulti; la maggior parte di esse raggiunge la neuroipofisi, ma alcune, già dallo stadio IX, decorrono sul piano trasversale e versano il proprio contenuto all'esterno, direttamente nella membrana vascolare primaria (o pia madre primitiva); ciò si verifica di frequente in prossimità del chiasma ottico (Tav. I, 10).

Per quanto riguarda l'organo sottocommessurale (o. s.), i primi granuli basofili compaiono nell'embrione allo stadio 19 presso al nucleo ed in corrispondenza a vacuoli formatisi presso alla membrana nucleare nella regione sopranucleare (ventricolare) della cellula epiteliale (Tav. I, 11); allo stadio 21, e con maggior evidenza allo stadio 22, tutta la regione sopranucleare è infarcita di granuli basofili ed allo stadio 23 i granuli prodotti dall'o. s. e versati nella cavità ventricolare coalescono a formare la cosidetta « fibra di Reissner » (Tav. I, 12); nella regione sottonucleare i granuli compaiono allo stadio 23, ma divengono abbondanti solo all'inizio del periodo larvale (st. I; Tav. I, 13). Nei primi stadî larvali l'attività mitotica tra gli elementi dell'o. s. si mantiene sostenuta e perciò l'epitelio si estende aumentando la consistenza dei proprî elementi; allo stadio III (abbozzo delle zampe posteriori) solo gli elementi più mediali presentano granuli basofili offrendo ancora aspetto uniforme (granuli minuti affollati verso il bordo ventricolare, assenti presso al nucleo nella regione sopranucleare – Tav. I, 14); tra stadio V e VI compaiono di nuovo i granuli presso al nucleo e si rarefanno invece alle due estremità delle cellule, specie nella regione sopranucleare, ma sono molto fitti sul bordo ventricolare (Tavola I, 15); dallo stadio IX fino a poco prima del termine della vita acquatica, le cellule dell'o. s. presentano quadri diversi (Tav. I, 16) e sono presenti accumuli di secreto nella regione sottonucleare (contro alla membrana limitante); la diversità dei quadri nelle cellule dell'o. s. nella seconda metà del periodo larvale significa che ogni cellula assume un ritmo secretorio individuale e pertanto diviene molto difficile discernere un definito andamento dell'attività secretoria; negli stadî premetamorfici (da st. IX a XXIII) in tutti gli elementi dell'o. s. il secreto diviene finemente granulare: allo stadio XXI è più abbondante alla periferia della regione sopranucleare, ma allo stadio XXIII tutte le cellule divengono povere di secreto, il quale però persiste sul bordo ventricolare (Tav. I, 17). Subito dopo il passaggio alla vita terrestre (st. XXIV, 55–60 giorni dopo la fecondazione), ricompaiono i granuli nella regione sopranucleare di alcuni elementi dell'o. s. e delicate granulazioni nella regione sottonucleare; anche dopo due mesi di vita terrestre non si osservano elementi dell'o. s. con accumuli (granulari o meno) di secreto (Tav. I, 18).

Materiale granulare che si colora con la cromoematossilina si osserva in alcuni neuroni voluminosi talamici, mesencefalici (nucleo del V), romboencefalici e gangliari (g. cervicali); il materiale basofilo in questi elementi presenta solo un progressivo aumento durante lo sviluppo, perciò, in attesa di più precise indicazioni, non posso escludere che si tratti di pigmento.

RIASSUMENDO: nelle cellule dell'o. s. di *Bombina pachypus*:

1° la comparsa del secreto è più precoce (stadio 19) che in *Rana* (stadio 22 sec. Mazzi [11]);

2° l'attività dell'o s. inizialmente è accentuata in evidente rapporto con la formazione della « fibra di Reissner »; non ho osservato la variazione dell'attività secretoria al termine del periodo embrionale riscontrata in *Triturus* [14];

3° dopo la formazione della « fibra di Reissner » i granuli di secreto dell'o. s. divengono più marcati ed invadono la regione sottonucleare; questo quadro più che espressione di esaltata attività, va considerato quadro di accumulo;

4° le presenti osservazioni confermano l'interpretazione del ciclo secretorio, individuato dall'esame citologico dei primi stadî di sviluppo in un Anfibio urodelo [14];

5° in assenza di più completi dati comparativi o fisiologici sul valore funzionale dell'o. s. e della « fibra di Reissner » [25], non è possibile avanzare fondate interpretazioni sul significato delle variazioni riscontrate nelle cellule dell'o. s. al momento della metamorfosi degli Anfibî.

I risultati conseguiti dall'esame del sistema ipotalamo–ipofisario di *Bombina*, possono così riassumersi:

1° l'inizio dell'attività neurosecretoria dei neuroni del c. p. si manifesta nei primi stadî di sviluppo (st. 20–21) e, come è stato osservato nel nostro Istituto da osservazioni su un Anfibio urodelo [14], compare prima nel centro ipotalamico (a stadio 21) e solo più tardi nella neuroipofisi (a stadio 23); pertanto in *Bombina*, probabilmente a causa della scarsità di pigmento negli embrioni, l'attività neurosecretoria appare prima che in *Rana* [11,8], e *Bufo* [8];

2° all'inizio del periodo larvale sono stati osservati elementi diencefalici in degenerazione che presumo appartenenti al c. p.; ciò è in accordo con osservazioni di precedenti Autori [26,10] e può spiegare l'origine di gocce floxinofile descritte da alcuni ricercatori [27] le quali, almeno in questo caso, vanno ritenute effetto di alterazione della cromatina e non di modificazioni del neurosecreto;

3° l'attenta osservazione del sistema ipotalamo–ipofisario fa pensare che il neurosecreto non si versi esclusivamente nella neuroipofisi, ma, oltre

(25) Ved.: R. OLSSON, « Acta Zool. », *36*, 164 (1955); *ivi*, *39*, 71 (1958).

(26) Ved.: V. MAZZI, « Arch. Zool. Ital. », *38*, Suppl. « Attualità Zoologiche », *8*, 53 (1953).

(27) F. GHIARA, « Monit. Zool. Ital. », *65*, Suppl. « Atti Soc. Ital. Anat. », 280 (1957).

a versarsi direttamente nel ventricolo e nei vasi in rapporto con le cellule del c. p., in parte viene convogliato all'esterno nella membrana vascolare primaria;

4° le modificazioni di aspetto del neurosecreto nel c. p. al termine del periodo embrionale depongono per un'accentuazione dell'attività neurosecretoria; una conferma di ciò potrebbe rinvenirsi nell'osservazione di elementi in degenerazione subito dopo l'inizio della vita larvale; tale degenerazione potrebbe esser stata provocata dall'esaltazione dell'attività neurosecretoria;

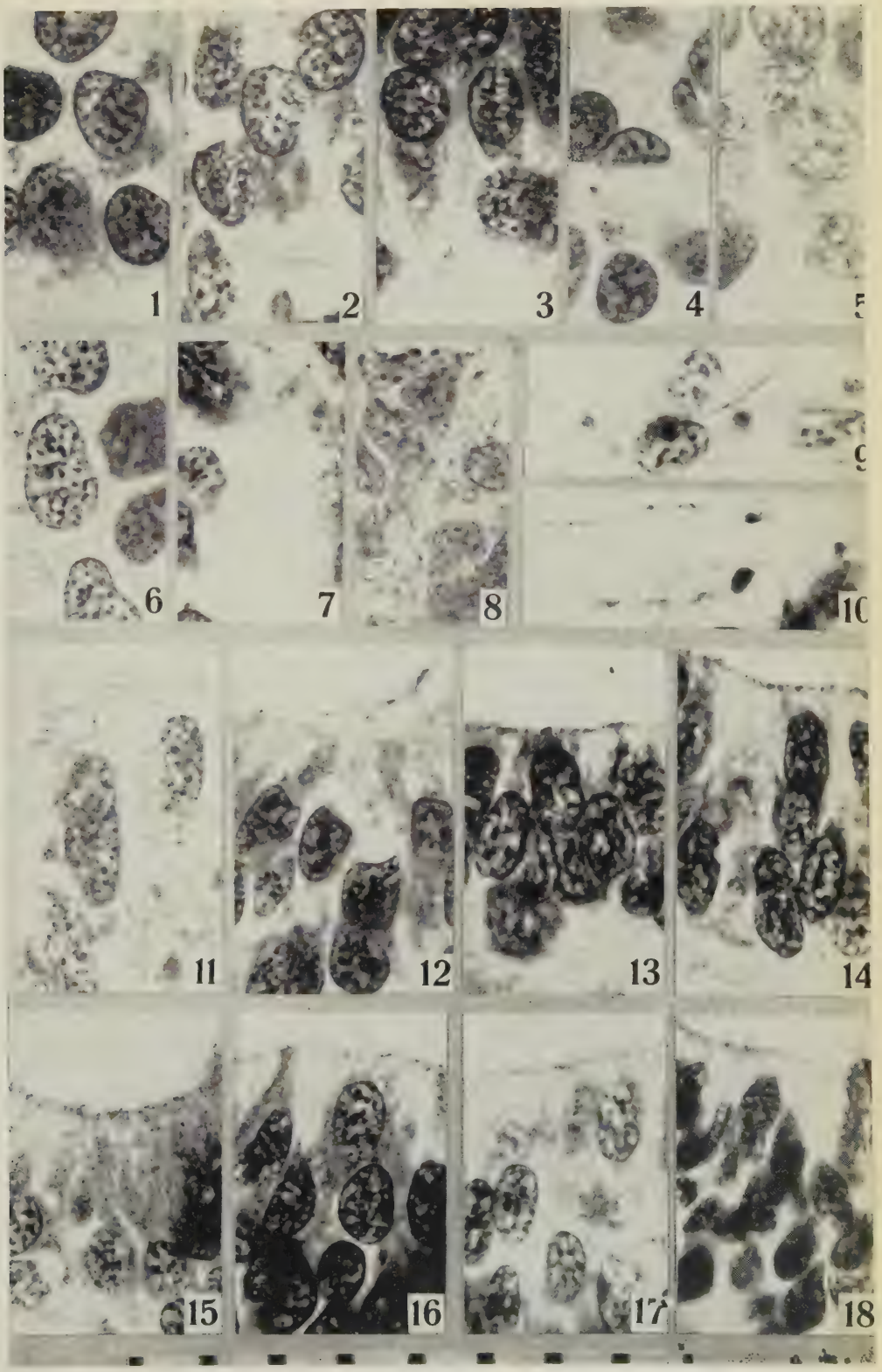
5° in conformità ai fini che hanno motivato la presente ricerca, può ritenersi accertato il rapporto tra variazioni dell'attività neurosecretoria del sistema ipotalamo–ipofisario ed il termine del periodo larvale (metamorfosi); nel caso dell'Anfibio anuro è stata infatti riscontrata estrema rarefazione di neurosecreto nel c. p. e diminuzione di esso nella neuroipofisi; non ritengo che questi aspetti depongano in prò di un abbassamento dell'attività neurosecretoria; ricordo che nel c. p. di Anfibî anuri [3,28] ed Urodeli [29] adulti è stato accertato un ciclo stagionale neurosecretorio (aumento di granuli in primavera ed in autunno e rarefazione estrema in estate); poiché nel c. p. viene elaborato un ormone antidiuretico, di cui il neurosecreto rappresenta la sostanza–veicolo, il significato di questi dati diviene chiaro solo se si suppone che la rarefazione del neurosecreto nelle cellule del c. p. e nella neuroipofisi sia dovuta ad una maggior richiesta di ormone da parte dell'organismo; ciò del resto è suffragato dalla comparsa di gocce basofile nel plesso corioideo anteriore, ed è noto che a questo evento si associa la comparsa di attività antidiuretica ed oxitocica [7]; del resto sembra ovvio che al momento in cui l'Anfibio passa all'asciutto (sia al termine del periodo larvale, sia dopo la stagione degli amori) onde impedire l'essiccamento avvenga una mobilitazione dell'ormone antidiuretico; pertanto è verosimile che in tali periodi il neurosecreto venga messo in circolo non appena elaborato, quando è ancora in forma submicroscopica (osservazioni di Bargmann ed allievi al microscopio elettronico [30]) e quindi invisibile al microscopio ottico. Ricordo che siffatte interpretazioni sono comuni negli studî sul sistema ipotalamo–ipofisario in seguito ad interventi sperimentali [26].

(28) T. Kurotsu e H. Kondo, « Japan. Journ. Med. Sci. », I Anat., *9*, 64 (1941).

(29) V. Mazzi, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (s. VIII), *3*, 155 (1947).

(30) W. Bargmann e A. Knoop, « Zeitschr. Zellforsch. » ,*46*, 242 (1957); W. Bargmann, A. Knoop e A. Thiel, « Zeitscr. Zellforsch. », *47*, 114 (1957).

Rappresentazione semischematica delle microfoto della Tavola a fianco; sono messi in evidenza i rapporti tra neurosecreto (*granuli* o *gocce*) ed i nuclei, i vasi o le superficî diencefaliche (*linee continue*).



1–6. Aspetti delle cellule del centro preottico di *Bombina pachypus* durante il periodo embrionale (*1*, a st. 21; *2*, a st. 23) e larvale (*3*, a st. VI; *4*, a st. IX; *5* a st. XXII). *7–10.* Comparsa di granuli (*6*, a st. 23) e di sferule (*7*, a st. I) di neurosecreto e suo aumento nella neuropiofisi (*8*, a st. IX); gocce basofile nel plesso corioideo anteriore (*9*); fibre provenienti dal c. p. e che versano il neurosecreto nella membrana vascolare primaria (*10*). *11–18.* Quadri dell'attività secretoria dell'organo sottocommessurale durante il periodo embrionale (*11*, a st. 19; *12*, a st. 23), larvale (*13*, a st. I; *14*, a st. III; *15*, a st. VI; *16*, a st. IX; *17*, a st. XXI) ed a 70 giorni dopo la metamorfosi (*18*). (Ogni intervallo delle scale in calce = 10μ).

Biologia. — *Comportamento delle cellule di abbozzo oculare di embrione di pollo dissociate con tripsina e coltivate* in vitro [*]. Nota di ALBERTO STEFANELLI e ANNA MARIA ZACCHEI, presentata [**] dal Corrisp. A. STEFANELLI.

Esponiamo in questa Nota le osservazioni preliminari di una ricerca sul differenziamento e sulla morfogenesi degli elementi dell'abbozzo oculare di embrioni di pollo di varia età eseguite con la tecnica della disgregazione con tripsina e la successiva coltura *in vitro*, su vari mezzi, e con l'ausilio della cinematografia a tempo in contrasto di fase.

È noto dalle ricerche di Moscona (1952) [1] come sia possibile isolare le cellule di un abbozzo embrionale trattandolo con una opportuna soluzione di tripsina e con successiva agitazione meccanica. Gli elementi così isolati possono essere coltivati su differenti substrati (plasma, colloidi di varia natura, membrane traforate, tessuti o vetro) e può essere valutato il loro effetto sul comportamento delle cellule e sulla organizzazione che ne deriva. Questo metodo può pertanto essere utile per una analisi dei movimenti cellulari, sia nella condizione libera sia nella edificazione di strutture, movimenti che, malgrado i numerosi recenti lavori sull'argomento, presentano ancora molti punti oscuri (vedi la relazione di Stefanelli al congresso della Unione Zoologica del 1957 [2] anche per più ampi dati bibliografici).

In condizioni opportune (in modo particolare in piccole vaschette convesse che permettano l'addensamento delle cellule per gravità) le cellule si riaggregano e vengono a ricostituire delle organizzazioni tissutali (Moscona e Moscona 1952, Feldmann 1955, Cavanaugh 1955, Townes e Holtfreter 1955) [3]. Se si fanno le culture in mezzo liquido su vetro piano (come abbiamo fatto noi interponendo tra porta e coprioggetti un anelletto metallico di 3/10 di mm di spessore) si formano aggregati più piccoli ma più numerosi.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata « G. B. Grassi », con un contributo del C.N.R.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1958.

(1) A. MOSCONA, *Cell suspension from organ rudiments of chick embryo*, « Exp. Cell. Research », *3*, 5–35 (1952).

(2) A. STEFANELLI, *I movimenti cellulari nella morfogenesi*, « Bol. Zool. », XXIV, 427–449 (1957).

(3) A. MOSCONA e H. MOSCONA, *The dissociation and aggregation of cells from organ rudiments of the early chick embryo*, « J. Anat. », *86*, 287–301 (1952); M. FELDMANN, *Dissociation and reaggregation of embryonic cells of Tryturus alpestris*, « J. Embr. Exp. Morph. », *3*, 251–255 (1955); M. CAVANAUGH, *Neuron development from trypsin-dissociated cells of differentiated spinal chord of the chick embryo*, « Exp. Cell Res. », *9*, 43–48 (1955); P. L. TOWNES e J. HOLTFRETER, *Directed movements and selective adhesiveness of embryonic Amphibian cells*, « J. Exp. Zool. », *128*, 57–120 (1955).

Come abbiamo potuto dimostrare con la cinematografia a tempo (Stefanelli e Zacchei, 1958) [4], l'aggregazione è dovuta alla casuale coalescenza delle cellule disgregate che sono dotate di una continua agitazione determinata da fenomeni di diffusione e da variazione della tensione superficiale che determina la formazione di continue protusioni (*bubbling*) sulla superficie cellulare.

Le colture di cellule isolate su plasma non portano invece alla formazione di aggregati perché le cellule vengono subito ad aderire al substrato (cosa che non succede sul vetro), fissandosi. Successivamente, con movimenti ameboidi e la moltiplicazione cellulare, si vengono a costituire dei tappeti cellulari di vario aspetto a seconda del tipo di cellule; si hanno membrane cellulari continue con elementi epiteliali, delle reti cellulari con elementi fibroblastici.

Questa tecnica ci è sembrata particolarmente utile per una indagine sui fattori di movimento cellulare e sui fenomeni di morfogenesi tenendo naturalmente presente la peculiare condizione ambientale delle colture quando si vogliano trasferire i fenomeni osservati a quelli della morfogenesi normale.

Abbiamo considerati in queste prime esperienze gli elementi dell'abbozzo ottico per la varietà di tipi cellulari nervosi della retina e del tappeto nero.

Gli abbozzi disgregati in tripsina e coltivati in mezzo liquido (supernatante di plasma centrifugato e liquido di Tyrode 1 : 1) si presentano all'inizio della coltivazione come nella fig. *a* della Tavola I.

I problemi sui quali si è già raggiunta una risposta sin da queste prime osservazioni sono i seguenti:

1° diverso comportamento delle colture su plasma e su vetro e possibilità di aggregazione;

2° specificità di segregazione di elementi retinici e del tappeto nero;

3° fenomeni di segregazione e organizzazione degli aggregati;

4° differenziamento degli elementi nervosi isolati o a gruppi e realizzazione di rapporti reciproci con prolungamenti nervosi.

Sia disgregando abbozzi oculari di 3 giorni, quando il tappeto nero non è ancora pigmentato, che occhi di 10 giorni in cui ormai vi è un notevole grado di differenziamento, si ottengono, nelle colture liquide su vetro, degli aggregati. In quest'ultimo caso in cui le cellule del tappeto, pigmentate, sono facilmente distinguibili da quelle retiniche, si osserva una selettività nelle aggregazioni. Infatti (fig. *b*) le cellule pigmentate si aggregano solo negli ammassi più grossi insieme a cellule retiniche o costituiscono ammassi di sole cellule melaniche. Un fatto interessante, che non si accorda con la concezione della adesività specifica (Holtfreter 1948, Townes e Holtfreter

(4) A. Stefanelli e A. M. Zacchei, *Sulle modalità di aggregazione di cellule embrionali di pollo disgregate con tripsina*, « Acta Embr. Morph. Exper. », 2, 1–12 (1958).

1955, Weiss 1947) [5], è che le cellule melaniche nella fase iniziale di aggregazione non sono tra loro *a contatto*, ma solo ravvicinate (fig. *b*).

Nei più grossi aggregati ottenuti nelle vaschette si può constatare, con preparati istologici, come vi sia una organizzazione interna con la segregazione di elementi retinici che vengono a disporsi in sferule cave circondate da cellule del tappeto. Questo fenomeno si manifesta già in aggregati dopo sole 24 ore di coltura come nel caso della fig. *d* (Tav. I).

Negli aggregati ottenuti da abbozzi molto giovani (nei primi 3 giorni) la organizzazione può essere interpretata in altro modo in quanto è noto da diverse ricerche come elementi del foglietto esterno possano dare elementi retinici e viceversa (nel pollo: Alexander 1937, Gayer 1942, Nejfach 1951 con trapianti, Dorris 1938 in occhi coltivati interi *in vitro* e Bertolini in embrioni frantumati) [6].

Di particolare interesse è la ripresa cinematografica a tempo delle colture su vetro non solo per la fase di aggregazione, come è già stato da noi annunciato [4], ma anche seguendo successivamente il destino degli aggregati e degli elementi che non si aggregano.

Infatti la tendenza delle cellule a fissarsi al substrato (in questo caso il vetro del portaoggetti) impedisce alle cellule di aggregarsi. Il numero variabile nei diversi preparati di queste cellule che sfuggono alla aggregazione dipende verosimilmente dal grado di pulizia e sgrassatura dei vetrini che, per quanto eseguita sempre allo stesso modo, non è mai rigorosamente eguale.

Le cellule nervose retiniche liberamente vaganti nel liquido sono sferoidali. A contatto con il vetro emettono corti e vivaci pseudopodi digitati con cui sembrano palpare il terreno; se riescono ad aderire tutta la cellula si appiattisce sul vetro assumendo una forma allungata « a limaccia » con le estremità in continuo movimento. Striscia lentamente sul vetro, ma i più ampi spostamenti li ottiene staccandosi parzialmente dal vetro e spostando il polo libero in altra direzione. In questi movimenti e spostamenti non è apprezzabile alcuna direttrice preferita. Se l'adesione sul vetro si fa sufficientemente stabile la cellula emette un prolungamento (alle volte più di uno) che cresce rapidamente assumendo l'aspetto di fibra nervosa con quelle caratteristiche descritte da Levi [7] e suoi collaboratori tra cui in particolar modo Godina [8]: ameboidismo terminale con emissione di appendici

(5) J. HOLTFRETER, *Significance of the cell membrane in embryonic processes*, « Am. N.Y. Ac. Sc. », 49, 709–768 (1948); P. WEISS, *The problem of specificity in growth and development*, « Yale J. Biol. Med. », 19, 235–278 (1947); *Experiments on cell and axon orientation* in vitro: *the role of colloidal exudates in tissue organization*, « J. Exp. Zool. », 100, 353–386 (1945).

(6) Per questa letteratura vedi: B. BERTOLINI, *Sul comportamento del tappeto nero di embrioni di pollo in particolari condizioni di impianto in allanto-corion*, « Riv. di Biol. » (in corso di stampa).

(7) G. LEVI, *Nouvelles recherches sur le tissu nerveux cultivé* in vitro, « Arch. Biol. », LII, 133–278 (1941).

(8) G. GODINA, *Il meccanismo di accrescimento e i rapporti di interdipendenza dei neuriti in coltura studiati con la cinematografia a contrasto di fase*, « Suppl. Mon. Zool. It. », LXV, 295–298 (1956).

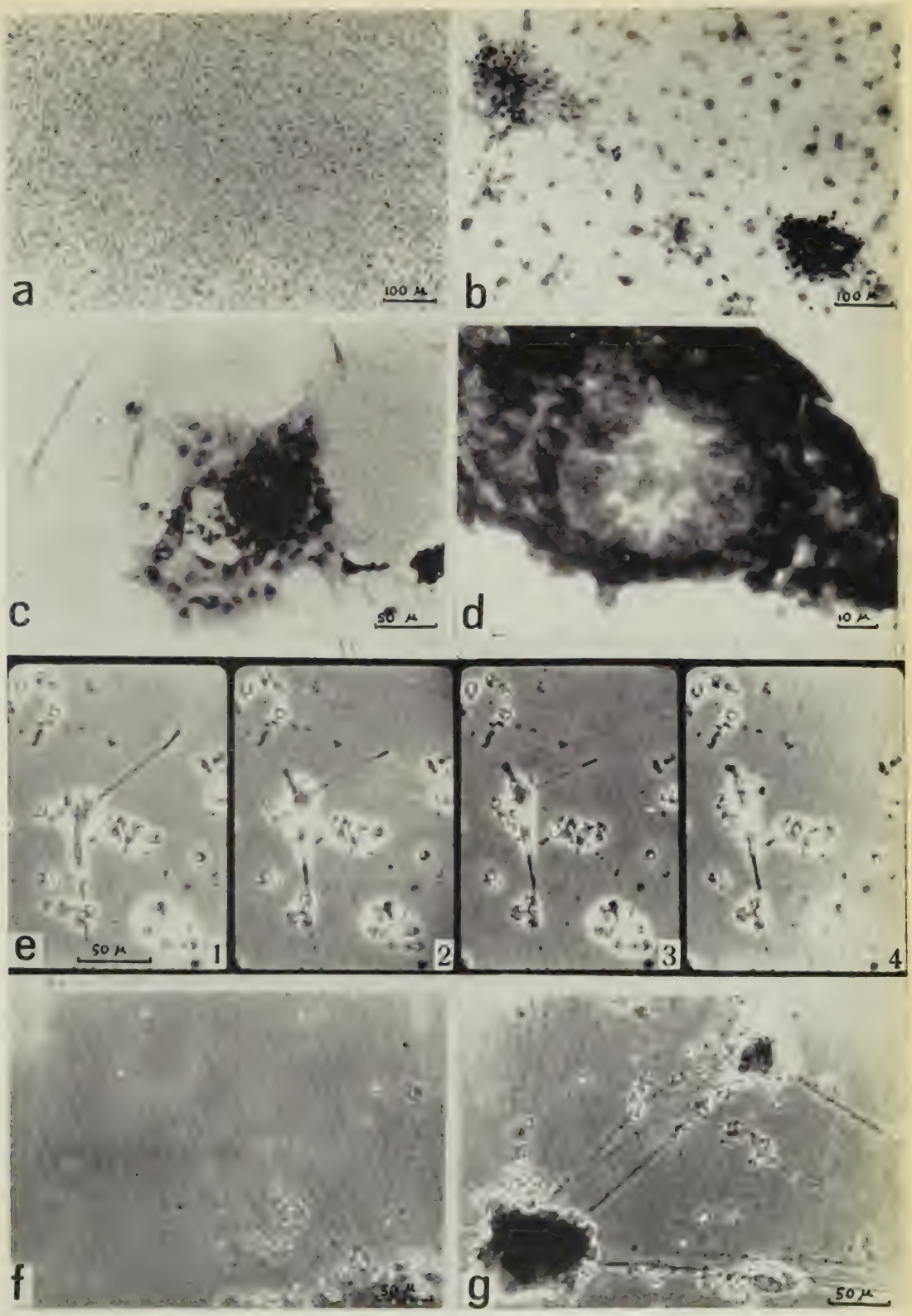
petaloidi dotate di vivace movimento, scorrimento di materiale lungo la fibra, pinocitosi apicale, ecc. Ma la cellula in questa condizione di coltura non mantiene indefinitamente questi prolungamenti e può retrarli completamente e con movimento piuttosto rapido (fig. *e*, Tav. I). Così la cellula nervosa dopo aver assunto le complete caratteristiche specifiche può retrarsi, ristaccarsi dal vetro, e riassumendo forma sferica, riprendere la agitazione che può portarla in molti casi alla aggregazione con altri gruppi già formati. Riteniamo interessante insistere su questo fenomeno di elementi nervosi che, dopo aver assunto le caratteristiche specifiche di neurone, possono rapidamente perderle per riformarle non appena, con una nuova adesione al substrato, se ne verifichi la possibilità; gli elementi del ganglio retinico dànno la possibilità di seguire la evoluzione di questi piccoli neuroncini completamente compresi nel campo del microscopio.

Particolare è anche la successiva evoluzione degli aggregati ottenuti su vetro piano lasciati in sito per alcuni giorni (non si sono potute fare osservazioni dopo il terzo giorno perché si iniziano fenomeni regressivi a carico della coltura a cui non si è cambiato il mezzo nutritivo per non disturbare la delicata struttura raggiunta nel mezzo liquido; con l'uso di camere di perfusione questo tempo potrà essere prolungato).

Anche gli aggregati, che su vetro piano non sono mai molto voluminosi, finiscono per aderire al vetro. Questo fenomeno è collegato con la emissione da parte degli aggregati di un essudato che produce attorno all'aggregato un tenue alone gelificato. Questo essudato è stato descritto da Weiss (1945), ad esso è stata attribuita molta importanza nei fenomeni migratori delle cellule che non potrebbero avvenire, secondo l'autore, al difuori dell'essudato che viene a costituire il «*ground mat*» della coltura. A questo proposito si può affermare che nel caso dei neuroni isolati più sopra citati, l'adesione al vetro avviene indipendentemente da un qualsiasi «*ground mat*» preesistente, ma probabilmente con la produzione di un essudato adesivo, localmente, nei punti di contatto della cellula e della estremità rigonfiata delle fibre. La perfetta linearità delle fibre così formate è indice che esse sono fissate solo per l'estremità, cosa che spiega anche la retrazione quasi subitanea a cui possono andare incontro le fibre formate (fig. *e*).

Quando l'aggregato è fissato al vetro e ha emanato l'alone di essudato allora le cellule riescono ad «evadere» con facilità assumendo i caratteristici aspetti ameboidi delle cellule in coltura. Il movimento è rapido per gli elementi macrofagi e fibroblastici, meno vivace per gli elementi del tappeto che producono delle lamine epitelioidi (fig. *c*); le cellule nervose retiniche o non riescono ad evadere o lo fanno con movimento rapido che può portarle alla completa separazione dall'aggregato (fig. *c*); si confondono allora con quei neuroni che si sono fissati indipendentemente senza mai aver subita una aggregazione.

Le fibre che vengono filate dalle cellule nervose dei vari aggregati si orientano centrifugalmente a raggera; il loro andamento va anche fuori dallo essudato ed è rettilineo sempre in relazione al fatto che si vengono a fissare



a) Occhio di embrione di pollo di 8 giorni di incubazione dopo disgregazione delle cellule con tripsina e in coltura liquida (Tyrode+supernatante di coagulo di plasma centrifugato). *b*) stato di aggregazione su vetro di un caso simile al precedente dopo 24 ore di coltura: notare gli aggregati retinici chiari e le cellule del tappeto nere. *c*) Aggregato su vetro dopo 48 ore di coltura: notare l'evasione di cellule epitelioidi del tappeto e neuroni retinici isolati. *d*) Sezione istologica di un aggregato di abbozzo oculare di 3 giorni dopo 3 giorni di coltura: notare la vescicola di elementi retinici circondata da cellule del tappeto nero. *e*) Serie di quattro fotogrammi da film a tempo con intervallo di 1 minuto di un neuroblasta retinico isolato su vetro: notare la emissione di una fibra con estremità dotata di movimento ameboide e la sua rapida retrazione. In fotogrammi successivi la cellula si retrae completamente e ridiviene sferica e libera. *f*) Irraggiamento di fibre da un aggregato su vetro di elementi retinici di embrione di pollo di 3 giorni di incubazione dopo 3 giorni di coltura.

al vetro con l'estremità dilatata e dotata di notevole attività ameboidea. Se una fibra viene casualmente a contatto con altro aggregato allora altre fibre si associano nella stessa direzione e si viene a formare una connessione più cospicua. Tutta la coltura assume allora un aspetto reticolato per queste connessioni predominanti tra aggregato e aggregato. La prima fibra fa da « fibra pilota ». L'aspetto della coltura ricorda quello descritto dalla Cavanaugh con colture di cellule del midollo spinale isolate su plasma. Dalle figure del suo lavoro si vedono le maglie assai più larghe; l'autrice spiega la struttura come dovuta al « *two center effect* » determinato dalla dissoluzione proteolica del « *ground mat* »: si formano tanti buchi tra i gruppi di cellule e rimangono tante briglie colloidali che le collegano. Nelle nostre colture la produzione di *ground mat* è assai modesta e le fibre si accrescono nel liquido e si fissano solo con la estremità.

In conclusione, da queste ricerche preliminari sul comportamento di abbozzi oculari di embrioni di pollo di varia età disgregati con tripsina e coltivati in mezzo liquido su vetro, risulta che: *a*) si formano aggregati con selettività tra elementi retinici e del tappeto; *b*) si ha negli aggregati più voluminosi una organizzazione di vescicole retiniche circondate da tappeto; *c*) le cellule nervose in gran parte si aggregano ma in parte aderiscono isolatamente al vetro e si muovono senza definita direzione, filando fibre nervose che sono completamente retrattili e che si fissano solo con l'estremità ameboidea; *d*) gli aggregati si fissano al vetro per la formazione di un essudato adesivo; *e*) dagli aggregati fissati « evadono » le cellule assumendo aspetti simili a quelli della classiche coltura con espianti, ma l'alone di cellule proliferate è limitato alla zona di essudato; *f*) dai vari aggregati vengono filate fibre nervose in tutte le direzioni che si fissano al vetro con gli apici dilatati; quando una fibra si collega con altro aggregato, diviene fibra pilota di altre e si viene a costituire una connessione di più fibre; questi ponti fanno assumere alla coltura un aspetto generale reticolato indipendente da fenomeni di proteolisi del substrato colloidale.

Biologia. — *Dati sulla partenogenesi accidentale negli Embiotteri della Fauna mediterranea* (*). Nota di Renzo Stefani, presentata (**) dal Socio G. Cotronei.

Nell'ordine degli Embiotteri, è nota, finora, una sola specie, la *Haploembia solieri* Ramb., mediterranea, in cui si è affermata, in natura, una partenogenesi di tipo geografico.

Nel biotipo anfigonico della stessa specie, io ho dimostrato esistere anche una partenogenesi accidentale che si verifica in alcune uova vergini deposte da ♀♀ anfigoniche che non hanno subito la fecondazione. Tale partenogenesi ha una determinata frequenza e per essa si originano larve partenogenetiche che raggiungono lo stadio adulto e si riproducono. Allo scopo di effettuare uno studio comparativo, ho voluto estendere l'analisi alle altre specie di embiotteri della fauna mediterranea; i risultati sono riportati in questa Nota. Ho esaminato come si comportano altre specie, più o meno strettamente imparentate con la *solieri*, nello sviluppo delle uova vergini e se lo sviluppo verginale sia una prerogativa esclusiva della *solieri* oppure se esista una tendenza alla riproduzione partenogenetica, o una sola potenzialità latente, anche in altre specie.

Le specie investigate sono quelle note della fauna italiana, più una delle Baleari, come risulta dallo specchietto qui sotto riportato in cui è data pure indicazione delle località di provenienza del materiale.

Haploembia palaui Stef. (Mallorca, Baleari).
Embia ramburi R. K. (Roma, Civitavecchia).
Embia tyrrhenica Stef. (Siliqua, Sardegna merid.).
Embia nuragica Stef. (Borore, Sardegna centr.).

Le condizioni di allevamento sono state mantenute costanti per tutte le specie studiate e quanto possibilmente simili a quelle naturali. Negli allevamenti non si sono avuti casi di mortalità anormale e le ♀♀ hanno dimostrato normale vitalità fino all'esaurimento delle uova. Gli esemplari sperimentati sono stati raccolti nel periodo in cui tali insetti si trovavano allo stadio larvale (II e III) e le larve sono state mantenute rigorosamente isolate fino allo stadio adulto, per la durata di alcuni mesi. Dall'esame delle percentuali dei sessi, è risultato che, in tutte quattro le specie, i maschi e le femmine si trovano, pressapoco, in eguale proporzione.

È necessario che io dica due parole sul comportamento delle femmine vergini nei riguardi della deposizione. E noto che alcuni embiotteri curano

(*) Dall'Istituto di Zoologia dell'Università di Cagliari.

La ricerca in campagna è stata compiuta con un contributo del Centro di Biologia del C.N.R. presso la Stazione Zoologica di Napoli, diretto dal prof. G. Montalenti.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1958.

le uova dopo la deposizione avvolgendole con terra impastata di saliva (*solieri*) o con tritume di foglie (*palaui*) oppure le depongono semplicemente in un mucchio nell'interno dei tubi di seta (*ramburi*, *tyrrhenica*, *nuragica* Stefani [1]). L'avvolgimento con materiali estranei, nelle nostre specie, è quindi esclusivo del genere *Haploembia* e questo fatto può avere la sua importanza e merita una ricerca più particolare.

Dall'esame dei dati forniti dalla tabella allegata, possiamo notare subito che la partenogenesi accidentale, già da me dimostrata per l'*H. solieri f. anfigonica*, esiste nell'*H. palaui* e non si verifica invece nelle altre tre specie del genere *Embia* sperimentate.

Si può asserire quindi che la riproduzione partenogenetica accidentale non è esclusiva della *H. solieri* ma avviene anche nella specie congenere *palaui*, mentre è assente nelle specie del genere *Embia* mediterranee.

Dall'esame comparativo della frequenza delle uova partenogenetiche nelle due specie di *Haploembia* indagate da tale punto di vista, risulta che in 60 ♀♀ anfigoniche vergini di *solieri* (Stefani 1956 [2]) soltanto 8 ♀♀ hanno deposto 8 uova (una per ♀) che si sono sviluppate partenogeneticamente mentre in 46 ♀♀ di *palaui* ben 21 ♀♀ hanno deposto uova partenogenetiche fino ad un massimo di 9 uova per ♀! È escluso si tratti, in questi casi, di ♀♀ che siano state furtivamente fecondate da maschi, in quanto le condizioni di assoluta sicurezza dell'isolamento ed un controllo successivo del contenuto della spermoteca hanno confermato la loro verginità. Inoltre le ♀♀ fecondate si distinguono subito da quelle vergini per il modo di deposizione. Le fecondate, infatti, hanno una deposizione continua e regolare, non divorano mai le uova, che schiudono nella totalità (salvo rare eccezioni), mentre, a loro volta, le ♀♀ vergini hanno una deposizione più irregolare, divorano la maggior parte delle uova subito dopo la deposizione o più tardi, e, di quelle lasciate intatte, solo una parte si schiude, disseccandosi le altre, prima o dopo.

Tutti questi fattori conferiscono quindi ai dati forniti una assoluta sicurezza.

Le percentuali di ♀♀ che hanno deposto uova partenogenetiche nelle due specie sono pertanto: *solieri*: 13,3 %, *palaui*: 45,6 % da cui risulta una più netta tendenza alla partenogenesi accidentale nella *palaui*. Inoltre, dai dati della tabella, si deduce anche una maggior intensità nello sviluppo di uova partenogenetiche, raggiungendosi il numero di 8 e di 9 uova vergini sviluppate per ♀, mentre nella *solieri* non è stata superata l'unità.

È di grande importanza notare qui come, nella *palaui*, non si abbia in natura (almeno per le popolazioni da me studiate, che hanno fornito il materiale di ricerca, e per quanto si sappia, finora, anche altrove) l'instaurazione di una razza partenogenetica, pur esistendo la tendenza o, se vogliamo, solo la potenzialità ad una riproduzione verginale. Esistendo in natura un uguale rapporto numerico tra i due sessi, si può presumere che ogni femmina venga normalmente fecondata.

Possiamo senz'altro ammettere come dimostrato, che in entrambe le specie del genere *Haploembia* sussiste, allo stato potenziale, una capacità di

sviluppo partenogenetico. Ma perché tale potenzialità ha condotto, nell'*H. solieri*, alla formazione di un biotipo partenogenetico assoluto, mentre nella *H. palaui* ciò non sembra essersi verificato?

TABELLA I.

Larve neonate sgusciate da uova deposte da femmine vergini.

N. ord. ♀♀ verg.	*H. palaui* (46 ♀♀)	*E. ramburi* (50 ♀♀)	*E. tyrrhenica* (50 ♀♀)	*E. nuragica* (48 ♀♀)
1	—	—	—	—
2	—	—	—	—
3	1	—	—	—
4	2	—	—	—
5	—	—	—	—
6	1	—	—	—
7	—	—	—	—
8	—	—	—	—
9	3	—	—	—
10	4	—	—	—
11	—	—	—	—
12	—	—	—	—
13	8	—	—	—
14	—	—	—	—
15	9	—	—	—
16	—	—	—	—
17	.	—	—	—
18	—	—	—	—
19	2	—	—	—
20	2	—	—	—
21	1	—	—	—
22	—	—	—	—
23	4	—	—	—
24	—	—	—	—
25	—	—	—	—
26	1	—	—	—
27	—	—	—	—
28	1	—	—	—
29	1	—	—	—
30	—	—	—	—
31	1	—	—	—
32	—	—	—	—
33	—	—	—	—
34	4	—	—	—
35	4	—	—	—
36	—	—	—	—
37	2	—	—	—
38	.	—	—	—
39	1	—	—	—
40	—	—	—	—
41	1	—	—	—
42	—	—	—	—
43	—	—	—	—
44	—	—	—	—
45	—	—	—	—
46	1	—	—	—
47	—	—	—	—
48	—	—	—	—
49	—	—	—	—
50	—	—	—	—

Sono da tener presenti, anche per quanto riguarda la sperimentazione futura, due possibilità teoriche di particolare importanza e di natura genetica: gli individui derivati dallo sviluppo partenogenetico delle uova menzionate, se sono ♀♀ normali, in cui si è avuta una ricostituzione del corredo diploide, saranno ♀♀ che si accoppieranno a loro volta senza che si costituisca in natura un biotipo partenogenetico, mentre se durante la maturazione di queste uova partenogenetiche saranno avvenute delle mutazioni per cui gli individui mutanti non si ibrideranno più con quelli del ceppo preesistente (caso della tetrasomia nel biotipo partenogenetico della *H. solieri*) (Stefani 1956 [1]), allora l'amissia e quindi l'isolamento genetico potranno portare all'instaurarsi di un nuovo biotipo a partenogenesi obbbligatoria. Tale biotipo, per questo e per altri caratteri, dovrà essere considerato una nuova specie (cfr. Ross [3]), partenogenetica, derivata dalla specie anfigonica preesistente mediante partenogenesi accidentale, argomento sul quale ritornerò nel futuro, dopo che ciò si sarà potuto dimostrare sperimentalmente, seguendo le generazioni successive derivate dalla partenogenesi accidentale qui descritta.

LAVORI CITATI.

[1] R. STEFANI, *Il problema della partenogenesi in* Haploembia solieri *Ramb.* (*Embioptera-Oligotomidae*), «Mem. Acc. Lincei», Sez. III, fasc. 4, pp. 127–201 (1956).

[2] R. STEFANI, *Alcuni dati sulla partenogenesi in* Haploembia solieri *Ramb. Forma anfigonica.* «Boll. Zool.», Vol. XXIII, fasc. II, pp. 169–175 (1956).

[3] E. ROSS, *A Revision of the Embioptera of North America*, «Ann. Ent. Soc. Amer.», vol. 33, pp. 629–676 (1940).

COMMEMORAZIONI

Commemorazione del Socio Giovanni Silva

tenuta (*) dal Corrisp. FRANCESCO ZAGAR

Aveva da poco tempo lasciato in mani più giovani quell'Istituto che in un'epoca lontana Lo aveva visto muovere i primi passi verso lo studio del cielo, che poi Gli aveva dato la passione per la ricerca, che infine aveva avuto per opera Sua riconoscimento, prestigio e grandezza. Il glorioso Osservatorio di Padova, culla di tanti maestri dell'Astronomia, lo aveva salutato con animo riverente e col cuore in rammarico. Ma non era stato un congedo definitivo, ché tutti lo vedevamo ancora attivo e florido, e tutti pensavano, Lui per primo, al suo ritorno affezionato, per completare i suoi studi, per informarsi del lavoro, per dare preziosi consigli. Ed effettivamente il suo lavoro scientifico non aveva subìto soste, e se le sue frequenze all'Osservatorio andavano lentamente diminuendo, ciò fu perché aveva ripreso e forse intensificato l'attività anche in un secondo Istituto che egli dirigeva da molti anni, quello di Geodesia dell'Università, perché aveva fatto nella sua casa un terzo luogo di studio, specialmente per la sera e per la notte, infine perché con squisita delicatezza e comprensione aveva voluto lasciare libertà completa al suo successore. Era un'attività di studio e di opere silenziosa, ma nondimeno continua, varia e feconda, e tutto lasciava sperare che questo ritmo potesse continuare per lunghi anni ancora. Ma questa gioia e queste speranze dovevano troppo presto tramutarsi nella più cupa angoscia, ché la morte lo ghermì all'improvviso nel pieno della sua attività.

Giovanni Silva nacque il 26 marzo 1882 a Legnago (Verona), e, compiuti gli studi medi a Verona e quelli universitari a Padova, si laureò in matematica nel 1904. Sentendosi già allora portato per la scienza sperimentale, frequentò per un anno il corso per la laurea in fisica, che interruppe per accettare la offerta del posto di assistente presso la stazione astronomica di Carloforte in Sardegna, dove, trovandosi con Luigi Carnera e Luigi Volta, che dovevano poi diventare suoi amici fraterni per la vita, mosse i primi passi nel campo dell'Astronomia geodetica, e presto si distinse per il suo ingegno e per la sua natura di studioso silenzioso e profondo, qualità che dovevano poi accompagnarlo in tutte le manifestazioni del suo lavoro scientifico. Dopo tre anni di soggiorno a Carloforte, nel 1908, ritornò a Padova quale assistente all'Istituto di Geodesia dell'Università, allora diretto da Antonio

(*) Nella seduta del 13 dicembre 1958.

Maria Antoniazzi, e contemporaneamente incominciò a frequentare l'Osservatorio astronomico, dove ebbe i primi fecondi contatti con Giuseppe Lorenzoni, insigne maestro della Scuola padovana di Astronomia. Dopo altri tre anni, nel 1911, passò definitivamente all'Osservatorio per dedicarsi più intensamente all'Astronomia e collaborare più da vicino col Lorenzoni e, dopo il ritiro di questi nel 1913, coll'Antoniazzi, successore del Lorenzoni nella direzione dell'Osservatorio.

Se il periodo di Carloforte deve considerarsi per la natura del lavoro in quella stazione come la scuola elementare e insieme il banco di prova per le attitudini e le capacità del giovane principiante, questo primo periodo di Padova, che va fino al 1921, è caratterizzato da un abbondante lavoro fecondo e magistrale e da una produzione scientifica esemplare. Dal lavoro uniforme a programma invariabile della stazione di Carloforte, ove in tutte le notti serene i due osservatori si alternavano in un programma fisso di osservazioni stellari per la determinazione della latitudine, scopo essenziale di quella stazione in una impresa di collaborazione internazionale che non ammetteva né cambiamenti né soste, egli passava ad altri campi di lavoro, pieni di nuove vedute e iniziative, in un continuo scambio di idee coi due maestri. E se, ad onta della ristrettezza dei mezzi, nella piccola e isolata stazione di Carloforte egli aveva potuto, oltre alle osservazioni normali e al lavoro diurno e notturno pesante, cimentarsi in problemi affini a quello delle latitudini, ed aveva potuto concludere qualche pregevole studio, specialmente nel campo strumentale, al quale si sentì poi particolarmente affezionato fino negli ultimi anni della sua vita, nell'Osservatorio padovano, oltre che allargare le ricerche dell'Astronomia geodetica e dedicarsi alla gravimetria (campi nei quali per opera del Lorenzoni l'Osservatorio di Padova aveva acquistato una meritata rinomanza) egli poté iniziare e sviluppare a suo agio, senza altri gravi impegni, le sue osservazioni celesti ai due equatoriali.

Nel 1921, in seguito alla maturità conseguita in due concorsi contemporanei, veniva chiamato alla Cattedra di Geodesia dell'Università di Torino dove rimase cinque anni, dirigendo pure, dopo il ritiro del P. Giovanni Boccardi nel 1923, l'Osservatorio di Pino Torinese. Nel 1925 moriva a Padova improvvisamente e immaturamente l'Antoniazzi e il vuoto lasciato da questo indimenticabile maestro, non poteva essere più degnamente colmato che con il più illustre figlio della Scuola di Padova e più diretto collaboratore del Lorenzoni e dell'Antoniazzi; ed infatti la chiamata del Silva da parte della Facoltà di Padova fu unanime, e coll'inizio dell'anno accademico 1926–27 egli ritornò all'Università che già lo aveva visto studente e assistente, alla cattedra tanto gloriosa del Santini, del Lorenzoni e dell'Antoniazzi; e contemporaneamente ebbe la direzione dell'Osservatorio astronomico, che, pur essendo indipendente dall'Università, è, per legge, diretto dal titolare della Cattedra di Astronomia. Da allora il Silva ha dedicato per ben 26 anni ogni sua cura alla vita di questo Istituto, ha promosso e diretto lavori di osservazione e di teoria, ha avviato allo studio ed alla carriera parecchi allievi scelti, ha profuso il sapere a una schiera di studenti e di studiosi.

Nel 1934 gettava il primo seme per quella grande opera che doveva risultare l'Osservatorio astrofisico dell'Università di Padova ad Asiago, e negli anni successivi elaborava insieme ai tecnici il progetto di uno strumento modernissimo e il progetto degli edifici. Questo istituto era ultimato nel 1942 e fu dal Silva inaugurato nel maggio dello stesso anno. Alla morte di Emanuele Soler, nel 1937, ebbe anche la direzione dell'Istituto di Geodesia dell'Università. Nel 1952 venne collocato fuori ruolo, ciò che lo sollevò dalle cure amministrative e dai molteplici impegni gravosi e dalle preoccupazioni che comporta la carica di capo d'Istituto, cosicché egli poteva da allora dedicarsi più liberamente allo studio e alla ricerca più personale, come aveva desiderato da lungo tempo di poter fare. Frequentò ancora per qualche anno l'Osservatorio, poi si limitò all'Istituto di Geodesia, essendo ritornato del tutto ai suoi lavori giovanili di Astronomia geodetica, ed infine si ritirò nella quiete della sua casa, a metà strada circa tra l'Osservatorio e l'Università, dove attendeva con grande costanza e con spirito ancora fresco e acuto ai suoi lavori prediletti. Purtroppo questo ultimo periodo doveva essere di breve durata. La sera del 13 ottobre 1957 a ora tardissima, mentre come ogni notte era immerso nel suo lavoro, veniva colto da malore e perdeva la conoscenza; per sette giorni rimase sospeso tra la vita e la morte, in qualche momento sembrando che la sua fibra forte superasse il male; ma a nulla valsero né le cure sapienti della medicina, né le speranze ed i voti degli amici, né il disperato accoramento dei famigliari, e la sera del 20 ottobre si chiudeva, tra il compianto generale, la sua vita terrena.

Come abbiamo già accennato, Giovanni Silva, per la sua indole naturale, era il tipo dello scienziato esatto, esigente, meticoloso ed onesto. Ogni suo lavoro è condotto a fondo, in ogni argomento amava sviscerare le parti più difficili e complesse, negli scogli che incontrava, e che altri avrebbero messi da parte o ignorati, egli insisteva e si sforzava finché non arrivava ad una soluzione soddisfacente, non disdegnava i dettagli delle questioni, né i problemi minuti, specialmente se si trattava di ottenere la massima precisione; ogni ricerca porta l'impronta della chiarezza e della scrupolosità, nessuno dei suoi scritti veniva pubblicato senza essere stato vagliato, perfezionato e messo nella forma esteriore migliore, ed uguale scrupolosità di pensiero esigeva da tutti i suoi collaboratori, mentre giudicava severamente gli scritti superficiali.

Il campo principale dei lavori del Silva riguarda gli argomenti classici dell'Astronomia, e cioè osservazioni di posizione, astronomia sferica e calcoli d'orbita, nei quali egli era una indiscussa autorità. Le prime osservazioni di questo genere sono quelle relative a quattro comete apparse nel 1911, effettuate all'equatoriale Starke–Merz a Padova insieme all'Antoniazzi e al Padova; si tratta di confronti della posizione di queste comete con stelle vicine, con metodi ben noti, ma il Silva aggiunge una ricerca sull'orientamento del micrometro adoperato e sulla direzione dell'asse polare dello strumento, nella quale, in base ad osservazioni particolari di stelle, mette in chiaro un errore

di inclinazione tra le lamine fisse e quelle mobili del micrometro dell'equatoriale. L'anno successivo, 1912, iniziò una serie di osservazioni fotometriche di variabili con un fotometro a cuneo, protratte per quattro anni, disponendo le osservazioni in modo che l'errore medio diventasse il minimo possibile, e adottando il metodo delle perequazioni dello Schiaparelli per la determinazione della curva di luce, non senza però addentrarsi nella teoria del metodo con un'esposizione originale sugli errori che possono essere commessi col procedimento della perequazione. Una ulteriore discussione sulla costruzione in generale delle curve di luce delle variabili, e sul confronto tra l'errore medio delle osservazioni *a priori* e quello determinato *a posteriori* dalla rappresentazione analitica o grafica che del fenomeno si tenta di fare, lo porta alla estensione delle sue conclusioni a molte questioni che riguardano formole empiriche e rappresentazioni grafiche, in particolare per le questioni di Meteorologia. Nel 1930, essendosi iniziato all'Osservatorio di Padova un programma di occultazioni di stelle per la Luna, il Silva, in tre Note, studia a fondo il problema della precisione e della riduzione di queste osservazioni, rifacendo la teoria con particolare riguardo agli scopi presenti di queste osservazioni, e cioè quelli di determinare la posizione esatta della Luna, mentre riconosce gravoso ed inutile il calcolo di tutti i coefficienti e di tutte le incognite che entrano nelle equazioni di condizione rigorose del problema. In tale occasione egli non solo studia minutamente l'opera fondamentale del Brown sulla Luna, ma esamina anche i lavori minori sulle riduzioni delle occultazioni, e scopre che un'altro autore, l'Innes, fissa la costante principale delle occultazioni interpretando erroneamente una costante della teoria browniana. Per la pratica delle riduzioni egli fornisce infine oltre al formulario, trasformato opportunamente dalla forma logaritmica a quella adatta per il calcolo numerico, anche delle tabelle che facilitano il calcolo di previsione per Padova.

Nello stesso anno 1930 un avvenimento eccezionale destò il più vivo interesse in tutto il mondo scientifico: la scoperta del pianeta Plutone per opera degli astronomi americani del Lowell Observatory, avvenuta il 13 marzo, dopo che questo pianeta era stato previsto col calcolo da Percival Lowell fin dal 1905. Subito il Silva si mise allo studio del moto di questo nuovo membro del sistema solare e, raccogliendo le primissime osservazioni, poté a sole due settimane dalla scoperta, calcolare un'orbita del pianeta con metodo proprio semplificato, adattato al caso: non solo, ma nello stesso tempo poté anche concludere che il nuovo astro era proprio quello previsto dal Lowell, contrariamente a qualche astronomo scettico che vedeva nella scoperta un puro giuoco del caso.

Dopo questi primi risultati il Silva elaborò ulteriormente il suo metodo, che venne applicato dai suoi collaboratori Martin e Zagar per un calcolo più completo degli elementi dell'orbita, che a loro volta, in una quarta ricerca padovana, per opera del secondo, vennero poi perfezionati in base al calcalo delle perturbazioni, tanto che l'orbita così assicurata concordava perfettamente con un'osservazione del 1914, conosciuta a lavoro ultimato. Se

si tiene presente che solo tre altri Osservatori in tutto il mondo affrontarono lo stesso problema, e cioè quelli di Parigi, di Berkeley e di Cracovia, e che le conclusioni delle ricerche padovane erano universalmente apprezzate, bisogna riconoscere che i risultati conseguiti dal Silva e dalla sua scuola erano degni della tradizione e della serietà di questa scuola.

Verso il 1933 l'attività dell'Osservatorio si era estesa al campo delle stelle doppie, e il Silva non mancò di occuparsene in tre Note, in due delle quali egli espone un metodo di calcolo orbitale per doppie visuali che si differenzia sostanzialmente da quelli esistenti; considerando che in questi ultimi i tempi di osservazione, pur essendo i dati più precisi dell'osservazione, non vengono utilizzati che alla fine del calcolo, e quindi non sono sfruttati in maniera razionale, egli sviluppa un procedimento analitico che richiama il metodo di Laplace per le orbite planetarie, e si appoggia a tutte le osservazioni, tenendo conto fin da principio ed in eguale maniera sia delle coordinate osservate, sia dei tempi di osservazione. L'applicazione di questo metodo a più di un sistema binario, ed il confronto dei risultati di questo con altri metodi, hanno messo in luce oltre alla praticità del metodo anche la sua eleganza dal punto di vista della teoria degli errori. Una ricerca di altro genere è invece quella che studia il problema delle variazioni secolari degli elementi dell'orbita per effetto del moto proprio della doppia, problema che il Silva risolve in base alla lenta variazione che per gli stessi effetti subisce la costante delle aree dell'orbita apparente.

Una questione di Astronomia fondamentale trattata magistralmente dal Silva è quella sul cosidetto termine solare dell'aberrazione astronomica annua della luce. Le ricerche del Silva dedicate a questo argomento prendono lo spunto dal fatto, già rilevato dal Villarceau nel 1878 e dal Battermann nel 1881 e più recentemente, nel 1938, dal Nobile, che nel calcolo usuale dell'effetto dell'aberrazione annua sulle coordinate degli astri si viene a trascurare una piccola componente, che dipende dal fatto che il Sole non si muove di moto rettilineo ed uniforme nello spazio, ma compie una certa traiettoria intorno al baricentro del sistema planetario, per cui soltanto questo baricentro può assumersi in moto rettilineo uniforme. Se quindi si volesse calcolare l'aberrazione annua con tutta la rigorosità bisognerebbe tener conto non solo del semplice moto kepleriano della Terra intorno al Sole, come comunemente si fa, ma anche del moto che la Terra compie per effetto del moto baricentrico anzidetto del Sole. L'influenza di questo effetto sull'aberrazione, ritenuto fino allora molto lieve (tanto che il Battermann si limita a dire che esso è inferiore al centesimo di secondo d'arco), può arrivare, come ha constatato lo Zagar, a importi tutt'altro che trascurabili per le odierne precisioni dell'Astronomia di posizione, tanto che insieme ad altri contributi dello stesso ordine, pure trascurati oggi, in particolare di quello dovuto al moto della Terra intorno al baricentro Terra–Luna, questi effetti dovrebbero essere tenuti nella giusta considerazione, e lo Zagar ha anche dato sin dal 1941 i metodi di calcolo nonché delle tavole estese per questi effetti. Ma il Silva considera il problema dal lato teorico e più gene-

rale, e in una prima ricerca, dopo aver messo in luce le caratteristiche della velocità del moto kepleriano e premessa una discussione sul termine dell'aberrazione annua dipendente dalla componente minore della velocità orbitale della Terra (la componente dipendente dall'eccentricità dell'orbita), considera il problema del moto baricentrico del Sole, mettendo anzitutto in chiaro che il problema non può essere semplificato ammettendo che tale moto baricentrico sia piano e si svolga in base alla legge delle aree, ed ancora ammettendo che la traiettoria del Sole in questo moto sia circolare e (in conseguenza della prima ipotesi) percorsa di moto uniforme; e successivamente dimostra che per una più completa considerazione dell'aberrazione occorre tener conto anche del moto della Terra intorno al baricentro del sistema Terra–Luna.

In un secondo lavoro sul moto del Sole intorno al baricentro del sistema solare, in considerazione dei risultati del Nobile circa le due predette ipotesi per questo problema, il Silva riesamina ed approfondisce le sue conclusioni, sia teoricamente, sia con dati numerici e grafici, in particolare con una rappresentazione del cammino del Sole nel ventennio 1983–2003, che mostra una traiettoria a cappio tutta situata da una banda rispetto al baricentro, in evidente contrasto con le due ipotesi della validità della legge delle aree e del moto circolare uniforme. E discute ancora a fondo una somma di due vettori, fulcro della questione, uno dei quali secondo le conclusioni del Nobile è senz'altro trascurabile, mentre il Silva esige che per poterlo affermare occorre assicurarsi prima che esso sia piccolo di fronte all'altro, e trova che per le circostanze del problema questa condizione non può dirsi verificata. In una terza Memoria infine il Silva riprende lo stesso problema, e con una nuova analisi rigorosa, senza ipotesi e con la più esauriente discussione basata sui suoi sani criteri di astronomo teorico e pratico, conferma la validità dei risultati delle sue prime ricerche.

Alcuni interessanti lavori del Silva tra il 1937 e il 1938 riguardano le traiettorie dei satelliti rispetto al Sole, supponendo che queste siano le risultanti del moto kepleriano del satellite rispetto al proprio pianeta col moto kepleriano del pianeta intorno al Sole. A prima vista ognuno pensa che la Luna, e più in generale un satellite, girando intorno al proprio pianeta, descriva per un osservatore esterno, per esempio situato sul Sole, una linea sinuosa con flessi, od anche una linea più complicata con cappi e nodi; si dimostra invece facilmente che la traiettoria della Luna, differendo pochissimo da quella della Terra, presenta sempre la concavità al Sole, e il Silva si prefigge di studiare più in generale le condizioni in cui l'orbita di un satellite è concava o presenta anche tratti di convessità verso il Sole. Lo studio, specialmente se si suppongono non complanari le due orbite, è estremanente complicato dal fatto che il moto è regolato dalle due equazioni trascendenti di Keplero, tuttavia risulta da queste ricerche che soltanto la traiettoria della Luna è sempre concava verso il Sole e che soltanto i due satelliti più interni di Giove e i tre satelliti più interni di Saturno presentano dei cappi. Con una

indagine teorica più approfondita, allacciandosi ad alcune sue ricerche di geometria pura sulla concavità, convessità e curvatura delle linee, il Silva determina poi la sufficienza o meno delle condizioni prima trovate, ne discute l'applicazione pratica ed elabora dei casi particolari.

Alla teoria più elevata delle perturbazioni appartiene la Sua dissertazione di laurea, che tratta dei limiti di convergenza della funzione perturbatrice e fu interamente pubblicata nel « Bulletin Astronomique » di Parigi; partendo dai risultati del Poincaré e del Sundman, considerato che i criteri di convergenza conosciuti sono necessari, mentre nulla può dirsi circa la loro sufficienza, Egli studia la questione nella sua generalità con notevoli sviluppi analitici, prima per il caso piano, poi per quello del moto nello spazio, arrivando fino alla espressione esplicita di alcune condizioni di convergenza e verificando queste condizioni per i pianeti. Altro lavoro isolato riguarda invece la curvatura della traiettoria apparente geocentrica di un pianeta o di una cometa; in questo il Silva espone una dimostrazione diretta e brevissima col metodo vettoriale della legge di Lambert, che ordinariamente viene dedotta con una laboriosa trattazione analitica. In un ultimo lavoro riguardante questo primo gruppo studia le relazioni tra il fenomeno della precessione e i moti propri stellari, mettendo in rilievo alcune relazioni semplici che i trattati ignorano pur trattandosi di argomento classico molto noto.

Un campo di lavoro al quale il Silva si è dedicato durante tutta la sua carriera scientifica, è quello dell'Astronomia geodetica, della Geodesia e della Gravimetria. Esso prende le mosse dal suo esordio nella stazione di Carloforte, dove in una pubblicazione fatta insieme al Volta fornisce i programmi stellari per la determinazione del tempo, e in collaborazione col Carnera e col Volta studia il micrometro e le livelle del telescopio zenitale. A Padova, dopo un primo lavoro in collaborazione con l'Antoniazzi sopra una influenza perturbatrice locale su una longitudine determinata all'Osservatorio, esegue un pregevole ed originale studio sullo strumento universale Bamberg dell'Istituto di Geodesia e determina la latitudine col metodo delle distanze zenitali meridiane; è un'opera che ancora oggi serve da guida competente a chi si accinge ad adoperare strumenti del genere ed anche più in generale tutti gli strumenti di Geodesia e di Astronomia posizionale. Altro studio analogo riguarda il medesimo istrumento adoperato come istrumento dei passaggi in meridiano e le determinazioni di tempo eseguite con esso in stazioni di campagna. In tre lavori teorici sulle differenze di longitudine, il primo relativo alle determinazioni indirette, con osservazioni di azimut e di latitudine; il secondo relativo alle determinazioni dirette mediante la telegrafia con o senza fili; il terzo relativo alle determinazioni indirette mediante gli azimut reciproci, il Silva studia i metodi conosciuti dal punto di vista della precisione dei risultati e della speditezza dei procedimenti, e ne aggiunge di nuovi, teoricamente più rigorosi di quelli esistenti. Analogo lavoro riguarda le osservazioni di latitudine col metodo di Horrebow–Talcott.

In quanto a lavori di osservazione in questo campo, quasi 4800 osservazioni di coppie di stelle per la determinazione della latitudine a Carloforte, quattro determinazioni di latitudine, effettuate rispettivamente negli anni 1910–11, 1913 e 1914 a Padova, compreso uno studio di compensazione fatto per tutte le latitudini dell'Osservatorio di Padova determinate sin dal 1892, e un vasto lavoro di longitudine nell'autunno del 1922 in cooperazione con altri osservatori appartenenti a quattro Istituti italiani partecipanti all'impresa, più una serie di operazioni di Astronomia geodetica lungo l'Adriatico, nonché infine una chiara sintesi dei procedimenti moderni e degli scopi delle determinazioni astronomiche di longitudine, confermano ad ogni passo il suo spirito di acuto osservatore e indagatore, specialmente nel lavoro sulle longitudini del 1922, il primo che si faceva in Italia coll'aiuto della radiotelegrafia in luogo della telegrafia ordinaria. Il lavoro più poderoso e più conclusivo in questo gruppo è però quello sulla compensazione delle 93 determinazioni di longitudine (54 telegrafiche, 9 radiotelegrafiche reciproche, 4 con azimut reciproci, 4 radiotelegrafiche con unico osservatore isolato, 22 radiotelegrafiche unilaterali) di 38 stazioni italiane, determinate tra gli anni 1869 e 1934. La raccolta paziente ed accurata del materiale attendibile, l'ampio esame delle stazioni e delle operazioni eseguite, la discussione dei singoli risultati, e il lavoro speso in due compensazioni, una interna comprendente 13 stazioni tutte italiane, ed una generale estesa anche a Greenwich, assicurano ai risultati conclusi una importanza speciale, e l'elenco delle longitudini italiane definitive date dal Silva deve riguardarsi come la base più valida e sicura che abbiamo oggi su questo argomento.

Di Geodesia pura sono due lavori sulla rete geodetica fondamentale della Venezia Giulia e sulla sostituzione di un ellissoide di riferimento ad un altro, nonché due lavori teorici sulla definizione e sulla formola della gravità normale, nel primo dei quali il Silva esamina da vari punti di vista la questione, già sollevata dal Somigliana, di fondare la definizione della gravità normale sul risultato delle ricerche del Pizzetti relative al potenziale della gravità considerando il geoide terrestre come un ellissoide di rotazione, mentre nella seconda il Silva propone una nuova formula per la gravità normale, che corrisponde all'ipotesi ellissoidica e ai valori dell'ellissoide internazionale meglio di quelle usate abitualmente.

Infine in due altre Note teoriche egli tratta il problema della utilizzazione dei dati gravimetrici nelle livellazioni, cioè per il calcolo della riduzione della quota osservata a quota dinamica, mostrando che, scomponendo tale riduzione in una parte di primo ed una di secondo ordine, questa ultima può essere trascurata.

Per quanto riguarda infine l'attività operativa nel campo gravimetrico, il Silva ha non solo effettuato numerose determinazioni di gravità relativa a Padova, Trieste, Pola, Genova, Torino, Mondovì e lungo l'Adriatico negli anni tra il 1913 e il 1928, ma con l'istituzione di una stazione fondamentale per la gravità assoluta all'Osservatorio di Padova, intitolata a Giuseppe Lorenzoni, nonché con vari lavori sugli apparecchi pendolari usati nelle

misure di gravità e ricerche sulle riduzioni e sulle precisioni di queste misure, ha dato un validissimo apporto e impulso alla gravimetria in Italia.

Strettamente collegato col precedente è un gruppo di lavori dedicato a questioni strumentali, nelle quali il Silva, come già rilevato, era maestro insuperabile, Come già ricordato, i primi lavori di questo genere risalgono al tempo di Carloforte e riguardano studi sui micrometri e sulle livelle, continuati poi a Padova e ampliati nell'opera sull'istrumento Bamberg, di cui abbiamo già parlato, e in una ricerca sul circolo meridiano di Starke. Una particolare cura e competenza impegnò il Silva in uno studio sulla delicata questione delle irregolarità dei perni di un istrumento meridiano, sulla quale questione egli doveva ritornare dopo 40 anni, in epoca recente, poco prima della sua morte. Come ogni problema, anche minimo, questo dei perni è studiato dapprima teoricamente con tutti gli sviluppi analitici necessari, poi con una discussione ampia e completa, infine con varie serie di osservazioni. Altri lavori riguardano questioni strumentali di fotometria, come quella dell'esame e della determinazione delle caratteristiche del fotometro stellare a cuneo di Catania, quella di due cunei fotometrici di Napoli, e quella di un nuovo apparecchio ausiliario del fotometro di Padova, progettato dal Silva stesso e basato sulla valutazione della uguaglianza di due immagini stellari invece che sulla estinzione di una. In anni più recenti egli ha voluto studiare anche il grande telescopio di Asiago e il suo spettrografo per quanto riguarda le loro qualità meccaniche, e in due Note esaurienti ha trattato la flessione di questi istrumenti dal lato teorico, mentre le sue conclusioni sono state poi applicate praticamente dai suoi collaboratori Gennaro, Mannino, Taffara e De Strobel.

Ma una sorprendente attività in questo campo deve soprattutto registrarsi negli ultimi anni della sua vita, dopo il suo passaggio fuori ruolo e il ritiro dalle attività ufficiali in Osservatorio. In previsione di una ripresa dei lavori tradizionali di Longitudine e Latitudine in Italia, specialmente per opera degli Osservatori di Torino, Milano e Padova, quali partecipanti alla grande impresa dell'Anno Geofisico Internazionale 1957–58, Egli ritornò alla questione della irregolarità dei perni di uno strumento per i passaggi stellari attraverso piani verticali, studiandola sia dal lato teorico, sia dal lato pratico, progettando allo scopo un apparecchio ausiliario basato sulle più moderne tecniche elettroniche, che fece costruire in breve tempo nelle officine dell'Osservatorio, e che ha già servito ai suoi collaboratori per l'esame di diversi strumenti ed attualmente è in prestito all'Osservatorio di Milano per l'esame degli strumenti che partecipano all'Anno Geofisico Internazionale.

Per la sua innata tendenza all'esattezza in ogni campo, il Silva era anche maestro in tutto ciò che riguardava l'attendibilità e la precisione delle osservazioni e dei risultati, in primo luogo nella teoria degli errori e nel metodo dei minimi quadrati; un cospicuo lavoro teorico e numerico, in cui Egli sottomette ad un profondo esame critico la teoria dell'errore medio di una serie di osservazioni, e una esposizione monografica sul metodo dei minimi quadrati appartengono a questo gruppo.

Nelle varie questioni che il Silva ha trattato, spesso si è imbattuto in problemi affini, per la maggior parte di matematica pura; in molti di questi casi Egli non si è accontentato di applicare le cognizioni già possedute, ma ha voluto trattare a parte il caso, portando dei notevoli contributi anche in questo campo. Dobbiamo qui in primo luogo menzionare una serie di lavori di Geometria, che riguardano le proprietà delle curve sghembe, e cioè la curvatura, la concavità e la convessità, sia in generale, sia sotto certi aspetti particolari; i metodi vettoriali ed analitici usati in queste ricerche con sicurezza ed eleganza lo portano a risultati notevoli che egli applica poi alle questioni da lui studiate sulle traiettorie dei satelliti intorno al Sole, delle quali abbiamo già parlato. Altre ricerche sono dedicate a questioni di probabilità, come quella cosiddetta delle concordanze, già studiata dal Laplace, che dal Silva viene ampiamente generalizzata ed applicata a casi concreti. Altri lavori del genere ancora riguardano le applicazioni non astronomiche del concetto della sfera celeste, vale a dire l'applicazione dei metodi dell'Astronomia sferica a problemi di fisica, che vengono risolti con grande eleganza e semplicità. Altri infine riguardano problemi di meccanica, come quello classico della caduta libera dei gravi sotto l'azione della rotazione terrestre e della variabile gravità in ogni punto del tragitto.

Un grande numero di scritti su problemi minori, come quello sulla durata delle stagioni, sull'anno platonico, sulla denominazione delle Lune, sulla visibilità della falce lunare, sulle leggi empiriche del sistema planetario ecc., e di esposizioni sintetiche in rapporti, relazioni e conferenze, tra cui non possiamo non ricordare la relazione sulla misura del tempo tenuta in questa Accademia nel 1939, completano questo quadro della prodigiosa attività scientifica del Silvo.

* * *

Ma la vita di Giovanni Silva non fu soltanto spesa in opere di studio e di raccoglimento, in discussioni accademiche e di scienza pura; né Egli, pur amando la quiete e la ricerca personale, si è chiuso in un isolamento egoistico per seguire le sue ricerche predilette. L'insegnamento dalla Cattedra e le cure di uno o più Istituti richiedono una visione aperta di tanti problemi, nonché la continua, intensa applicazione alle più svariate questioni che hanno attinenza con gli Istituti e con i relativi programmi di lavoro, infine i contatti col personale e la cura dei giovani. A ciò si aggiungono le attività su piani più elevati, nazionali ed internazionali, alle quali, una volta chiamati, non ci si può sottrarre senza ledere interessi generali e questioni di tradizione e di prestigio.

In ogni impresa Egli era accurato e non si fermava mai a metà strada; nelle osservazioni metteva tutta la sua massima attenzione ed esperienza; nessun variabilista ha trattato le proprie osservazioni con tanto acume di critica e con tanta competenza del fenomeno e dei mezzi adoperati quanto il Silva; le sue osservazioni gravimetriche hanno servito da modello ad una

schiera di seguaci. Anche le questioni più noiose per uno scienziato, quelle amministrative e contabili, erano da lui trattate in modo esemplare, né egli perdeva mai di vista l'importanza del lavoro di officina, dove discuteva coi tecnici e sorvegliava personalmente i lavori.

Ma l'avvenimento che mise in viva luce le Sue qualità di organizzatore e di progettatore che conosce le vere necessità presenti e future della ricerca scientifica, fu quello della fondazione del nuovo Osservatorio dell'Università di Padova. Egli seppe anzitutto far comprendere le necessità di un rinnovo radicale dell'Astronomia padovana al Rettore dell'Università di allora, Carlo Anti, che con larghezza di idee non comune volle interessarsi vivamente al problema ed appoggiare tutte le richieste del Silva, ottenendo in breve tempo dal Capo del Governo, nel 1934, la piena approvazione del progetto. L'istrumento, un telescopio riflettore parabolico di 120 cm di diametro utile, pari al massimo telescopio europeo allora esistente, opera delle Officine Galileo di Firenze, riuscì un vero capolavoro dell'arte ottica e meccanica, grazie al continuo controllo e contatto del Silva e dei suoi collaboratori coi dirigenti e coi tecnici costruttori. Esso fu dotato di uno spettrografo di dimensioni insolite e di varie combinazioni ottiche, così da formare un accessorio di primo ordine, utile a tutti i lavori del più importante campo della Astrofisica, quello della spettrografia stellare. Venne scelto quale sede più adatta un terreno vicino alla cittadina di Asiago sull'Altipiano omonimo in Provincia di Vicenza, a 1050 metri sul mare, e in pari tempo venne costruita la grande cupola contenente questo istrumento e gli edifici per gli uffici, studi, laboratori, officine ed abitazioni. E nel giorno della solenne inaugurazione, il 27 maggio 1942, il Silva poteva mostrare con legittimo orgoglio a tutti gli astronomi italiani ivi convenuti per l'occasione, alle autorità e al pubblico, il felice coronamento della Sua idea e delle Sue fatiche quotidiane di tanti anni. Da allora questo Osservatorio, sempre sotto la viva attenzione e cura del suo ideatore, che non ha mancato di potenziarlo ed ampliarlo di anno in anno, ha dato alla scienza astronomica risultati nuovi e fecondi, e oggi, sotto la guida di Leonida Rosino che continua con lo stesso fervore l'opera del maestro, è uno dei più fiorenti Istituti del genere in Italia e in Europa.

Per la Sua multiforme attività e per la Sua autorità indiscussa ebbe molte cariche scientifiche e molte nomine accademiche ed onorifiche. Oltre alla direzione degli Osservatori di Padova ed Asiago e dell'Istituto di Geodesia dell'Università di Padova, ebbe quella della Sezione di Asiago del Centro di Astrofisica del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Era socio nazionale di questa Accademia dal 1932, membro della Commissione Geodetica Italiana dal 1925, membro effettivo dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti e dell'Accademia delle Scienze di Padova, Socio corrispondente dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, dell'Accademia delle Scienze di Torino e dell'Accademia di Verona, Socio straniero dell'Istituto delle scienze di Coimbra, membro della Società astronomica italiana fin dalla fondazione, membro del Consiglio nazionale delle ricerche, membro della Commissione

per il riordinamento degli Osservatori astronomici, membro della Commissione di vigilanza della stazione di Carloforte, membro dell'Unione astronomica internazionale e della Associazione geodetica internazionale.

Uscito dalla celebre scuola del Lorenzoni, che tanti maestri, insieme al Silva, ha dato all'Astronomia italiana, dal Ciscato all'Alessio, al Viaro, all'Antoniazzi, al Bianchi, al Carnera, al Padova, all'Abetti, egli ebbe sempre amorevoli cure per i suoi collaboratori e allievi, tre dei quali sono oggi in Cattedra e alla direzione di importanti Osservatori astronomici italiani. All'Università di Padova, dove aveva attinto la sua cultura e formazione matematica e fisica, profuse in lezioni e seminari di Astronomia, Meccanica celeste e Geodesia la sua profonda sapienza, sia dalla Cattedra, sia in discussioni amichevoli, sia in consigli paterni, sia infine in critiche benevoli. Nei molti consessi scientifici e nelle innumerevoli commissioni di cui faceva parte, la sua parola era ascoltata come quella di una induscussa autorità, poiché il Suo giudizio era sereno in tutte le discussioni, sia che riguardassero problemi scientifici, sia che riguardassero problemi umani e personali.

Il 27 luglio venne a Milano a onorare con la sua presenza l'inaugurazione di un reparto nuovo dell'Osservatorio e l'inizio dell'Anno Geofisico Internazionale, e in quell'occasione, lieto di vedere realizzato il programma delle Longitudini e Latitudini in quella impresa di collaborazione mondiale che Egli aveva tanto auspicato nella sua qualità di Presidente del Comitato italiano per l'Anno geofisico, parlò a lungo dell'avvenimento e delle Sue intenzioni e speranze di apportare anche Lui un utile contributo all'impresa con la costruzione di un apparecchio ausiliario per l'esame degli istrumenti impegnati nelle Longitudini e con lo studio di questioni teoriche connesse col problema, come quelle riguardanti la misura del tempo, la rotazione terrestre e le posizioni stellari. Gentile e modesto come sempre, elogiava l'opera degli altri, mentre non desiderava parlare del proprio apporto. È l'ultima immagine Sua che ci rimane nel vuoto incolmabile che ha lasciato intorno a noi.

Modesto, come ogni carattere nobile, fino a rinunciare a cariche molto onorifiche che meritatamente e unanimamente gli venivano offerte, aveva una grande stima per i suoi predecessori, in particolare il Lorenzoni, e parlava con venerazione del grande Schiaparelli, mentre sapeva comprendere, incoraggiare ed aiutare chi a Lui si rivolgeva. Ebbe una vita limpida e retta come le opere che ci ha lasciato, tutta dedicata allo studio e al lavoro, illuminata dal devoto affetto della Sua compagna per la vita, dalla venerazione dei Suoi discepoli, dalla stima ed ammirazione dei Suoi colleghi ed amici. Lo ricordiamo come lo abbiamo sempre visto: sereno, buono, onesto; e così lo ricorderemo perennemente.

PERSONALE ACCADEMICO

Prima di dare la parola al Socio Zagar per la commemorazione del compianto prof. Silva, il Presidente legge una lettera inviatagli dal Socio Carnera, con la quale il predetto Collega, impossibilitato ad intervenire alla seduta, esprime i sentimenti della sua commossa adesione alle onoranze che la Classe renderà alla memoria del caro amico ed illustre Consocio prof. Silva.

Hanno inoltre inviato messaggi di adesione la famiglia Silva, il Presidente dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti prof. Checchini, il Rettore dell'Università di Padova prof. Ferro, che ha delegato a rappresentarlo il Socio Bianchi, e il Direttore dell'Osservatorio di Padova prof. Rosino.

Il Presidente Giordani ringrazia il Socio Zagar per la sua elevata orazione e rinnova l'espressione del più vivo cordoglio della Classe e suo personale per la scomparsa di Giovanni Silva, che l'Accademia si onora di aver annoverato tra i suoi più illustri membri.

Il Presidente dà quindi la dolorosa notizia della morte del Socio Nazionale Francesco Pentimalli, avvenuta in Roma il 14 dicembre c. a., e, mentre assicura che l'insigne patologo sarà degnamente commemorato in una delle prossime sedute, rivolge un pensiero di reventente omaggio alla sua memoria ricordando come egli abbia dedicato tutta la vita al progresso della scienza.

Il Presidente ritiene opportuno interpellare la Classe in merito alle commemorazioni che dovranno essere tenute nelle prossime adunanze.

Nella seduta del 14 febbraio 1959, il Collega Rossi–Fanelli commemorerà il Socio Quagliariello, mentre il Socio Nobile ha assicurato che, in una delle ultime adunanze dell'anno, rievocherà la figura del prof. Armellini.

Rimarrebbero quindi da commemorare i proff.: Menozzi, Scarpa, Miolati, U. Amaldi, Lombardi, De Lorenzo, Mazzetti e Pentimalli.

Per i proff. Scarpa e Menozzi è stato già deciso che i relativi necrologi saranno preparati rispettivamente dal Presidente e dal Socio Cambi, mentre il Socio Semerano si è impegnato ad inviare il testo della commemorazione del prof. Miolati.

Per il prof. U. Amaldi, la Classe, in omaggio alle volontà espresse dal compianto Collega, ha deliberato di non tenere una commemorazione pubblica, ma di incaricare qualcuno dei Soci di preparare un necrologio che illustri le benemerenze scientifiche ed accademiche dell'insegne Matematico.

Circa la commemorazione del prof. De Lorenzo, il Presidente si riserva di prendere contatto con la Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche, in modo che si possa degnamente rievocare non solo l'attività scientifica del defunto Collega, ma anche quella umanistica nella quale parimenti egli eccelleva.

Ciò premesso il Presidente invita la Classe a decidere in merito alle commemorazioni dei proff. Lombardi, Mazzetti e Pentimalli. Per quest'ul-

tima viene designato il Socio Califano che accetta, mentre, per le altre due, la Classe dà mandato al Presidente di provvedere direttamente dopo aver interpellato i Colleghi particolarmente competenti.

Il Socio Cambi prega il Presidente di voler esaminare la possibilità che l'Accademia commemori anche quegli studiosi defunti che decaddero dalla qualità di Socio in forza del Decreto Luogotenenziale 4 gennaio 1946. In caso affermativo, egli sarebbe senz'altro disposto a commemorare il compianto Collega Giuseppe Bruni.

Il Presidente risponde che la proposta del Socio Cambi verrà presa nella dovuta considerazione e sarà sottoposta al Consiglio di Presidenza.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente comunica che è presente alla seduta il prof. Romuald Cebertowica, Direttore dell'Istituto di Costruzioni idrauliche del Politecnico di Danzica e membro dell'Accademia Polacca di Scienze e Lettere, che è stato invitato a venire in Italia per studiarvi l'applicazione del metodo elettrocinetico al consolidamento delle fondazioni di nostri insigni monumenti, fra i quali la minacciata torre pendente di Pisa.

All'illustre ospite il prof. Giordani porge il cordiale saluto della Classe e suo personale.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Montalenti presenta la sua opera dal titolo « L'evoluzione », nella quale sono raccolte le lezioni da lui tenute sulla evoluzione biologica per incarico della RAI.

Il Socio Margaria presenta un volume contenente le « Pubblicazioni dell'Istituto di Fisiologia dell'Università di Milano » negli anni accademici 1953–1957.

Il Segretario Accademico presenta le pubblicazioni pervenute in omaggio all'Accademia.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note, per la pubblicazione nei Rendiconti, i Soci Pensa, Carobbi, Boaga, Stefanelli, Bonino, Cambi, Quilico, Natta, Picone, Tonzig, Righini, Finzi, Colonnetti, Montalenti, Puntoni, Cotronei, Segre, Rossi-Fanelli, Caglioti.

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

COLONNETTI G. – Verifica sperimentale di presunti rapporti tra deformazioni elastiche e deformazioni plastiche. Nota IV.

Bompiani G. D. – Sulla presenza di granuli caratteristici nelle cellule del tessuto specifico di conduzione a livello del tronco comune del fascio di His nel ratto (pres. dal Socio G. Bompiani).

Chieffi G. e Carfagna M. – Variazioni del contenuto della fosfatasi alcalina nell'intestino di *Rana esculenta* durante la metamorfosi (pres. dal Corrisp. G. Montalenti).

Colonna M. – Arilazione dell'N–ossido di piridina con i sali di diazonio (pres. dal Socio A. Quilico).

Colonna M. – Diazometano ed azoici N–eterociclici coniugati simmetrici (pres. dal Socio A. Quilico).

Fraccaro M. – La morfologia di colonie cellulari originate da cellule isolate del rene fetale umano (pres. dal Socio A. Pensa).

Monesi V. – Nuovi particolari sulle connessioni nervose dei nuclei marginali maggiori del midollo spinale degli Uccelli (pres. dal Socio A. Pensa).

Paggi L. e Biocca E. – Su un trematode parassita della volpe in Italia. *Lyperosomum vulpis* n. sp. (pres. dal Socio V. Puntoni.

Trezzi F., Pegoraro L. e Vaccari E. – Ricerche sulla fisiologia della crescita della radice. – II. Caratteristiche della radice di Pisello (pres. dal Socio S. Tonzig).

TEMI DI DISCUSSIONE

Il Socio Montalenti informa la Classe delle proposte adottate dalla Categoria V (Scienze Biologiche e Applicazioni) nell'adunanza tenuta stamane, in merito alla discussione scientifica sul tema « Evoluzione e Genetica ».

Dopo ampia discussione, a cui hanno partecipato i Soci Sergi, Puntoni, Chiarugi, D'Ancona, Califano, Tonzig, Montalenti, la Categoria, tenuto conto anche delle opinioni comunicate per iscritto da alcuni Colleghi e in particolare dal prof. Levi, ha deliberato all'unanimità, quanto segue:

Si è convenuto, innanzi tutto, di limitare l'ambito del colloquio, restringendolo alla trattazione di alcuni temi relativi al contributo recato dalla Genetica alla interpretazione dell'evoluzione. Il colloquio avrà per titolo: « Evoluzione e Genetica ».

Per quanto riguarda la data, in considerazione degli altri impegni dell'Accademia e del fatto che alcuni biologi stranieri, fra coloro che hanno recato contributi importanti all'argomento, si troveranno in Italia nel mese di aprile, si è deciso di tenere la discussione nei giorni 8–9–10 aprile 1959, che precedono la tornata accademica del giorno 11.

Si è poi convenuto di dare sviluppo particolarmente ad alcuni argomenti scelti fra i più attuali e fra quelli a cui anche il contributo degli studiosi italiani è di una certa importanza, e precisamente: il meccanismo di evoluzione al livello genico; i meccanismi di evoluzione al livello cromosomico; l'evoluzione nei microrganismi, con particolare riguardo all'aspetto biochimico.

Fra gli studiosi stranieri da invitare a tenere una relazione sono stati indicati i seguenti: H. J. Muller (Bloomington, U.S.A.), Socio straniero dell'Accademia: C. D. Darlington (Oxford), Socio straniero; Th. Dobzhansky (New York); B. Rensch (Münster); P. Matthey (Ginevra); K. Mather (Birmingham); E. S. Luria (Urbana, U.S.A.); G. Beadle (Pasadena, U.S.A.).

Fra gli Italiani, si è deciso di invitare a tenere relazioni i Soci Chiarugi, D'Ancona, Montalenti e i proff. C. Barigozzi, M. Benazzi, A. Buzzati Traverso, C. Jucci, ed eventualmente qualche altro da questi proposto. Tutti i Soci dell'Accademia che lo desiderino, potranno prender parte alle discussioni delle relazioni. Si potranno inoltre invitare alcuni altri studiosi italiani a partecipare alla discussione.

È stata infine nominata una Commissione esecutiva costituita dai Soci Chiarugi, Califano, D'Ancona, Montalenti, alla quale è affidato il compito di provvedere alla organizzazione effettiva del colloquio e di reperire i mezzi finanziari necessari allo scopo.

Le proposte della Categoria V sono approvate dalla Classe.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 13 dicembre 1958

BOGOESCU C. — *Ephemeroptera.* Bucureşti, Editura Academiei Republicii Populare Romîne, 1958. Pp. 187, in–8°, con figg. (Fauna Republicii Populare Romîne. Insecta, vol. VII, fasc. 3).

BOSSOLASCO Mario. — *L'autonomia della geofisica e le ricerche «Talassografiche» italiane per l'anno geofisico internazionale 1957–58.* Estr. da «Geofisica e Meteorologia», vol. VI, 1958, nn. 3–4.

BOSSOLASCO Mario e CICCONI Giuseppe. — *Eliofania e radiazione globale.* Estr. da «Geofisica e Meteorologia», vol. VI, 1958, nn. 3–4.

— e DAGNINO Ignazio. — *L'influenza delle aree continentali sui centri di variazione della pressione atmosferica.* Estr. da «La Ricerca Scientifica», a. XXVIII, 1958, n. 10.

BOSSOLASCO Mario, DAGNINO Ignazio e SIZZI Giocondo. — *La stazione registratrice del moto ondoso marino di Livorno.* Estr. da «La Ricerca Scientifica», a. XXVIII, 1958, n. 9.

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE. — *Groupe des Laboratoires de Bellevue.* Paris, Brunissen Impr., 1958. Pp. 113, in–8°, con figg. e tavv.

CICCONI Giuseppe. — Vedi: BOSSOLASCO Mario e CICCONI Giuseppe.

DAGNINO Ignazio. — Vedi: BOSSOLASCO Mario e DAGNINO Ignazio.

— Vedi: BOSSOLASCO Mario, DAGNINO Ignazio e SIZZI Giocondo.

FANTOLI Amilcare. — *La più alta temperatura del mondo.* Estr. da «Rivista di Meteorologia Aeronautica», a. XVIII, 1958, n. 3.

— *Le prime misure della radiazione globale in Somalia.* Estr. da «Rivista di Meteorologia Aeronautica», a. XVIII, 1958, n. 2.

LINNÉ Carl (von). — *Diaeta naturalis 1733.* På uppdrag av Kungliga Svenska Vetenskapsakademien, utgiven av Arvid Hj. Uggla. Uppsala, Kung. Svenska Vetenskapsakademien, 1958. Pp. 222, in–8°.

MARGARIA Rodolfo. — Vedi: *Pubblicazioni dell'Istituto di Fisiologia della Università di Milano.*

MONTALENTI Giuseppe. — *L'evoluzione.* Torino, Edizioni Radio Italiana, 1958. Pp. 225, in–8°, con figg. (Saggi, 27).

PEARSON W. B. — *A handbook of Lattice Spacings and Structures of Metals and Alloys.* London, Pergamon Press, 1958. Pp. X–1044, in–8° (International Series of Monographs on Metal Physics and Physical Metallurgy, vol. IV).

Pubblicazioni dell'Istituto di Fisiologia della Università di Milano. Anni Accademici 1953–1957 [Raccolti da R. Margaria].

RASSEGNA (3ª) INTERNAZIONALE ELETTRONICA–NUCLEARE. — *Atti del Congresso Scientifico.* Vol. II: *Sezione Elettronica,* p. I, luglio 1956; vol. III: *Sezione Elettronica,* p. II, luglio 1956. A cura del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Roma, Rassegna Internazionale Elettronica–Nucleare, 1956. Voll. 2, in–8°.

RASSEGNA (4ª) INTERNAZIONALE ELETTRONICA–NUCLEARE. — *Atti del Congresso Scientifico.* Vol. I: *Sezione Nucleare,* 24–28 giugno 1957; vol. II: *Sezione Elettronica,* 1–6 luglio 1957. Roma, Rassegna Internazionale Elettronica–Nucleare 1957. Voll. 2, in–8°.

RASSEGNA (5ª) INTERNAZIONALE ELETTRONICA–NUCLEARE E DELLA CINEMATOGRAFIA. — *Catalogo Ufficiale.* Roma, Palazzo dei Congressi E.U.R., 16–30 giugno 1958. Roma, Rassegna Internazionale Elettronica–Nucleare, 1958. Pp. 247, in–8°, con figg.

ROSSINI Alessandro Junior. — *Equivalente energetico della massa di natura elettromagnetica.* Vetralla, 1958. Testo dattiloscritto di fogli 3, in–4°.

ROSSINI Giuseppe Junior. — *Una possibile spiegazione della grande varietà di mesoni e del loro decadimento in elettroni*. Vetralla, 1958. Testo dattiloscritto di fogli 3, in-4°.

SALPETER E. W. (S. J.). — *The Vatican collection of meteorites*. Città del Vaticano, Specola Vaticana, 1957. Pp. 40, in-8°.

SIZZI Giocondo. — Vedi: BOSSOLASCO Mario, DAGNINO Ignazio e SIZZI Giocondo.

UGGLA Arvid Hj. — Vedi: LINNÉ Carl (von).

VINCENT Maxime. — *Le mystère de la découverte de Neptune par Leverrier*. Paris, Librairie Fischbacher, 1958. Pp. 35, in-16°.

ZAGAR Francesco. — *Per l'inaugurazione della nuova cupola del nuovo complesso strumentale e dei lavori per l'anno geofisico internazionale all'Osservatorio di Brera (27 luglio 1957)*. Pavia, M. Ponzio, 1958. Pp. 13, in-8°, con tavv. (Osservatorio Astronomico di Milano e Merate).

A. SIGNORINI e G. COTRONEI

INDICI DEL VOLUME

INDICE PER AUTORI

A

AGOSTONI E., SPINELLI D. e CERRETELLI P., Aumento del tempo di un riflesso corticale provocato dall'ipocapnia, *112*.

AGUDO F. R. D. e WOLF F., Propriétés spectrales de l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z} + d$ à coefficients complexes, *273*.

ALBERGONI F., vedi MARRÈ E.

ANTONINI E., vedi ROSSI-FANELLI A.

APARO E., Un criterio di Routh e sua applicazione al calcolo degli zeri di un polinomio, *26*.

ARRIGONI O., vedi MARRÈ E.

B

BACCI G., BALATA M. e ROMANI M. L., Rapporti numerici dei sessi in tre popolazioni di *Mytilicola intestinalis* Steuer, *557*.

BAFFONI G. M. e PINACCI R., L'andamento dell'attività mitotica nel midollo spinale di Anfibî anuri durante lo sviluppo, *128*.

BAFFONI G. M., L'attività secretoria del sistema ipotalamo-ipofisario e dell'organo sottocommessurale durante lo sviluppo di un Anfibio anuro, *610*.

BALATA M., vedi BACCI G.

BALDISSEROTTO A. e UGURGIERI B., I fenomeni di autolisi nella metamorfosi di *Bufo vulgaris*, *81*.

BELLINI L., vedi URBANI E.

BOAGA G., Confronti fra i vari tipi di livellazione geometrica di precisione ottenuti con i valori delle gravità osservate nei singoli caposaldi, *254*.

— Sulle livellazioni dinamiche, *395*.

BOMPIANI G. D. e FARULLA A., Osservazioni sulle modificazioni ultrastrutturali del miocardio in ratti trattati con estratto tiroideo, *345*.

BONDI C., Prime ricerche sperimentali sul valore morfogenetico di alcuni fattori funzionali nello sviluppo dell'apparato digerente degli Anfibi anuri, *124*.

BONINO G. B., CHIORBOLI P. e FABBRI G., Sugli spettri Raman ed ultrarossi dell'osmiocianuro di potassio allo stato cristallino ed in soluzione acquosa, *401*.

BONINO G. B. e FABBRI G., Spettro ultrarosso di alcuni ferricianuri, *410*.

BUCCI E., vedi CERLETTI P,

C

CAGLIOTI V., SARTORI G. e FURLANI C., Analisi dello spettro vibrazionale dello ione complesso $Cr(CN)_6^{3-}$, *260*.

CALIFANO S., Costanti di forza degli esafluoruri XF_6, *284*.

CAPPELLINA F., vedi FABBRI G.

CARINI G., Il teorema dell'energia nella magneto-idrodinamica dei fluidi viscosi comprimibili, *470*.

CARRÀ S., Indagine sulla struttura elettronica della molecola della guanidina e dello ione guanidinico, *192*.

CASASCO E., Sull'innervazione recettrice e vegetativa del labirinto membranoso dei teleostei, *195*.

CATTANEO GASPARINI I., Campi basici e trasformazioni affini, *33*.

CERLETTI P., FRONTICELLI C. e BUCCI E., Ricerche sulle adinelato chinasi, *543*.

CERRETELLI P., vedi AGOSTONI E.

CHIORBOLI P., vedi BONINO G. B.

CIMINO M. e FRESA A., Fotometria fotoelettrica dell'eclisse totale di luna del 13-14 maggio 1957, *58*.

COLAUTTI M. P., Sulla determinazione di un sistema completo di vettori, *268*.

COLONNETTI G., Nuovi punti di vista sul problema dell'equilibrio elasto-plastico nel tempo. Nota I, *140*.

— L'equilibrio elasto-plastico delle strutture nel tempo. Nota II, *239*.

— Il problema dell'isteresi negli stati di coazione. Nota III, *389*.

CORAZZA R., vedi PELLIZZER R.

CORRADINI P., Energia di risonanza del poliacetilene, *517*.
— vedi NATTA G.
CREPAX P. e FADIGA E., I fenomeni elettrici corticocerebrali nella epilessia riflessa, *327*.
— e INFANTELLINA F., Effetti epilettogeni della morfina nella corteccia cerebrale isolata del Cane predisposto e del non predisposto alla epilessia riflessa, *335*.
CRUPI G., Sulla velocità di gruppo nei conduttori in moto, *280*.
CURATOLO A., vedi TURANO L.
CURZIO M., Sugli N–gruppi risolubili, *447*.

D

DANUSSO F. e MORAGLIO G., Relazione tra viscosità intrinseca e peso molecolare del polipropilene atattico in vari solventi, *509*.
— MORAGLIO G. e FLORES E., Entalpia ed entropia di fusione del polipropilene isotattico, *520*.
— MORAGLIO G. e GIANNELLA V., Peso molecolare ed affinità d'interazione con solventi di frazioni di polipropilene atattico, *498*.
D'ARCANGELO P., Sulla glicemia del colombo, *106*.
— Iperglicemia da somministrazione di streptomicina e di diidrostreptomicina ad alte dosi nel colombo, *214*.
— e MARCHETTI M., Contributo allo studio dell'azione tossica elettiva della streptomicina e della diidrostreptomicina sulle strutture nervose, *318*.
— — Sul consumo di O_2 di omogenati di cervello di ratti intossicati con streptomicina o con diidrostreptomicina, *590*.
DE STEFANO F., vedi LIVREA G.
— vedi ROSSI–FANELLI A.

E

ELIANU J., Sulla rappresentazione delle funzioni analitiche di più variabili reali. Nota I, *21*.
— Sulla rappresentazione delle funzioni analitiche di più variabili reali. Nota II, *146*.
EVANGELISTI G., Funzioni di trasferimento e caratteristiche di stabilità delle adduzioni idroelettriche. Nota II, *52*.

F

FABBRI G. e CAPPELLINA F., Spettro ultrarosso del Wolframio–ottocianuro di potassio allo stato cristallino e in soluzione acquosa, *299*.
FABBRI G., vedi BONINO G. B.
FADIGA E., vedi CREPAX P.
FARINA M., vedi NATTA G.
FARULLA A., vedi BOMPIANI G. D.
FASANA A., vedi VACIAGO A.
FERRO R., Il composto URh_3, *189*.
FERRONI E. e FICALBI A., Cinetica d'adsorbimento di O_2 da parte di film monomolecolari di Co–disalicilaldeideetilendiimmina, *495*.
FICALBI A., vedi FERRONI E.
FILOGAMO G. e STRUMIA E., Ricerche sperimentali sulle correlazioni interneuroniche nello sviluppo dei centri e delle vie ottiche, nel pollo, *119*.
FLORES E., vedi DANUSSO F.
FRESA A., vedi CIMINO M.
FRONTICELLI C., vedi CERLETTI P.
FURLANI C., Alcune considerazioni sulla validità del modello elettrostatico nello studio dei complessi, *488*.
FURLANI C., vedi CAGLIOTI V.

G

GALLARATI D., Sulla varietà che rappresenta le coppie di punti di due spazi, *276*.
GALLITELLI P., La clorite a 14 Å a reticolo espandibile dei diabasi di Groppo Maggio nell'Appennino emiliano, *13*.
GARAVELLI C. L. e MAZZI F., Prima segnalazione in natura della zeunerite fra i minerali secondari di uranio della Val Rendena, *75*.
GHIRARDELLI E., Osservazioni preliminari sulla corona ciliata in *Spadella cephaloptera* Busch (Chaetognatha), *87*.
GHIRETTI F. e GHIRETTI–MAGALDI A., I citocromi dei Policheti e dei Sipunculidi. Spettri differenziali, *595*.
GHIRETTI–MAGALDI A., vedi GHIRETTI F.
GIANNELLA V., vedi DANUSSO F.
GIÀO A., Sulla variazione annuale del test chimico–fisico D di Piccardi e la cosmologia relativistica, *65*.
GIUFFRÈ L., vedi LOMBARDI E.
— vedi NATTA G.

GODOLI G., Una nuova asimmetria est–ovest dell'attività solare, *481*.

GRAZIADEI P., Sulla presenza di particolari cellule nervose di senso negli epiteli di rivestimento della ventosa di *Sepia officinalis*, *564*.

GROSS W., vedi PICONE M.

GUALTIEROTTI T. e PASSERINI D., Soglia cerebellare alle accelerazioni rotatorie e sommazione temporale nel piccione viaggiatore, *115*.

— — Risposte rotatorie e postrotatorie cerebellari e nistagmo nucale del piccione, *219*.

— — Effetto delle micro–onde sulle scariche cerebellari post–rotatorie del piccione viaggiatore, *324*.

— — Risposte rotatorie e post–rotatorie cerebellari e variazioni della pressione arteriosa nel gatto curarizzato con d–tubocurarina e con succinilcolina, *584*.

GUGGENHEIMER H., Complementi e commenti ad un teorema di Beniamino Segre, *453*.

H

HAIMOVICI M., Sulla decomposizione del prolungamento di un sistema differenziale, *152*.

I

INFANTELLINA F., vedi CREPAX P.

L

LIOTTI F. S., Prime ricerche sul comportamento di meristemi radicali sottoposti a centrifugazione, *350*.

LIVREA G. e DE STEFANO F., Il comportamento delle diverse frazioni dell'N del cuore e di alcuni altri organi del colombo bradicardico per inanizione assoluta, *100*.

— — Il comportamento delle diverse frazioni dell'N del cuore e di alcuni altri organi del colombo bradicardico per malnutrizione orizanica, *202*.

— e RICCERI G., Il comportamento della xantinossidasi del cuore e del muscolo scheletrico del colombo normale e del colombo bradicardico per inanizione assoluta o per malnutrizione orizanica, *303*.

LOMBARDI E. e GIUFFRÈ L., Struttura dei bassi polimeri lineari dell'acetilene, *70*.

M

MANCINI A. M., vedi PELLIZZER R.

MARCHETTI M., vedi D'ARCANGELO P.

MARCHIONNA E., Una dimostrazione algebrico–geometrica del teorema di Riemann–Roch relativo alle varietà algebriche classiche, *160*.

MARINOZZI V., Colorazione delle sezioni ultrasottili per il microscopio elettronico per mezzo dell'impregnazione argentica, *341*.

MARRÈ E. e ARRIGONI O., Aumento del glutatione ridotto in segmenti di internodio di pisello trattati con acido gibberellico, *309*.

— SERVETTAZ O. e ALBERGONI F., Sul meccanismo di adattamento a condizioni osmotiche estreme in *Dunaliella salina*. – I. Reazioni fisiologiche a variazioni dell'ambiente osmotico, *567*.

MARZIANI M., Un teorema di unicità dello stato superconduttivo, *184*.

MAZZANTI G., vedi NATTA G.

MAZZI F., vedi GARAVELLI C. L.

MESSERI A., Nuovi dati sulla sistematica dell'*Abies nebrodensis* (Lojac.) Mattei, *547*.

MILIC–EMILI G. e PETIT J. M., Misura contemporanea della pressione endopleurica ed endoesofagea nel cane, *581*.

MINISCI F., Perossidi e sali di diazonio: Reazione di Meerwein. Alo–arilazioni e arilazioni con perossidi di fenilidrazoni, *538*.

MORAGLIO G., vedi DANUSSO F.

MUGNOLI A., vedi VACIAGO A.

N

NATTA G., FARINA M. e PERALDO M., Polimeri a struttura doppiamente isotattica, *424*.

— GIUFFRÈ L. e PASQUON I., Determinazione dei metalli legati a catene di polipropilene isotattico, *417*.

— MAZZANTI G. e CORRADINI P., Polimerizzazione stereospecifica dell'acetilene, *3*.

P

Panella G., Isomorfismo tra piani di traslazione di Marshall Hall, *172*.

Pasquon I., vedi Natta G.

Passerini D., vedi Gualtierotti T.,

Pellizzer R., Corazza R. e Mancini A. M., Sulla spettrometria a raggi X di fluorescenza come metodo per lo studio degli elementi in traccie in biologia. Prime ricerche su alcuni tessuti umani, *603*.

Peraldo M., vedi Natta G.

Perucca E., Commemorazione del Socio Quirino Majorana, *354*.

Petit J. M., vedi Milic–Emili G.

Piccardi G., L'ipotesi solare ed i risultati delle osservazioni effettuate mediante i tests chimici nell'ambito dell'Anno Geofisico Internazionale, *485*.

Picone M., Un metodo di calcolo automatico degli estremi di una funzione o delle soluzioni di un'equazione vettoriale, *373*.

— e Gross W., Intervallo d'esistenza e limitazioni per la soluzione di un sistema di equazioni differenziali ordinarie, *225*.

Pinacci R., vedi Baffoni G. M.

Piontelli R., Serravalle G. e Poli G., Progressi nei metodi e dispositivi per la misura delle sovratensioni di elettrodo, *431*.

Poli G., vedi Piontelli R.

Pucci C., Un problema isoperimetrico per la determinazione della forma di una nave, *31*.

R

Ricceri G., vedi Livrea G.

Romani M. L., vedi Bacci G.

Romiti A., Sul comportamento critico degli alberi rotanti aventi massa ed elasticità distribuite, *174*.

Rossi–Fanelli A. e Antonini E., Ricerche sui pigmenti respiratori dei molluschi. – II. Equilibrio con l'ossigeno della mioglobina di *Aplysia*, *435*.

— Antonini E. e De Stefano A. R., Ricerche sui pigmenti respiratori dei molluschi. – III. Proprietà chimico–fisiche della mioglobina di *Aplysia*, *439*.

S

Saban G., Nuove caratterizzazioni della sfera, *457*.

Salomoni E., vedi Turano L.

Salvetti O., Osservazioni sul calcolo delle frequenze di oscillazione di molecole MeX_6 a simmetria ottaedrica, *292*.

Sartori G., vedi Caglioti V.

Sce M., Sulla completezza degli archi nei piani proiettivi finiti. Nota I, *43*.

Segre B., Proprietà in grande sulle funzioni analitiche di più variabili complesse, *231*.

— Sui riferimenti fra superficie per incidenza o parallelismo di piani tangenti, *381*.

Serravalle G., vedi Piontelli R.

Servettaz O., vedi Marrè E.

Signorini A., Estensione delle formule di Almansi a sistemi elastici anisotropi, *246*.

Singer I., Sur un dual du théorème de Hahn–Banach et sur un théorème de Banach, *443*.

Sorace O., Intorno ad un problema di W. Blaschke generalizzato, *465*.

Spinelli D., vedi Agostoni E.

Stefanelli A. e Zacchei A. M., Comportamento delle cellule di abbozzo oculare di embrione di pollo dissociate con tripsina e coltivate *in vitro*, *617*.

Stefani R., Dati sulla partenogenesi accidentale negli Embiotteri della Fauna mediterranea, *622*.

Strumia E., vedi Filogamo G.

T

Trezzi F., Ricerche sulla fisiologia della crescita della radice. – I. Impostazione del problema, *575*.

Tricomi F. G., Sull'equazione di Tomotika e Tamada, *135*.

Turano L., Curatolo A. e Salomoni E., Ricerche sulla Motilità dell'esofago Umano. IV. Sul cosiddetto peristaltismo terziario dell'esofago, o motilità segmentale non peristaltica, *92*.

— — — Ricerche sulla Motilità dell'esofago Umano. – V. Contributo sperimentale allo studio della fisiologia della giunzione gastro–esofagea nell'uomo, *209*.

— — — Ricerche sulla Motilità dell'esofago Umano. – VI. Eccitabilità della peristalsi secondaria (o extradeglutitoria) anche nel tratto sovraortico dell'esofago, *313*.

U

Ugurgieri B., vedi Baldisserotto A.

URBANI E. e BELLINI L., Studio della ribonucleasi acida nello sviluppo di *Artemia salina* Leach, *198*.

V

VACIAGO A. e FASANA A., Struttura cristallina e polimorfismo del bis(N,N-Dietilditiocarbammato)-Nichel(II), *528*.

— e MUGNOLI A., Sulla struttura del Co^{III}-esacianuro di Co^{II}, *531*.

VÂLCOVICI V., Autres corrections appliquées à la loi de Hubble. Nota II, 474.

W

WOLF F., vedi AGUDO F. R. D.

Z

ZACCHEI A. M., vedi STEFANELLI A.

ZAGAR F., Commemorazione del Socio Giovanni Silva, *626*.

INDICE PER MATERIE

A

Algebra. — Sugli N–gruppi risolubili, CURZIO M., *447*.

Analisi matematica. — Propriétés spectrales de l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z} + d$ à coefficients complexes, AGUDO F. R. D. e WOLF F., *273*.

— Sulla rappresentazione delle funzioni analitiche di più variabili reali. Nota I, ELIANU J., *21*.

— Sulla rappresentazione delle funzioni analitiche di più variabili reali. Nota II, ELIANU J., *146*.

— Sulla decomposizione del prolungamento di un sistema differenziale, HAIMOVICI M., *152*.

— Intervallo d'esistenza e limitazioni per la soluzione di un sistema di equazioni differenziali ordinarie, PICONE M. e GROSS W., *225*.

— Un problema isoperimetrico per la determinazione della forma di una nave, PUCCI C., *31*.

— Sur un dual du théorème de Hahn–Banach et sur un théorème de Banach, SINGER I., *443*.

— Sull'equazione di Tomotika e Tamada, TRICOMI F. G., *135*.

Anatomia. — Sull'innervazione recettrice e vegetativa del labirinto membranoso dei teleostei, CASASCO E., *195*.

Astrofisica. — Una nuova asimmetria est–ovest dell'attività solare, GODOLI G., *481*.

— L'ipotesi solare ed i risultati delle osservazioni effettuate mediante i tests chimici nell'ambito dell'Anno Geofisico Internazionale, PICCARDI G., *485*.

Astrofisica teorica. — Sulla variazione annuale del test chimico–fisico D di Piccardi e la cosmologia relativistica, GIÃO A., *65*.

Astronomia. — Fotometria fotoelettrica dell'eclisse totale di luna del 13–14 maggio 1957, CIMINO M. e FRESA A., *58*.

Astronomia. — Autres corrections appliquées à la loi de Hubble. Nota II, VÂLCOVICI V., *474*.

B

Biochimica. — I citocromi dei Policheti e dei Sipunculidi. Spettri differenziali, GHIRETTI F. e GHIRETTI–MAGALDI A., *595*.

— Ricerche sui pigmenti respiratori dei molluschi. – II. Equilibrio con l'ossigeno della mioglobina di *Aplysia*, ROSSI–FANELLI A. e ANTONINI E., *435*.

— Ricerche sui pigmenti respiratori dei molluschi. – III. Proprietà chimico fisiche della mioglobina di *Aplysia*, ROSSI–FANELLI A., ANTONINI E. e DE STEFANO A. R., *439*.

Biologia. — L'attività secretoria del sistema ipotalamo–ipofisario e dell'organo sottocommessurale durante lo sviluppo di un Anfibio anuro, BAFFONI G. M., *610*.

— L'andamento dell'attività mitotica nel midollo spinale di Anfibî anuri durante lo sviluppo, BAFFONI G. M. e PINACCI R., *128*.

— Prime ricerche sperimentali sul valore morfogenetico di alcuni fattori funzionali nello sviluppo dell'apparato digerente degli Anfibî anuri, BONDI C., *124*.

— Prime ricerche sul comportamento di meristemi radicali sottoposti a centrifugazione, LIOTTI F. S., *350*.

— Sulla spettrometria a raggi X di fluorescenza come metodo per lo studio degli elementi in traccie in biologia. Prime ricerche su alcuni tessuti umani, PELLIZZER R., CORAZZA R. e MANCINI A. M., *603*.

— Comportamento delle cellule di abbozzo oculare di embrione di pollo dissociate con tripsina e coltivate *in vitro*, STEFANELLI A. e ZACCHEI A. M., *617*.

— Dati sulla partenogenesi accidentale negli Embiotteri della Fauna mediterranea, STEFANI R., *622*.

Botanica. — Nuovi dati sulla sistematica dell'*Abies nebrodensis* (Lojac.) Mattei, MESSERI A., *547*.

C

Calcolo numerico. — Un criterio di Routh e sua applicazione al calcolo degli zeri di un polinomio, APARO E., *26*.
— Un metodo di calcolo automatico degli estremi di una funzione o delle soluzioni di un'equazione vettoriale, PICONE M., *373*.
Chimica. — Sugli spettri Raman ed ultrarossi dell'osmiocianuro di potassio allo stato cristallino ed in soluzione acquosa, BONINO G. B., CHIORBOLI P. e FABBRI G., *401*.
— Spettro ultrarosso di alcuni ferricianuri, BONINO G. B. e FABBRI G., *410*.
— Analisi dello spettro vibrazionale dello ione complesso $Cr(CN)_6^{3-}$, CAGLIOTI V., SARTORI G. e FURLANI C., *260*.
— Spettro ultrarosso del Wolframio–ottocianuro di potassio allo stato cristallino e in soluzione acquosa, FABBRI G. e CAPPELLINA F., *299*.
— Alcune considerazioni sulla validità del modello elettrostatico nello studio dei complessi, FURLANI C., *488*.
— Struttura dei bassi polimeri lineari dall'acetilene, LOMBARDI E. e GIUFFRÈ L., *70*.
— Polimeri a struttura doppiamente isotattica, NATTA G., FARINA M. e PERALDO M., *424*.
— Determinazione dei metalli legati a catene di polipropilene isotattico, NATTA G., GIUFFRÈ L. e PASQUON I., *417*.
— Polimerizzazione stereospecifica dell'acetilene, NATTA G., MAZZANTI G. e CORRADINI P., *3*.
Chimica biologica. — Ricerche sulle adenilato chinasi, CERLETTI P., FRONTICELLI C. e BUCCI E., *543*.
— Il comportamento della xantinossidasi del cuore e del muscolo scheletrico del colombo normale e del colombo bradicardico per inanizione assoluta o per malnutrizione orizanica, LIVREA G. e RICCERI G., *303*.
Chimica fisica. — Costanti di forza degli esafluoruri XF_6, CALIFANO S., *284*.
— Indagine sulla struttura elettronica della molecola della guanidina e dello ione guanidinico, CARRÀ S., *192*.
— Energia di risonanza del poliacetilene, CORRADINI P., *517*.
— Relazione tra viscosità intrinseca e peso molecolare del polipropilene atattico in vari solventi, DANUSSO F. e MORAGLIO G., *509*.
Chimica fisica. — Entalpia ed entropia di fusione del polipropilene isotattico, DANUSSO F., MORAGLIO G. e FLORES E., *520*.
— Peso molecolare ed affinità d'interazione con solventi di frazioni di polipropilene atattico, DANUSSO F., MORAGLIO G. e GIANNELLA V., *498*.
— Cinetica d'adsorbimento di O_2 da parte di film monomolecolari di Co–disalicilaldeideetilendiimmina, FERRONI E. e FICALBI A., *495*.
— Osservazioni sul calcolo delle frequenze di oscillazione di molecole MeX_6 a simmetria ottaedrica, SALVETTI O., *292*.
— Struttura cristallina e polimorfismo del bis (N,N–Dietilditiocarbammato)–Nichel (II), VACIAGO A. e FASANA A., *528*.
Chimica inorganica. — Il composto URh_3, FERRO R., *189*.
— Sulla struttura del Co^{III}–esacianuro di Co^{II}, VACIAGO A. e MUGNOLI A., *531*.
Chimica organica. — Perossidi e sali di diazonio: Reazione di Meerwein. Aloarilazioni a arilazioni con perossidi di fenildrazoni, MINISCI F., *538*.
Commemorazioni. — Commemorazione del Socio Quirino Majorana, PERUCCA E., *354*.
— Commemorazione del Socio Giovanni Silva, ZAGAR F., *626*.
Comunicazioni varie, *367*, *639*.
Congressi, *368*.

E

Elettrochimica. — Progressi nei metodi e dispositivi per la misura delle sovratensioni di elettrodo, PIONTELLI R., SERRAVALLE G. e POLI G., *431*.
Embriologia sperimentale. — Ricerche sperimentali sulle correlazioni interneuroniche nello sviluppo dei centri e delle vie ottiche, nel pollo, FILOGAMO G. e STRUMIA E., *119*.

F

Fisica matematica. — Sulla velocità di gruppo nei conduttori in moto, CRUPI G., *280*.
— Un teorema di unicità dello stato superconduttivo, MARZIANI M., *184*.

Fisiologia. — Aumento del tempo di un riflesso corticale provocato dall'ipocapnia, AGOSTONI E., SPINELLI D. e CERRETELLI P., *112*.

— I fenomeni elettrici corticocerebrali nella epilessia riflessa, CREPAX P. e FADIGA E., *327*.

— Effetti epilettogeni della morfina nella corteccia cerebrale isolata del Cane predisposto e del non predisposto alla epilessia riflessa, CREPAX P. e INFANTELLINA F., *335*.

— Sulla glicemia del colombo, D'ARCANGELO P., *106*.

— Iperglicemia da somministrazione di streptomicina e di diidrostreptomicina ad alte dosi nel colombo, D'ARCANGELO P., *214*.

— Contributo allo studio dell'azione tossica elettiva della streptomicina e della diidrostreptomicina sulle strutture nervose, D'ARCANGELO P. e MARCHETTI M., *318*.

— Sul consumo di O_2 di omogenati di cervello di ratti intossicati con streptomicina o con diidrostreptomicina, D'ARCANGELO P. e MARCHETTI M., *590*.

— Soglia cerebellare alle accelerazioni rotatorie e sommazione temporale nel piccione viaggiatore, GUALTIEROTTI T. e PASSERINI D., *115*.

— Risposte rotatorie e post–rotatorie cerebellari e nistagmo nucale del piccione, GUALTIEROTTI T. e PASSERINI D., *219*.

— Effetto delle micro–onde sulle scariche cerebellari post–rotatorie del piccione viaggiatore, GUALTIEROTTI T. e PASSERINI D., *324*.

— Risposte rotatorie e post–rotatorie cerebellari e variazioni della pressione arteriosa nel gatto curarizzato con d–tubocurarina e con succinilcolina, GUALTIEROTTI T. e PASSERINI D., *584*.

— Il comportamento delle diverse frazioni dell'N del cuore e di alcuni altri organi del colombo bradicardico per inanizione assoluta, LIVREA G. e DE STEFANO F., *100*.

— Il comportamento delle diverse frazioni dell'N del cuore e di alcuni altri organi del colombo bradicardico per malnutrizione orizanica, LIVREA G. e DE STEFANO F., *202*.

— Misura contemporanea della pressione endopleurica ed endoesofagea nel cane, MILIC–EMILI G. e PETIT J. M., *581*.

Fisiologia. — Ricerche sulla Motilità dell'esofago Umano. – IV. Sul cosiddetto peristaltismo terziario dell'esofago, o motilità segmentale non peristaltica, TURANO L., CURATOLO A. e SALOMONI E., *92*.

— Ricerche sulla Motilità dell'esofago Umano. – Nota V. Contributo sperimentale allo studio della fisiologia della giunzione gastro–esofagea nell'uomo, TURANO L., CURATOLO A. e SALOMONI E., *209*.

— Ricerche sulla Motilità dell'esofago Umano. – Nota VI. Eccitabilità della peristalsi secondaria (o extradeglutitoria) anche nel tratto sovraortico dell'esofago, TURANO L., CURATOLO A. e SALOMONI E., *313*.

Fisiologia vegetale. — Aumento del glutatione ridotto in segmenti di internodio di pisello trattati con acido gibberellico, MARRÈ E. e ARRIGONI O., *309*.

— Sul meccanismo di adattamento a condizioni osmotiche estreme in *Dunaliella salina*. – I. Reazioni fisiologiche a variazioni dell'ambiente osmotico, MARRÈ E., SERVETTAZ O. e ALBERGONI F., 567.

— Ricerche sulla fisiologia della crescita della radice. – I. Impostazione del problema, TREZZI F., 575.

G

Geodesia. — Confronti fra i vari tipi di livellazione geometrica di precisione ottenuti con i valori delle gravità osservate nei singoli caposaldi, BOAGA G., *254*.

— Sulle livellazioni dinamiche, BOAGA G., 395.

Geometria. — Campi basici e trasformazioni affini, CATTANEO GASPARINI I., *33*.

— Sulla varietà che rappresenta le coppie di punti di due spazi, GALLARATI D., *276*.

— Una dimostrazione algebrico–geometrica del teorema di Riemann–Roch relativo alle varietà algebriche classiche, MARCHIONNA E., *160*.

— Isomorfismo tra piani di traslazione di Marshall Hall, PANELLA G., *172*.

— Nuove caratterizzazioni della sfera, SABAN G., 457.

— Sulla completezza degli archi nei piani proiettivi finiti. Nota I, SCE M., *43*.

— Sui riferimenti fra superficie per incidenza o parallelismo di piani tangenti, SEGRE B., 381.

Geometria. — Intorno ad un problema di W. Blaschke generalizzato, SORACE O., *465*.

I

Idrodinamica. — Funzioni di trasferimento e caratteristiche di stabilità delle adduzioni idroelettriche. Nota II, EVANGELISTI G., *52*.

M

Matematica. — Sulla determinazione di un sistema completo di vettori, COLAUTTI M. P., *268*.

— Complementi e commenti ad un teorema di Beniamino Segre, GUGGENHEIMER H., *453*.

— Proprietà in grande sulle funzioni analitiche di più variabili complesse, SEGRE B., *231*.

Meccanica. — Il teorema dell'energia nella magneto-idrodinamica dei fluidi viscosi comprimibili, CARINI G., *470*.

— Nuovi punti di vista sul problema dell'equilibrio elasto-plastico nel tempo. Nota I, COLONNETTI G., *140*.

— L'equilibrio elasto-plastico delle strutture nel tempo. Nota II, COLONNETTI G., *239*.

— Il problema dell'isteresi negli stati di coazione. Nota III, COLONNETTI G., *389*.

— Sul comportamento critico degli alberi rotanti aventi massa ed elasticità distribuite, ROMITI A., *174*.

— Estensione delle formule di Almansi a sistemi elastici anisotropi, SIGNORINI A., *246*.

Mineralogia. — La clorite a 14 Å a reticolo espandibile dei diabasi di Groppo Maggio dell'Appennino emiliano, GALLITELLI P., *13*.

— Prima segnalazione in natura della zeunerite fra i minerali secondari di uranio della Val Rendena, GARAVELLI C. L. e MAZZI F., *75*.

O

Opere pervenute in dono all'Accademia, *370*, 642.

P

Patologia. — Osservazioni sulle modificazioni ultrastrutturali del miocardio in ratti trattati con estratto tiroideo, BOMPIANI G. D. e FARULLA A., *345*.

— Colorazione delle sezioni ultrasottili per il microscopio elettronico per mezzo dell'impregnazione argentica, MARINOZZI V., *341*.

Personale accademico, *363*, *638*.

Presentazione di libri, *365*, *639*.

Presentazione di Note e Memorie, *366*, *639*.

R

Relazioni di Commissioni, *367*.

T

Temi di discussione, *364*, *640*.

Z

Zoologia. — Rapporti numerici dei sessi in tre popolazioni di *Mytilicola intestinalis* Steuer, BACCI G., BALATA M. e ROMANI M. L., *557*.

— I fenomeni di autolisi nella metamorfosi di *Bufo vulgaris*, BALDISSEROTTO A. e UGURGIERI B., *81*.

— Osservazioni preliminari sulla corona ciliata in *Spadella cephaloptera* Busch (Chaetognatha), GHIRARDELLI E., *87*.

— Sulla presenza di particolari cellule nervose di senso negli epiteli di rivestimento della ventosa di *Sepia officinalis*, GRAZIADEI P., *564*.

— Studio della ribonucleasi acida nello sviluppo di *Artemia salina* Leach, URBANI E. e BELLINI L., *198*.

INDICI DEI FASCICOLI

FASCICOLO 1–2

LUGLIO–AGOSTO 1958.

NOTE DI SOCI

NATTA G., MAZZANTI G. e CORRADINI P., Polimerizzazione stereospecifica dell'acetilene (pres. dal Socio *G. Natta*) . . . . . *Pag.* 3
GALLITELLI P., La clorite a 14 Å a reticolo espandibile dei diabasi di Groppo Maggio dell'Appennino emiliano . . . . . » 13

NOTE PRESENTATE DA SOCI

ELIANU J., Sulla rappresentazione delle funzioni analitiche di più variabili reali. Nota I (pres. dal Socio *M. Picone*) . . . . . » 21
APARO E., Un criterio di Routh e sua applicazione al calcolo degli zeri di un polinomio (pres. dal Socio *M. Picone*) . . . . . » 26
PUCCI C., Un problema isoperimetrico per la determinazione della forma di una nave (pres. dal Socio *M. Picone*) . . . . . » 31
CATTANEO GASPARINI I., Campi basici e trasformazioni affini (pres. dal Socio *E. Bompiani*) . . . . . » 33
SCE M., Sulla completezza degli archi nei piani proiettivi finiti. Nota I (pres. dal Socio *B. Segre*) . . . . . » 43
EVANGELISTI G., Funzioni di trasferimento e caratteristiche di stabilità delle adduzioni idroelettriche. Nota II (pres. dal Corrisp. *G. Supino*) . . . . . » 52
CIMINO M. e FRESA A., Fotometria fotoelettrica dell'eclisse totale di luna del 13–14 maggio 1957 (pres. dal Socio *G. Armellini*) . . . . . » 58
GIÃO A., Sulla variazione annuale del test chimico–fisico D di Piccardi e la cosmologia relativistica (pres. dal Corrisp. *G. Righini*) . . . . . » 65
LOMBARDI E. e GIUFFRÈ L., Struttura dei bassi polimeri lineari dell'acetilene (pres. dal Socio *G. Natta*) . . . . . » 70
GARAVELLI C. L. e MAZZI F., Prima segnalazione in natura della zeunerite fra i minerali secondari di uranio della Val Rendena (pres. dal Socio *G. Carobbi*) » 75
BALDISSEROTTO A. e UGURGIERI B., I fenomeni di autolisi nella metamorfosi di di *Bufo vulgaris* (pres. dal Socio *G. Cotronei*) . . . . . » 81
GHIRARDELLI E., Osservazioni preliminari sulla corona ciliata in *Spadella cephaloptera* Busch (Chaetognatha) (pres. dal Corrisp. *U. D'Ancona*) . . . » 87
TURANO L., CURATOLO A. e SALOMONI E., Ricerche sulla Motilità dell'esofago Umano. – IV. Sul cosiddetto peristaltismo terziario dell'esofago, o motilità segmentale non peristaltica (pres. dal Corrisp. *G. Amantea*) . . . . » 92
LIVREA G. e DE STEFANO F., Il comportamento delle diverse frazioni dell'N del cuore e di alcuni altri organi del colombo bradicardico per inanizione assoluta (pres. dal Corrisp. *G. Amantea*) . . . . . » 100

D'Arcangelo P., Sulla glicemia del colombo (pres. dal Corrisp. *G. Amantea*) . *Pag.* 106
Agostoni E., Spinelli D. e Cerretelli P., Aumento del tempo di un riflesso corticale provocato dall'ipocapnia (pres. dal Socio *R. Margaria*) . . . . » 112
Gualtierotti T. e Passerini D., Soglia cerebellare alle accelerazioni rotatorie e sommazione temporale nel piccione viaggiatore (pres. dal Socio *R. Margaria*) » 115
Filogamo G. e Strumia E., Ricerche sperimentali sulle correlazioni interneuroniche nello sviluppo dei centri e delle vie ottiche, nel pollo (pres. dal Socio *G. Levi*) . . . . . » 119
Bondi C., Prime ricerche sperimentali sul valore morfogenetico di alcuni fattori funzionali nello sviluppo dell'apparato digerente degli anfibi Anuri (pres. dal Socio *G. Cotronei*) . . . . . » 124
Baffoni G. M. e Pinacci R., L'andamento dell'attività mitotica nel midollo spinale di Anfibî anurî durante lo sviluppo (pres. dal Socio *G. Cotronei*) . » 128

FASCICOLO 3-4

Settembre-Ottobre 1958.

NOTE DI SOCI

Tricomi F. G., Sull'equazione di Tomotika e Tamada . . . . . » 135
Colonnetti G., Nuovi punti di vista sul problema dell'equilibrio elasto-plastico nel tempo. Nota I . . . . . » 150

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Elianu J., Sulla rappresentazione delle funzioni analitiche di più variabili reali, Nota II (pres. dal Socio *M. Picone*) . . . . . » 146
Haimovici M., Sulla decomposizione del prolungamento di un sistema differenziale (pres. dal Socio *B. Segre*) . . . . . » 132
Marchionna E., Una dimostrazione algebrico-geometrica del teorema di Riemann-Roch relativo alle varietà algebriche classiche (pres. dal Socio *O. Chisini*) . . . . . » 160
Panella G., Isomorfismo tra piani di traslazione di Marshall Hall (pres. dal Socio *E. Bompiani*) . . . . . » 172
Romiti A., Sul comportamento critico degli alberi rotanti aventi massa ed elasticità distribuite (pres. dal Corrisp. *C. Ferrari*) . . . . . » 174
Marziani M., Un teorema di unicità dello stato superconduttivo (pres. dal Corrisp. *D. Graffi*) . . . . . » 184
Ferro R., Il composto URh_3 (pres. dal Socio *L. Rolla*) . . . . . » 189
Carrà S., Indagine sulla struttura elettronica della molecola della guanidina e dello ione guanidinico (pres. dal Socio *L. Cambi*) . . . . . » 192
Casasco E., Sull'innervazione recettrice e vegetativa del labirinto membranoso dei teostei (pres. dal Socio *A. Pensa*) . . . . . » 195
Urbani E. e Bellini L., Studio della ribonucleasi acida nello sviluppo di *Artemia salina* Leach (pres. dal Socio *G. Cotronei*) . . . . . » 198
Livrea G e De Stefano F., Il comportamento delle diverse frazioni dell'N del cuore e di alcuni altri organi di colombo bradicardico per malnutrizione orizanica (pres. dal Corrisp. *G. Amantea*) . . . . . » 202

Turano L., Curatolo A. e Salomoni E., Ricerche sulla Motilità dell'esofago Umano. – Nota V. Contributo sperimentale allo studio della fisiologia della giunzione gastro–esofagea nell'uomo (pres. dal Corrisp. *G. Amantea*) *Pag.* 209
D'Arcangelo P., Iperglicemia da somministrazione di streptomicina e di diidrostreptomicina ad alte dosi nel colombo (pres. dal Corrisp. *G. Amatea*) . . » 214
Gualtierotti T. e Passerini D., Risposte rotatorie e post–rotatorie cerebellari e nistagmo nucale del piccione (pres. dal Socio *R. Margaria*). . . . . » 210

FASCICOLO 5

Novembre 1958.

NOTE DI SOCI

Picone M. e Gross W., Intervallo d'esistenza e limitazioni per la soluzione di un sistema di equazioni differenziali ordinarie (pres. dal Socio *M. Picone*) . » 225
Segre B., Proprietà in grande sulle funzioni analitiche di più variabili complesse . . . . . » 231
Colonnetti G., L'equilibrio elasto–plastico delle strutture nel tempo. Nota II . » 239
Signorini A., Estensione delle formule di Almansi a sistemi elastici anisotropi . » 246
Boaga G., Confronti fra i vari tipi di livellazione geometrica di precisione ottenuti con i valori delle gravità osservate nei singoli caposaldi . . . » 254
Caglioti V., Sartori G. e Furlani C., Analisi dello spettro vibrazionale dello ione complesso $Cr(CN)_6^{3-}$ (pres. dal Socio *V. Caglioti*) . . . . . » 260

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Colautti M. P., Sulla determinazione di un sistema completo di vettori (pres. dal Socio *M. Picone*) . . . . . » 268
Agudo F. R. D. e Wolf F., Propriétés spectrales de l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z} + d$ à coefficients complexes (pres. dal Socio *M. Picone*) . . . . . » 273
Gallarati D., Sulla varietà che rappresenta le coppie di punti di due spazi (pres. dal Corrisp. *E. G. Togliatti*) . . . . . » 276
Crupi G., Sulla velocità di gruppo nei conduttori in moto (pres. dal Socio *B. Finzi*) » 280
Califano S., Costanti di forza degli esafluoruri XF_6 (pres. dal Socio *F. Giordani*) » 284
Salvetti O., Osservazioni sul calcolo delle frequenze di oscillazione di molecole MeX_6 a simmetria ottaedrica (pres. dal Socio *G. B. Bonino* . . . » 292
Fabbri G. e Cappellina F., Spettro ultrarosso del Wolframio–ottocianuro di potassio allo stato cristallino e in soluzione acquosa (pres. dal Socio *G. B. Bonino*) . . . . . » 299
Livrea G. e Ricceri G., Il comportamento della xantinossidasi del cuore e del muscolo scheletrico del colombo normale e del colombo bradicardico per inanizione assoluta o per malnutrizione orizanica (pres. dal Corrisp. *G. Amantea*) . . . . . » 303
Marrè E. e Arrigoni O., Aumento del glutatione ridotto in segmenti di internodio di pisello trattati con acido gibberellico (pres. dal Socio *S. Tonzig*) » 309

TURANO L., CURATOLO A. e SALOMONI E., Ricerche sulla Motilità dell'esofago Umano. – Nota VI. Eccitabilità della peristalsi secondaria (o extradeglutitoria) anche nel tratto sovraortico dell'esofago (pres. dal Corrisp. *G. Amantea*) . . . . . *Pag.* 313
D'ARCANGELO P. e MARCHETTI M., Contributo allo studio dell'azione tossica elettiva della streptomicina e della diidrostreptomicina sulle strutture nervose (pres. dal Corrisp. *G. Amantea*) . . . . . » 318
GUALTIEROTTI T. e PASSERINI D., Effetto delle micro-onde sulle scariche cerebellari post-rotatorie del piccione viaggiatore (pres. dal Socio *R. Margaria*) . . . . . » 324
CREPAX P. e FADIGA E., I fenomeni elettrici corticocerebrali nella epilessia riflessa (pres. dal Socio *G. C. Pupilli* . . . . . » 327
CREPAX P. e INFANTELLINA F., Effetti epilettogeni della morfina nella corteccia cerebrale isolata del Cane predisposto e del non predisposto alla epilessia riflessa (pres. dal Socio *G. C. Pupilli*) . . . . . » 335
MARINOZZI V., Colorazione delle sezioni ultrasottili per il microscopio elettronico per mezzo dell'impregnazione argentica (pres. dal Socio *G. Bompiani*) . . . . . » 341
BOMPIANI G. D. e FARULLA A., Osservazioni sulle modificazioni ultrastrutturali del miocardio in ratti trattati con estratto tiroideo (pres. dal Socio *G. Bompiani*) . . . . . » 345
LIOTTI F. S., Prime ricerche sul comportamento di meristemi radicali sottoposti a centrifugazione (pres. dal Socio *G. Cotronei*) . . . . . » 350

COMMEMORAZIONI

PERUCCA E., Commemorazione del Socio Quirino Majorana . . . . . » 354
Personale accademico . . . . . » 363
Temi di discussione . . . . . » 364
Presentazione di libri . . . . . » 365
Presentazione di Note e Memorie . . . . . » 366
Relazioni di Commissioni . . . . . » 367
Comunicazioni varie . . . . . » 367
Congressi . . . . . » 368
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta dell'8 novembre 1958 . . . . . » 370

FASCICOLO 6

DICEMBRE 1958.

NOTE DI SOCI

PICONE M., Un metodo di calcolo automatico degli estremi di una funzione o delle soluzioni di un'equazione vettoriale . . . . . » 373
SEGRE B., Sui riferimenti fra superficie per incidenza o parallelismo di piani tangenti . . . . . » 381
COLONNETTI G., Il problema dell'isteresi negli stati di coazione. Nota III . . » 389
BOAGA G., Sulle livellazioni dinamiche . . . . . » 395

BONINO G. B., CHIORBOLI P. e FABBRI G., Sugli spettri Raman ed ultrarossi dell'osmiocianuro di potassio allo stato cristallino ed in soluzione acquosa (pres. dal Socio *G. B. Bonino*) . . . . . *Pag.* 401
BONINO G. B. e FABBRI G., Spettro ultrarosso di alcuni ferricianuri (pres. dal Socio *G. B. Bonino*) . . . . . » 410
NATTA G., GIUFFRÈ L. e PASQUON I., Determinazione dei metalli legati a catene di polipropilene isotattico (pres. dal Socio *G. Natta*) . . . . . » 417
NATTA G., FARINA M. e PERALDO M., Polimeri a struttura doppiamente isotattica (pres. dal Socio *G. Natta*) . . . . . » 424
PIONTELLI R., SERRAVALLE G. e POLI G., Progressi nei metodi e dispositivi per la misura delle sovratensioni di elettrodo (pres. dal Corrisp. *R. Piontelli*) » 431
ROSSI-FANELLI A. e ANTONINI E., Ricerche sui pigmenti respiratori dei molluschi. – II. Equilibrio con l'ossigeno della mioglobina di *Aplysia* (pres. dal corrisp. *A. Rossi-Fanelli*) . . . . . » 435
ROSSI-FANELLI A., ANTONINI E. e DE STEFANO A. R., Ricerche sui pigmenti respiratori dei molluschi. – III. Proprietà chimico-fisiche della mioglobina di *Aplysia* (pres. dal Corrisp. *A. Rossi-Fanelli*) . . . . . » 439

NOTE PRESENTATE DA SOCI

SINGER I., Sur un dual du théorème de Hahn-Banach et sur un théorème de Banach (pres. dal Socio *M. Picone*) . . . . . » 443
CURZIO M., Sugli N-gruppi risolubili (pres. dal Socio *R. Caccioppoli*) . . . . » 447
GUGGENHEIMER H., Complementi e commenti ad un teorema di Beniamino Segre (pres. dal Socio *B. Segre*) . . . . . » 453
SABAN G., Nuove caratterizzazioni della sfera (pres. dal Socio *B. Segre*) . . . » 457
SORACE O., Intorno ad un problema di W. Blaschke generalizzato (pres. dal Socio *B. Segre*) . . . . . » 465
CARINI G., Il teorema dell'energia nella magneto-idrodinamica dei fluidi viscosi comprimibili (pres. dal Socio *B. Finzi*) . . . . . » 470
VÂLCOVICI V., Autres corrections appliquées à la loi de Hubble. Nota II (pres. dal Socio *B. Finzi*) . . . . . » 474
GODOLI G., Una nuova asimmetria est-ovest dell'attività solare (pres. dal Corrisp. *G. Righini*) . . . . . » 481
PICCARDI G., L'ipotesi solare ed i risultati delle osservazioni effettuate mediante i tests chimici nell'ambito dell'Anno Geofisico Internazionale (pres. dal Corrisp. *G. Righini*) . . . . . » 485
FURLANI C., Alcune considerazioni sulla validità del modello elettrostatico nello studio dei complessi (pres. dal Socio *V. Caglioti*) . . . . . » 488
FERRONI E. e FICALBI A., Cinetica d'adsorbimento di O_2 da parte di film monomolecolari di Co-disalicilaldeideetilendiimmina (pres. dal Socio *V. Caglioti*) » 495
DANUSSO F., MORAGLIO G. e GIANNELLA V., Peso molecolare ed affinità d'interazione con solventi di frazioni di polipropilene atattico (pres. dal Socio *G. Natta*) » 498
DANUSSO F. e MORAGLIO G., Relazione tra viscosità intrinseca e peso molecolare del polipropilene atattico in vari solventi (pres. dal Socio *G. Natta*) . . » 509
CORRADINI P., Energia di risonanza del poliacetilene (pres. dal Socio *G. Natta*) » 517
DANUSSO F., MORAGLIO G. e FLORES E., Entalpia ed entropia di fusione del polipropilene isotattico (pres. dal Socio *G. Natta*) . . . . . » 520
VACIAGO A. e FASANA A., Struttura cristallina e polimorfismo del bis(N,N-Dietilditiocarbammato)-Nichel(II) (pres. dal Socio *L. Cambi*) . . . . » 528
VACIAGO A. e MUGNOLI A., Sulla struttura del Co^{III}-esacianuro di Co^{II} (pres. dal Socio *L. Cambi*) . . . . . » 531

MINISCI F., Perossidi e sali di diazonio: Reazione di Meerwein. Alo–arilazioni e arilazioni con perossidi di fenilidrazoni (pres. dal Socio *A. Quilico*) . . *Pag.* 538
CERLETTI P., FRONTICELLI C. e BUCCI E., Ricerche sulle adenilato chinasi (pres. dal Corrisp. *A. Rossi–Fanelli*) . . . . . » 543
MESSERI A., Nuovi dati sulla sistematica dell'*Abies nebrodensis* (Lojac.) Mattei (pres. dal Socio *A. Chiarugi*) . . . . . » 547
BACCI G., BALATA M. e ROMANI M. L., Rapporti numerici dei sessi in tre popolazioni di *Mytilicola intestinalis* Steuer (pres. dal Socio *G. Cotronei*) . » 557
GRAZIADEI P., Sulla presenza di particolari cellule nervose di senso negli epiteli di rivestimento della ventosa di *Sepia officinalis* (pres. dal Socio *A. Pensa*) » 564
MARRÈ E., SERVETTAZ O. e ALBERGONI F., Sul meccanismo di adattamento a condizioni osmotiche estreme in *Dunaliella salina*. – I. Reazioni fisiologiche a variazioni dell'ambiente osmotico (pres. dal Socio *S. Tonzig*) . » 567
TREZZI F., Ricerche sulla fisiologia della crescita della radice. – I. Impostazione del problema (pres. dal Socio *S. Tonzig*) . . . . . » 575
MILIC–EMILI G. e PETIT J. M., Misura contemporanea della pressione endopleurica ed endoesofagea nel cane (pres. dal Socio *R. Margaria*) . . . . . » 581
GUALTIEROTTI T. e PASSERINI D., Risposte rotatorie e post–rotatorie cerebellari e variazioni della pressione arteriosa nel gatto curarizzato con d–tubocurarina e con succinilcolina (pres. dal Socio *R. Margaria*) . . . . . » 584
D'ARCANGELO P. e MARCHETTI M., Sul consumo di O_2 di omogenati di cervello di ratti intossicati con streptomicina o con diidrostreptomicina (pres. dal Corrisp. *G. Amantea*) . . . . . » 590
GHIRETTI F. e GHIRETTI–MAGALDI A., I citocromi dei Policheti e dei Sipunculidi. Spettri differenziali (pres. dal Corrisp. *G. Montalenti*) . . . . . » 595
PELLIZZER R., CORAZZA R. e MANCINI A. M., Sulla spettrometria a raggi X di fluorescenza come metodo per lo studio degli elementi in traccie in biologia. Prime ricerche su alcuni tessuti umani (pres. dal Corrisp. *C. Andreatta*) » 603
BAFFONI G. M., L'attività secretoria del sistema ipotalamo–ipofisario e dell'organo sottocommessurale durante lo sviluppo di un Anfibio anuro (pres. dal Corrisp. *A. Stefanelli*) . . . . . » 610
STEFANELLI A. e ZACCHEI A. M., Comportamento delle cellule di abbozzo oculare di embrione di pollo dissociate con tripsina e coltivate *in vitro* (pres. dal Corrisp. *A. Stefanelli* . . . . . » 617
STEFANI R., Dati sulla partenogenesi accidentale negli Embiotteri della Fauna mediterranea (pres. dal Socio *G. Cotronei*) . . . . . » 622

COMMEMORAZIONI

ZAGAR F., Commemorazione del Socio Giovanni Silva . . . . . » 626

Personale accademico . . . . . » 638
Comunicazioni varie . . . . . » 639
Presentazione di libri . . . . . » 639
Presentazione di Note e Memorie . . . . . » 639
Temi di discussione . . . . . » 640
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 13 dicembre 1958 » 642

Indice per Autori . . . . . » 647
Indice per materie . . . . . » 652
Indici dei fascicoli . . . . . » 656

3 8198 304 935 040
UNIVERSITY OF ILLINOIS AT CHICAGO